授業を補助するプログラム (3)
―整数による配分―

社会情報学科　行　方　常　幸

1．はじめに

私が担当する数理的な科目（例えば「計画科学」，「オペレーションズ・リサーチ」等）において，その内容を理解するためには，多くの数値例を実際に解くことが必要であるものが多い。しかしながら，人間の手計算で解ける問題は，小規模なものに限られる。また，手計算で解ける問題でも，自分で求めた答えが正解であるかをチェックすることも容易ではない。

これに対処するために，「整数による配分」問題の解を計算するプログラムを作成したので本稿で紹介する。中規模程度以下の問題に対して，データを入力し，該当するタブを表示させれば，種々の解を計算するプログラムである。このプログラム有効に利用することにより，計算の手間に必要以上にとらわれず，解そのものの性質に注意の焦点を集めることが可能となる。

2.「整数による配分」問題とその解

この節では「整数による配分」問題とその解を説明する。

表1．商品券の配分（50枚）

	A	B	C	D	合 計
販 売 額	120	500	850	1,000	2,470
比例配分	2.43	10.12	17.21	20.24	50枚

次のような例を考える：X社はA，B，C，Dの4支社からなる。従業員の勤労意欲を高めるために，業績に応じて10万円の商品券を社員に配ることにした。商品券の総数は50枚である。支社内部で社員にどのように配分されるかは各支社が独自に決めることになっている。各支社の営業成績（販売額）は表1のように与えられている。販売額になるべく比例して商品券を各支社に配るにはどうすべきであろうか？　ここでの問題点は正確に比例配分しようとしてもそれが不可能な点である。すなわち，商品券は整数値のみで配分可能であり，例えば，2.43枚の商品券をA支社に配分できない。従って，何らかの方法で整数値に丸めなければならない。

このような参加者の要求量になるべく正比例するように離散資源を配分しなければならない問題は多く存在する。どのような配分方法を取ろうとも，配分される資源の個数が高々1，2個違うだけであろうから，たいしたことはないという観点もあるが，この1，2個の差が重大な結果を招く場合もあり，様々な配分方法が提案されている。

まず，数式を利用して，上記の問題を定義する。n 人のプレイヤーに配分すべき A 個の離散資源がある。プレイヤー i の要求量を $P_i (i=1,\ldots,n)$ とする。ここで，A と P_i は正の整数値を取る。以上が入力データである。プレイヤー i は比例配分 $Q_i := A\frac{P_i}{\sum_{j=1}^{n} P_j}$ を得たいのであるが，配分は整数値に限られるた

め，この値を得るとは限らない。配分方法Fとは与えられたAと$P := (P_1,\ldots,P_n)$に対して，整数による配分 $F(A,P)\left(\subset\left\{(a_1,\ldots,a_n)\ \middle|\ a_i: \text{非負整数},\ \sum_{j=1}^{n} a_j = A\right\}\right)$を対応させるものである。後で例を通じて説明するように，複数のプレイヤーの要求量が一致する時等に，$F(A,P)$ は1点ではなく複数個の点からなる場合がある。その場合，本稿では，全ての解を求める。

本稿で扱う配分方法は，Adams 法，Dean 法 Hamilton 法，Hill 法，Jefferson 法，Webster 法の6つである[1)]。まず，Hamilton 法を説明し，次に，残りの5つの方法をまとめて説明する。Hamilton 法はわれわれの直感に最も訴える単純な配分方法である。

Hamilton 法：

まず，各プレイヤーiに比例配分Q_iの整数部分を配分する。まだ，配分すべきAに残りがあれば，それらをQ_iの小数部分の大きいプレイヤーから順に配分する。

Adams 法，Dean 法，Hill 法，Jefferson 法，Webster 法は除数法と呼ばれ，配分を計算する時に，除数dが利用される（表2参照）。dは配分されるべき資源1個あたりの要求量を表している。これらの方法の基本的な考え方は次の通りである：プレイヤーiの要求量はP_iなので，$\frac{P_i}{d}$の配分を希望する。これが整数ならばその値が実際の配分となるが，そうでない場合，$a<\frac{P_i}{d}<a+1$となるaまたは$a+1$がプレイヤーiに配分される値の候補となる。大きい方$a+1$に丸めるのがAdams 法であり，小さい方aに丸めるのがJefferson 法である。丸める時の境界値がaと$a+1$の調和平均の場合がDean 法であり，境界値がこの2数の相乗平均の場合がHill 法であり，境界値がこの2数の中点の場合がWebster 法である。

1）これらの方法が発見された歴史と欠点などはYoungを参照。

表2．除 数 法 1

配分方法	プレイヤー i への配分量
Adams 法	$a+1 \text{ if } a<\frac{P_i}{d}\leq a+1$
Dean 法	$\begin{cases} a & \text{if } a\leq\frac{P_i}{d}<\frac{2a(a+1)}{2a+1} \\ a \text{ or } a+1 & \text{if } \frac{P_i}{d}=\frac{2a(a+1)}{2a+1} \\ a+1 & \text{if} <\frac{2a(a+1)}{2a+1}<\frac{P_i}{d}<a+1 \end{cases}$
Hill 法	$\begin{cases} a & \text{if } a\leq\frac{P_i}{d}<\sqrt{a(a+1)} \\ a \text{ or } a+1 & \text{if } \frac{P_i}{d}=\sqrt{a(a+1)} \\ a+1 & \text{if } \sqrt{a(a+1)}<\frac{P_i}{d}<a+1 \end{cases}$
Jefferson 法	$a \text{ if } a\leq\frac{P_i}{d}<a+1$
Webster 法	$\begin{cases} a & \text{if } a\leq\frac{P_i}{d}<a+\frac{1}{2} \\ a \text{ or } a+1 & \text{if } \frac{P_i}{d}=a+\frac{1}{2} \\ a+1 & \text{if } a+\frac{1}{2}<\frac{P_i}{d}<a+1 \end{cases}$

除数 d を変化させ，上記のように求められた各プレイヤーの配分量の総和（$\mathrm{Sum}(d)$ とする）が丁度 A になるように，調節すれば，除数法による解が求まる。

後の便宜のために，表2の第2列の配分量を d に関して解き，それを表3にしておく。

まず，表2の配分量により，Sum(d) が d の非増加関数であることに注意する。Sum(d) $>A$ ならば，d を増加させ，Sum(d) $<A$ ならば，d を減少させ，Sum(d) $=A$ となるように調節すればよい。解を与える d は一意には決まらない。

表3．除　数　法　2

方　法	配　分　量	d の初期値
A	a if $S(a) \le d < S(a-1)$ $\left(S(a) := \dfrac{P}{a}\right)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_i}{2A}$
D	$\begin{cases} a & \text{if } S(a) < d < S(a-1) \\ a \text{ or } a+1 & \text{if } d = S(a) \end{cases}$ $\left(S(a) := \dfrac{P(2a+1)}{2a(a+1)}\right)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_i}{2A}$
H	$\begin{cases} a & \text{if } S(a) < d < S(a-1) \\ a \text{ or } a+1 & \text{if } d = S(a) \end{cases}$ $\left(S(a) := \dfrac{P}{\sqrt{a(a+1)}}\right)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_i}{2A}$
J	a if $S(a) < d \le S(a-1)$ $\left(S(a) := \dfrac{P}{a+1}\right)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_i}{2A}$
W	$\begin{cases} a & \text{if } S(a) < d < S(a-1) \\ a \text{ or } a+1 & \text{if } d = S(a) \end{cases}$ $\left(S(a) := \dfrac{2P}{2a+1}\right)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_i}{2A}$

本稿では，次のようなアルゴリズムに従って計算を行った：(1) $\mathrm{Sum}(d)>A$ となる適当な d の初期値（表3と補遺を参照）と d の増分 inc の初期値（1とした）を決める。(2) $\mathrm{Sum}(d)\leqq A$ となるまで，d を増加させる。(3) $\mathrm{Sum}(d)=A$ であれば，解は求まったので，計算終了。(4) $\mathrm{Sum}(d)<A$ ならば，次に述べる細かい処理（4D と呼ぶ）を行い，それでも解が求まらない場合は，d を1ステップ戻し（$\mathrm{Sum}(d)>A$ である），inc を1/10倍し(1)から同じことを解が求まるまで繰り返す。

（4D）：上記の手順(4)にある細かい処理について説明する。表3の第2列の配分量をみると，Dean 法，Hill 法，Webster 法の場合，d が $S(a)$ に等しくなると，配分量は a でも $a+1$ でも良い[2)]。従って，このようなことが発生した場合は，配分量を，一応 a としておき，必要ならばあと1個増やすことができると記憶しておく。全てのプレイヤーに関するこれらの和を dif とおく。$\mathrm{Sum}(d)<A$ となったが，$\mathrm{Sum}(d)+dif\geqq A$ の場合，dif のうち $\mathrm{Sum}(d)-A$ 個を該当するプレイヤーに配分すれば解が求まる。$dif>\mathrm{Sum}(d)-A$ ならば，複数個（Combination ($dif, \mathrm{Sum}(d)-A$) 個）の解が求まる（複数個の解が求まるこのケースをタイプ1と呼んでおく）。

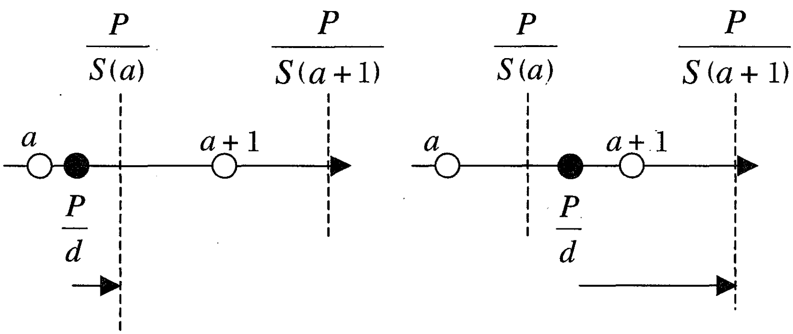
$dif=0$ の場合，d を減少させることを試み，複数個の解が発生する次に述べる2つ目の原因にも対処する。この対処法は，また，上記のアルゴリズム(1)－(4)が有限回で終わることも保証する。まず，複数個の解が発生する2つ目の原因を述べる。

Adams 法と Jefferson 法の場合，表3の配分量の列より，$d=S(a)$ を境界として配分量が1個だけジャンプする。従って，複数のプレイヤー（m 人とする）に対し同じ d の値でその配分量がジャンプする場合，その d の値を境界として，$\mathrm{Sum}(d)$ は m だけジャンプする。このジャンプの間に A があれば，複数個の解が求まる（複数個の解が求まるこのケースをタイプ2と呼んでおく）。

d を減少させる方法を説明する。d と P と S の位置関係（高々，左と右の

2）Hill 法の場合，$S(a)$ は無理数なので，d が有理数の時，この状況は起こらない。

2種類の場合がある）を図1に示す。d を減少させることにより，黒丸が右に移動する。表2の境界値が $\frac{P}{S(a)}$ である。d のよる配分が a の時（図1の左）は $\frac{P}{S(a)}$ の境界値まで d を減少させる。d のよる配分が $a+1$ の時（図1の右）は $\frac{P}{S(a+1)}$ の境界値まで d を減少させる。このように d を減少させ，$\frac{P}{d}$ を次の境界値まで移動させる[3)]。境界値においてのみ，Adams 法と Jefferson 法の配分量がジャンプし，他の方法の配分量は2つの値のどちらかをとる（Hill 法に関するこの状況に対しては次の段落で述べる（4H））。これらを dif に加え，$\mathrm{Sum}(d)+dif \geq A$ となった場合，dif のうち $\mathrm{Sum}(d)-A$ 個を該当するプレイヤーに配分すれば解が求まる。この段階でのみタイプ2の解が求められる。また，この境界値がタイプ1のものであるなら，タイプ1の解も求まる。$\mathrm{Sum}(d)+dif<A$ となった場合は元の d に戻し，アルゴリズム(2)へ戻る。



左：d による配分が a の場合
右：d による配分が $a+1$ の場合

図1. d を減少させる方法

最後に，前段で言及した Hill 法に関する点を述べる。(4H) の状況では d は無理数である。アルゴリズムのこの部分以外では d の取り得る値は有理数であるので（d の初期値は表3の3列にある通り有理数であり，増分 inc は1，

3）厳密には，d は減少せずに元の値のままの場合もある。

1/10，1/100と変化していくので，dの取り得る値は有理数である)，この(4H)の部分は重要である。

以上により，本稿で述べたアルゴリズムによって，有限回で，全ての解が求められる。

3．「整数による配分」プログラム

作成した「整数による配分」プログラムを起動したのが図2である。この図が示すようにグラフィカルなインターフェースを持つアプリケーションである。

「入力」タブに4人用のデータが入力できるようになっている。この図から容易に想像できるように，必要ならばプレイヤーの総数を変更し，配分すべき資源の総個数と各プレイヤーの要求量を入力し，各「？？法」タブで解の表示を行う。「まとめ」タブには各方法による解が全て列挙されている。この「整

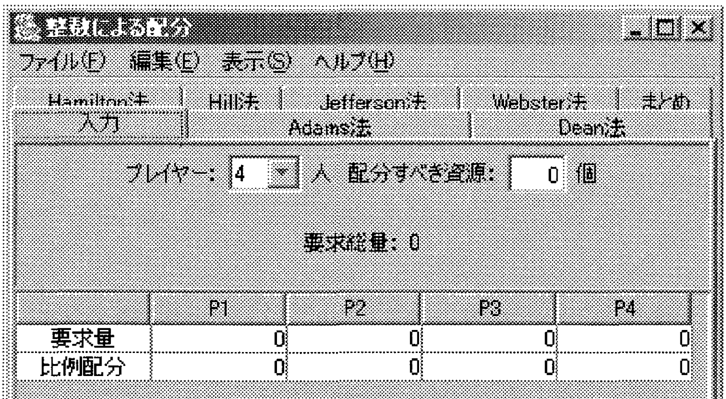


図2．「整数による配分」を起動したところ

数による配分」プログラムがどのように動作するかを見てみる。

表１の商品券の配分の例を解く。「入力」タブに以下のデータを入力する（図３参照)。

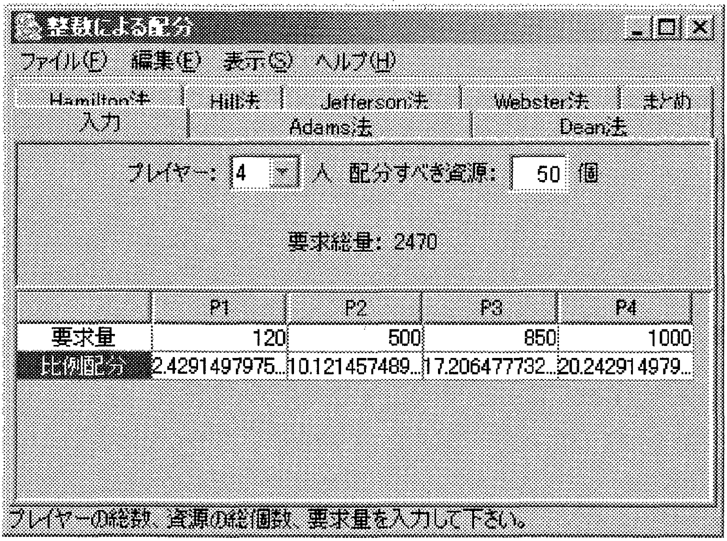


図３．「入力」タブにデータを入力

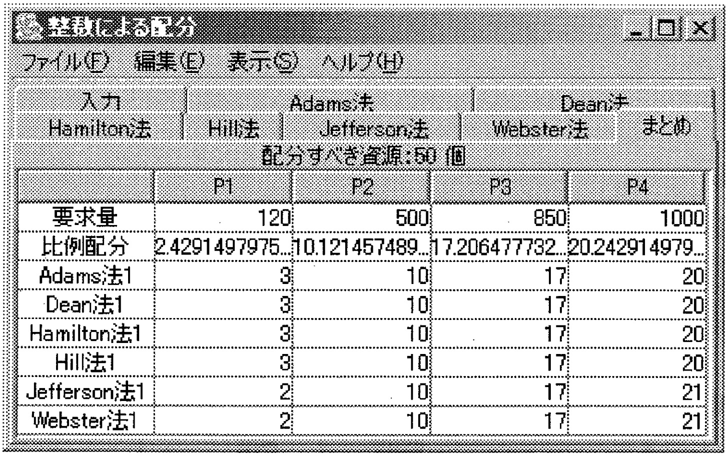
配分すべき資源：50

要求量（$P1$から順に）：120，500，850，1000

ここで注意することは「配分すべき資源」の隣にあるテキストフィールドとテーブル内の「要求量」の行には「０」から「９」までの数字しか入力できない点である。また，「比例配分」の行にはデータを入力できない。「要求総量」と「比例配分」は自動的に計算される。

各タブには，解とそれを与える d の値（必ずしも一意ではない)，表３の内容を確認するために必要な $S(a)$ の値が表示される。「まとめ」タブを図４に示す。

例えば，Hamilton 法によれば，50枚の商品券を，Ａ支社に３枚，Ｂ支社に



	P1	P2	P3	P4
要求量	120	500	850	1000
比例配分	2.4291497975...	10.121457489...	17.206477732...	20.242914979...
Adams法1	3	10	17	20
Dean法1	3	10	17	20
Hamilton法1	3	10	17	20
Hill法1	3	10	17	20
Jefferson法1	2	10	17	21
Webster法1	2	10	17	21

図4.「まとめ」タブの内容

10枚，C支社に17枚，D支社に20枚，配分することになる。さて，X社の準備できる商品券が1枚増えて51枚になった場合の解を求めたのが図5である。Hamilton 法を見ると，A支社に2枚，B支社に10枚，C支社に18枚，D支社

	P1	P2	P3	P4
要求量	120	500	850	1000
比例配分	2.4777327935...	10.323886639...	17.550607287...	20.647773279...
Adams法1	3	11	17	20
Adams法2	3	10	18	20
Adams法3	3	10	17	21
Dean法1	3	10	17	21
Hamilton法1	2	10	18	21
Hill法1	3	10	17	21
Jefferson法1	2	10	18	21
Webster法1	2	10	18	21

図5．51枚に1枚増えた場合

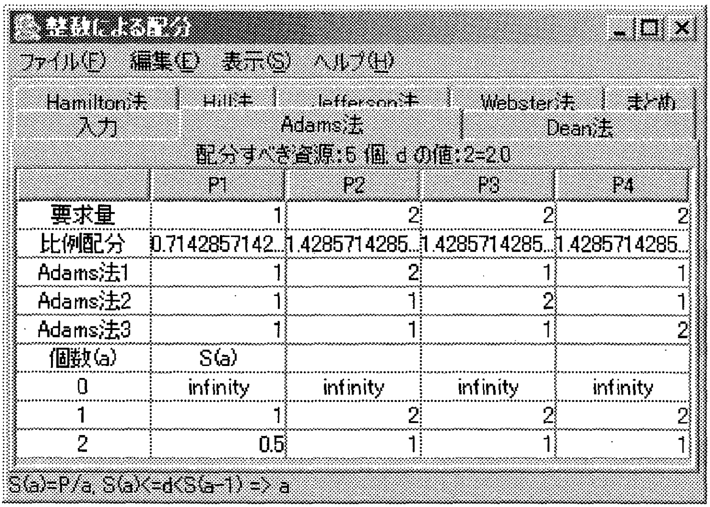
に21枚，配分することになる。商品券の総枚数が1枚増えたにもかかわらず，A支社の配分は3枚から2枚に減っている。Hamilton法は分かり易い配分方法であるが，このような欠点がある。

以上，表1の例を解いたが解は1つであった。次に，複数個の解が存在する問題を解き，前節で述べたタイプ1とタイプ2の状況がどのようなものかを観察する。問題は表4に与えられている。注意点はプレイヤー2と3と4の要求量が同じ2であることである。

表4．複数個の解がある例

A	5		
P_1	P_2	P_3	P_4
1	2	2	2

このデータを入力し，各配分法による解を求めた。Adams法による解は次の通りである。$S(a)$ の値に注意する。$d=2$ の時の配分は（1，1，1，1）であり，d が僅かでも減少すると，配分は（1，2，2，2）にジャンプする。従って，3通りの解が存在し，タイプ2の解である。



	P1	P2	P3	P4
要求量	1	2	2	2
比例配分	0.7142857142...	1.4285714285...	1.4285714285...	1.4285714285...
Adams法1	1	2	1	1
Adams法2	1	1	2	1
Adams法3	1	1	1	2
個数(a)	S(a)			
0	infinity	infinity	infinity	infinity
1	1	2	2	2
2	0.5	1	1	1

Dean 法による解は次の通りである。

整数による配分

ファイル(F) 編集(E) 表示(S) ヘルプ(H)

Hamilton法 | Hill法 | Jefferson法 | Webster法 | まとめ

入力 | Adams法 | Dean法

配分すべき資源:5 個, d の値:1+1/2=1.5

	P1	P2	P3	P4
要求量	1	2	2	2
比例配分	0.7142857142...	1.4285714285...	1.4285714285...	1.4285714285...
Dean法1	1	2	1	1
Dean法2	1	1	2	1
Dean法3	1	1	1	2
個数(a)	S(a)			
0	infinity	infinity	infinity	infinity
1	0.75	1.5	1.5	1.5
2	0.4166666666...	0.8333333333...	0.8333333333...	0.8333333333...

S(a)=P(2a+1)/2a(a+1), S(a)<d<S(a-1) => a, d=S(a) => a or a+1

$d=1.5$の時，プレイヤー1への配分は1，プレイヤー2から4への配分は1または2である。従って，上記の3通りの解があり，タイプ1の解である。

Hamilton 法による解は次の通りである。

整数による配分

ファイル(F) 編集(E) 表示(S) ヘルプ(H)

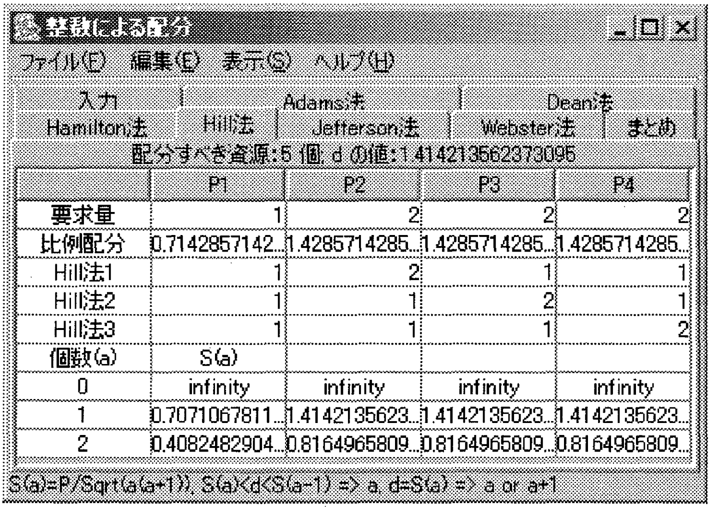
入力 | Adams法 | Dean法

Hamilton法 | Hill法 | Jefferson法 | Webster法 | まとめ

配分すべき資源:5 個

	P1	P2	P3	P4
要求量	1	2	2	2
比例配分	0.7142857142...	1.4285714285...	1.4285714285...	1.4285714285...
Hamilton法1	1	2	1	1
Hamilton法2	1	1	2	1
Hamilton法3	1	1	1	2
整数部分	0	1	1	1
小数部分	0.7142857142...	0.4285714285...	0.4285714285...	0.4285714285...

Hill 法による解は次の通りである。



	P1	P2	P3	P4
要求量	1	2	2	2
比例配分	0.7142857142...	1.4285714285...	1.4285714285...	1.4285714285...
Hill法1	1	2	1	1
Hill法2	1	1	2	1
Hill法3	1	1	1	2
個数(a)	S(a)			
0	infinity	infinity	infinity	infinity
1	0.7071067811...	1.4142135623...	1.4142135623...	1.4142135623...
2	0.4082482904...	0.8164965809...	0.8164965809...	0.8164965809...

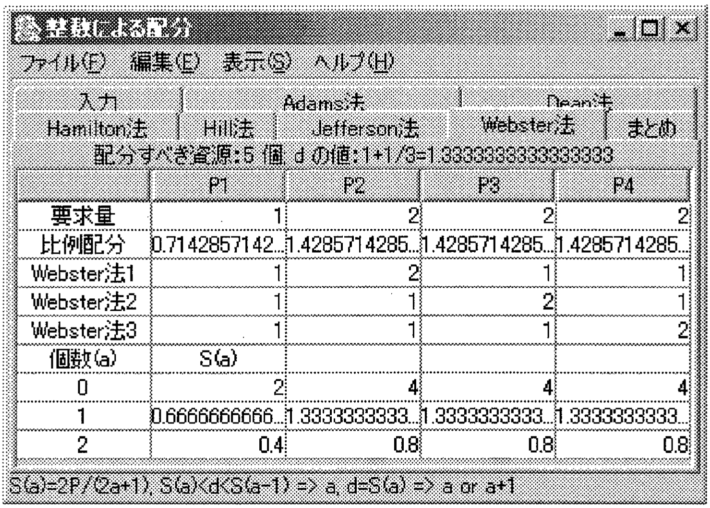
$S(a)$ の値により，タイプ 2 の解であること，d の値が1.4142…となっており，無理数であることが分かる（有理数ならば，その帯分数表示＝少数表示，と表示するようにプログラムしてある）。従って，前節の（4H）のところで述べた方法により求められた解である。

Jefferson 法による解は次の通りである。

$d=1$ の時，配分は（1，2，2，2）である。d が少しでも増えれば配分は（0，1，1，1）となる。従って，上記の 6 通りの解が得られる。これはタイプ 2 の解である。

	P1	P2	P3	P4
要求量	1	2	2	2
比例配分	0.7142857142...	1.4285714285...	1.4285714285...	1.4285714285...
Jefferson法1	1	2	1	1
Jefferson法2	1	1	2	1
Jefferson法3	0	2	2	1
Jefferson法4	1	1	1	2
Jefferson法5	0	2	1	2
Jefferson法6	0	1	2	2
個数(a)	S(a)			
0	1	2	2	2
1	0.5	1	1	1
2	0.3333333333...	0.6666666666...	0.6666666666...	0.6666666666...

Webster 法による解は次の通りであり，タイプ1の解である。



	P1	P2	P3	P4
要求量	1	2	2	2
比例配分	0.7142857142...	1.4285714285...	1.4285714285...	1.4285714285...
Webster法1	1	2	1	1
Webster法2	1	1	2	1
Webster法3	1	1	1	2
個数(a)	S(a)			
0	2	4	4	4
1	0.6666666666...	1.3333333333...	1.3333333333...	1.3333333333...
2	0.4	0.8	0.8	0.8

以上，簡単な例を通じてであるが，複数の解を持つタイプ1とタイプ2のケースが確認できた。

最後に，ユーザーインターフェースに関して留意した点を述べる。0の要求量は意味がないので，要求量が0であるプレイヤーが存在するにもかかわらず，「入力」以外のタブに移ろうとすると，図6のような「注意」が表示される。

図6．注　　意

「ヘルプ」メニューから「バージョン情報…」を選ぶと，図7のダイアログボックスが表示される。

図7．バージョン情報

4．補　　遺

この補遺において表3の3列の初期の値 d において $\mathrm{Sum}(d) > A$ であることを示す。d における各プレイヤーの配分を a_i（2つある場合は小さい方）とする。

Adams 法：

$$S(a_i) := \frac{P_i}{a_i} \leq d \text{ より } \mathrm{Sum}(d) = \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n} P_i = 2A > A \text{ となる。}$$

Dean 法：

$$S(a_i) := \frac{P_i(2a_i+1)}{2a_i(a_i+1)} \leq d \text{ より}$$

$$\mathrm{Sum}(d) = \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n} P_i \left(1 - \frac{1}{2(a_i+1)}\right) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{n} P_i = A \text{ となる。}$$

Hill 法，Jefferson 法，Webster 法においても，$\dfrac{aS(a)}{P} > \dfrac{1}{2}$ であることに注意すると，同様に証明できる。

5．おわりに

本稿では授業を補助するプログラム「整数による配分」を紹介した。特に，複数個の解が存在する時に，全ての解を求めることができるのが，このプログラムの特徴である。複雑な処理を計算機に任せたため，われわれユーザーは，本来の目的である，どの解を現在の状況に適用すべきか？　等の，得られた解に注意を集中することができる。

参考文献

[1] H. Peyton Young: Equity-In Theory and Practice, Princeton University Press, 1995.

[2] ミッシェル・マニング著／玉川竜司訳「JBuilder で学ぶ Java」プレンティスホール，1998。

[3] 掌田津耶乃「JBuilder ではじめる Java プログラミング入門」秀和システム，2001。

[4] Mary Campione, Kathy Walrath, Alison Huml: The Java Tutorial, Third Edition-A Short Course on the Basics. Addison Wesley, 2001.

[5] Kathy Walrath, Mary Campione: The JFC Swing Tutorial-A Guide to Constructing GUIs. Addison Wesley, 2000.

[6] Campione, Walrath, Huml, Tutorial Team: The Java Tutorial Continued-The Rest of the JDK. Addison Wesley, 1998.