シュタッケルベルク均衡をアニメーションで見る
—— MATHEMATICA, HTML および JavaScript を用いて ——

小樽商科大学商学部経済学科
鵜　沢　　　秀*

0. はじめに

複占理論（Oligopoly theory）についてグラフ表示を用いることはあっても（Friedman [1983]），アニメーションを用いて学生に教える試みはこれまでほとんどなされてこなかった。クールノー均衡について著者はこれまで画像やアニメーションを用いていくつかの試みをしてきた（鵜沢 [1998], [2000a, b, c], [2001]）。

この論文では，企業1が先導者で企業2が追随者である場合のシュタッケルベルク均衡についてアニメーションを利用して説明しようとするものである。本論文の構成は以下のとおりである。

第1節では，シュタッケルベルク・モデルの設定をまず行う。次に，MATHEMATICA 4.0ないし4.1を用いて作成した，企業1と企業2の3次元表示による利潤曲面を提示する。第2節でシュタッケルベルク均衡を求める。最初に企業2の3次元表示の反応曲線を表示する。次に，企業1の利潤曲面の

* この論文の一部は平成14年6月15日小樽商科大学にて開催された『日本経済学会2002年度春季大会』「産業組織論：（空間的）数量競争」のセッションで報告されたものである。討論者の西條辰義教授（大阪大学社会経済研究所）と座長の清野一治教授（早稲田大学）のコメントに感謝する。残された誤りはすべて筆者の責任である。また，この論文で用いられている画像を作成する過程で2000年度教育研究経費（学長裁量経費）「シミュレーションによる金融および産業組織モデルの分析」（主査：和田良介，鵜沢秀，奥田和重，加地太一）および2001年度教育改善推進費（学長裁量経費）「経済学教育改善プロジェクト」（代表者：船津秀樹，および経済学科教官全員）の援助を得たことを記して感謝する。

うち，企業2の反応曲線を含む垂直平面（これを反応曲面と呼ぶ）で切断された画像を求め，企業1の最大利潤をもたらすシュタッケルベルク均衡を表示する。第3節では，シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡の比較をいろいろな視点からのアニメーションを用いて行う。結語は第4節にまとめてある。

付録にアニメーションを作成する場合の手順，掲載した図を描く MATHEMATICA プログラムの一部，画像をコマ送りする JavaScript と HTML のリストの一部を掲載した。

なお，本文で述べたアニメーションのほとんどは，配色などが異なるものもあるが，鵜沢の Web ページ「寡占島の2つの記念碑をアニメーションで見よう　クールノー均衡とシュタッケルベルク均衡」に掲載してある。Web ページの URL は以下のとおりである：

http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/mathanim.html （日本語版）
http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/mathanim-e.html （英語版）

1．シュタッケルベルク・モデル

1．1　費用と需要曲線に関する仮定

いま，同一品質の生産物（同質財）を生産する2つの企業をそれぞれ，企業1および企業2と呼ぼう。議論を簡単にするために，費用関数は，2つの企業にとって同一であり，

$$C_1(q_1) = q_1$$
$$C_2(q_2) = q_2$$

とする。

また，この産業への逆需要関数（需要曲線）を

$$p = 25 - (q_1 + q_2)$$

とする。ここで，q_1，q_2は，それぞれ企業1と企業2の生産量を示し，p は，

生産物1単位の市場価格である。

利潤（profit）は，収入－費用なので，企業1の利潤 $\pi_1(q_1, q_2)$ と企業2の利潤 $\pi_2(q_1, q_2)$ は，
それぞれ

$$\pi_1(q_1, q_2) = pq_1 - C_1(q_1)$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = pq_2 - C_2(q_2)$$

より，

$$\pi_1(q_1, q_2) = \{24 - (q_1 + q_2)\}\, q_1$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = \{24 - (q_1 + q_2)\}\, q_2$$

となる。

1．2　企業1と企業2の利潤曲面を見る

企業1および企業2の利潤（profit）はそれぞれ企業1の生産量（q_1）と企業2の生産量（q_2）に依存しているので，それぞれの利潤曲面は（$q_1 - q_2 -$ profit）の3次元空間に描かれることになる。

最初に，企業1の利潤曲面をMATHEMATICAで描いた画像を掲載する（付録2に図1，2および8を描くためのMATHEMATICAプログラムを掲載した。MATHEMATICAプログラムについてはHuang and Crooke [1997]，鵜沢 [2000a,b]，Wolfram [1999] などを参照せよ）。ただし，負の利潤をもたらす生産量の組み合わせは表示していないことに注意しよう。これが本質的な制約ではないことは2つの企業ともゼロ生産をすることにより最低ゼロ利潤を実現できるからである。

図1の企業1の利潤曲面は，黄緑，黄色，赤，紫，青のグラデーションに応じて利潤額は減少している。

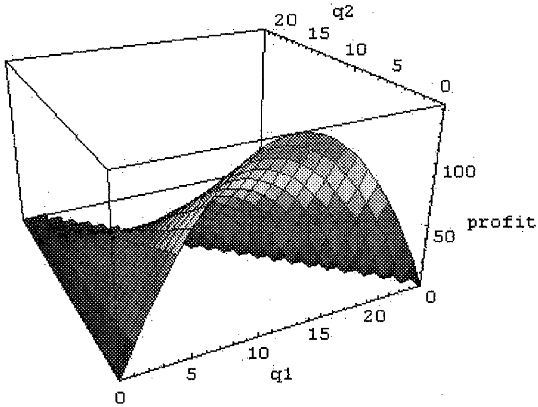

図1 利潤額を色に反映させた企業1の利潤曲面

また，図2には利潤額に応じて色合いをより細かく表示した場合の企業1の利潤曲面が描かれている。この図形は，付録2にあるMATHEMATICAのプログラムを見てもらうとわかるように，利潤額に応じて色を変えた，企業1の等利潤線（企業1に同じ利潤をもたらす企業1の生産量と企業2の生産量の組み合わせを示す曲線）145本から成っている。

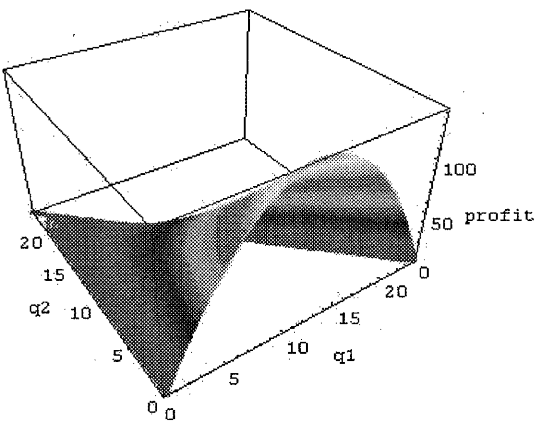

図2 利潤額に応じて色を変えて描いた企業1の利潤曲面

企業2の生産量が与えられたとき，企業1の利潤はどれだけ得られるかを示せるように企業2の生産量に応じて達成可能な企業1の利潤をグラフで描くと，図3ないし4が得られる。図3および4は，企業2の生産量水準（q_2）で切断した企業1の利潤曲面の切り口を色を変えて表現している。すなわち，企業2の生産量がゼロから24に増加するとき，赤，黄色，緑，青，紫，マゼンタで表示した。

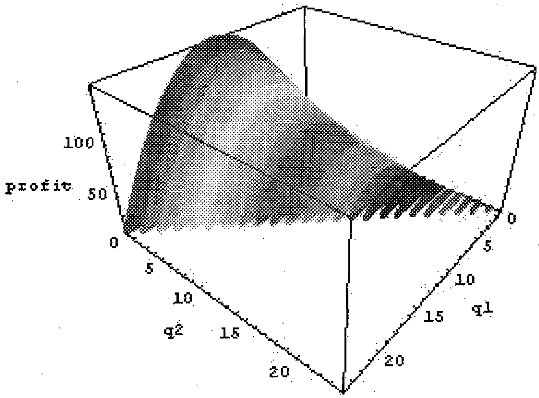

図3　企業2の生産量に応じて表示色を変えた企業1の利潤曲面

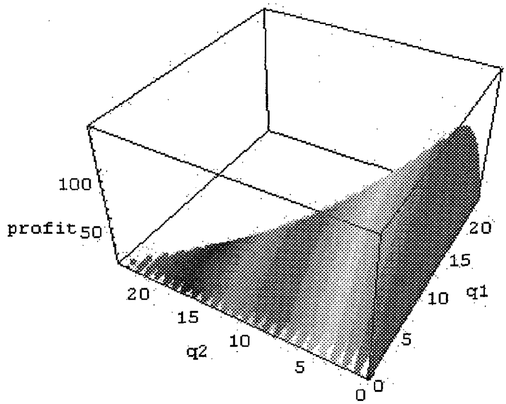

図4　図3を別の角度（左奥）から見た企業1の利潤曲面

図5には企業1の利潤曲面の上に企業1の反応曲線が黒い太線で描かれている。

同様に，企業2の利潤曲面を描こう。図6において，青い太線は企業2の反応曲線を示している。反応曲線の求め方は次節で行う。

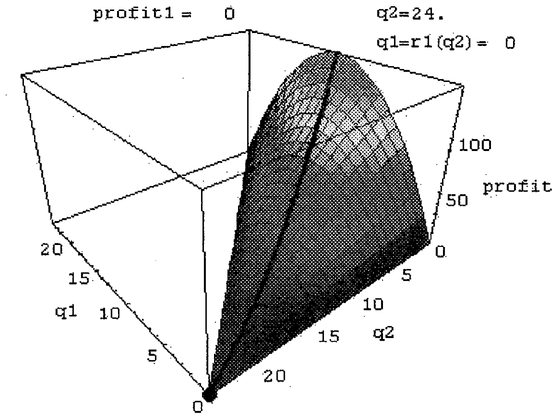

図5　企業1の利潤曲面と3次元における反応曲線

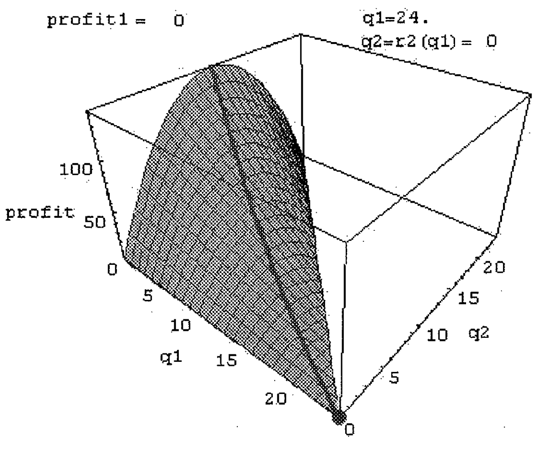

図6　企業2の利潤曲面と3次元における反応曲線

1．3　シュタッケルベルク・モデルを展開型ゲームで表現する

企業1が最初に生産量 q_1 を生産し，企業2はこのことを知ってから生産量 q_2 を生産する，いわゆる，2段階ゲームを考えよう。シュタッケルベルクの言葉でいえば，企業1が先導者で企業2が追随者の場合である。

2．シュタッケルベルク均衡（部分ゲーム完全均衡）を求める

後ろ向き帰納法，あるいは，後方からの帰納法（backward induction）を用いて部分ゲーム完全均衡，すなわち，シュタッケルベルク均衡を求めよう。最初に第2段階の解を求め，次にこの結果を用いて第1段階の解を求める。

2．1　第2段階の解——企業2の反応曲線を求める

企業1の任意の生産量 q_1 に対して，企業2の利潤を最大にする企業2の生産量を求めよう。企業2の利潤曲面（黄緑色）を企業1の生産量水準を通り，(q_1-q_2) 平面に垂直な平面で切断した切り口（ピンク色）の中で最大の利潤をもたらす生産量が企業2の最適点（best response point）である。図7には最適反応点（これは青い丸印で描かれている）の軌跡は青い太線で途中まで描かれている。

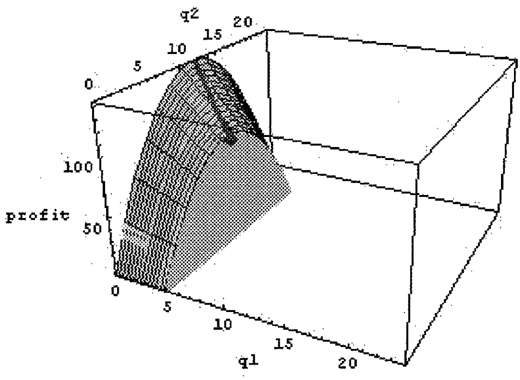

図7　企業2の利潤曲面を企業1の生産量水準で切断した切り口と最適反応点

図8に描かれている24枚の図には，$q_1=0$から$q_1=23$までの24通りの場合が描かれている。この図を元にアニメーションを作成することができる。また，図8の各パネルには，企業1の生産量を示す平面（赤紫色），企業1の生産量q_1，企業2の最適生産量$q_2=r_2(q_1)$，そのときの企業2の利潤（profit）の大きさも表示されている。このようにして得られた反応曲線を図9に示す。

アニメーションで見れば，企業2の最適点の動きを見ることができる[1)]。最適点（$q_1, q_2=r_2(q_1)$，$\pi_2(q_1, q_2=r_2(q_1))$）の軌跡が企業2の3次元における反応曲線である[2)]。画像を真上から見れば，教科書でおなじみの反応曲線を確かめることができる。

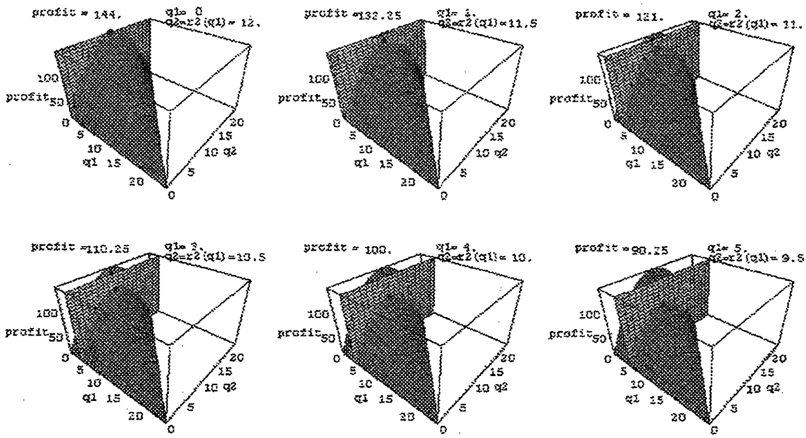

図8　企業2の反応曲線を求めるアニメーションの元図

1）ほぼ同様のアニメーションは，次のURLにアクセスすると見ることができる。
http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/reactionTwo-c114(176-200)jpg.html
http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/00_144reactionTwo-s103e(18-42)jpg.html
http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/reactionTwo-s113a(60-83)jpg.html

2）企業2の利潤は$\pi_2(q_1, q_2)=\{24-(q_1+q_2)\}q_2$であるので，変形すると，$\pi_2(q_1, q_2)=-\{q_2-(24-q_1)/2\}^2+\{(24-q_1)/2\}^2$となる。企業2はその生産量を$q_2=(24-$

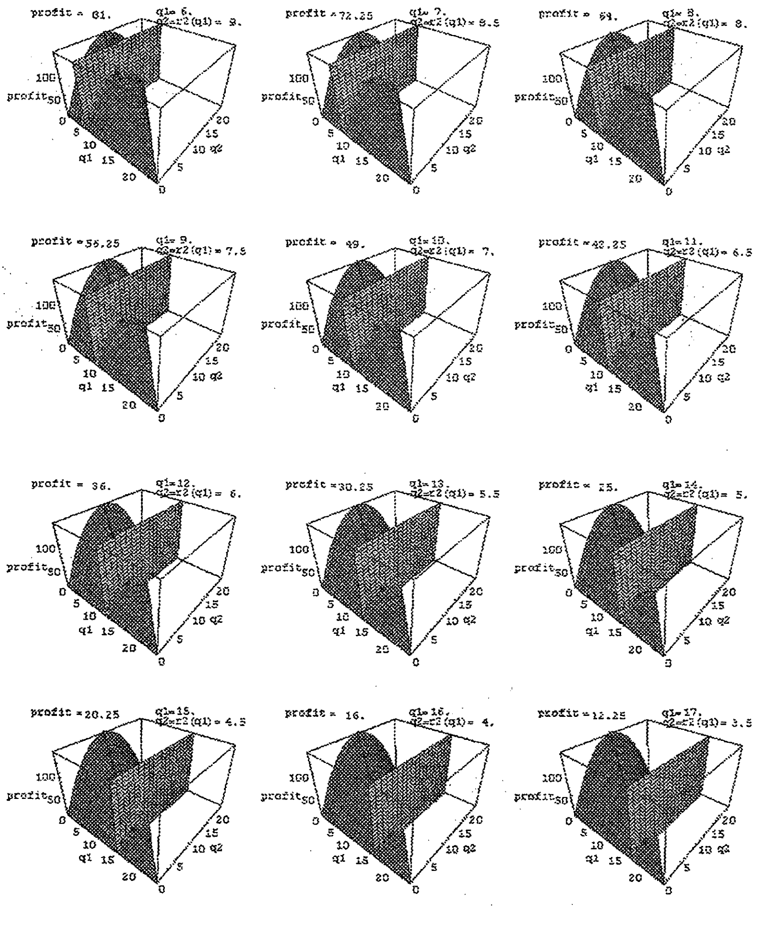

図8　企業2の反応曲線を求めるアニメーションの元図（続き）

---

q_1)/2とすれば，企業2の利潤は最大となる。したがって，企業2の反応関数は$q_2 = r2(q_1) = (24 - q_1)/2$となる。この関数の2次元グラフが反応曲線である。

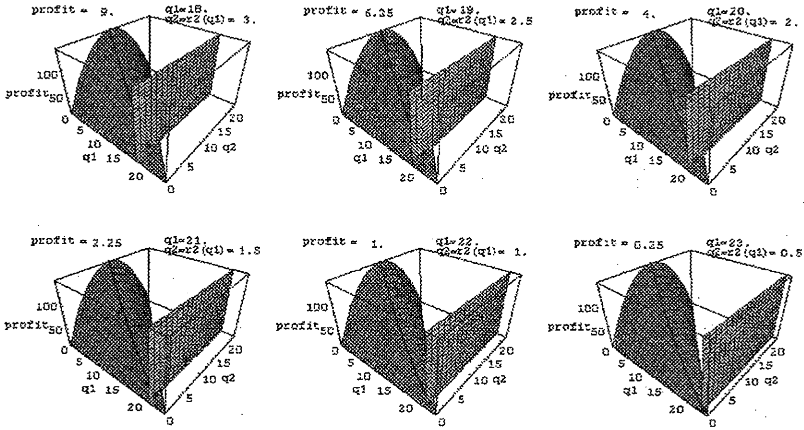

図8　企業2の反応曲線を求めるアニメーションの元図（続き）

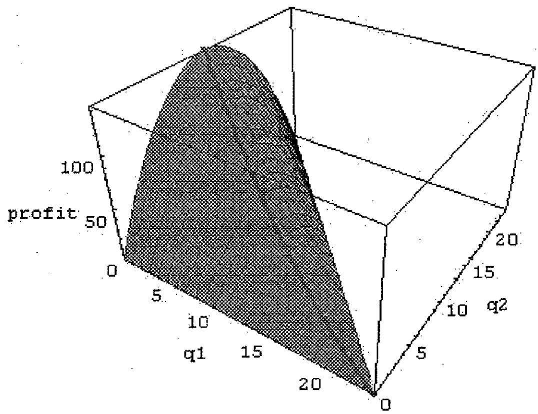

図9　企業2の3次元における反応曲線（青い太線）

図10は，図9に描かれている，企業2の3次元における反応曲線（青い太線）を含む，(q_1-q_2) 平面に垂直な平面（空色）を描いたものである。この平面を企業2の「反応曲面」と呼ぶことにする。

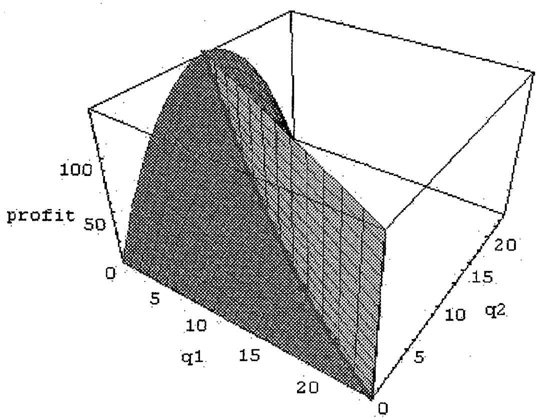

図10　企業２の反応曲線を含む，$(q_1 - q_2)$ 平面に垂直な「反応曲面」

企業２の（反応曲線を含む）反応曲面だけを描いたものが次の図11である[3)]。脚注２より企業１の生産量が増加すると企業２の最適生産量は減少することが示されたが，図11からも確かめられる。同様に，青い太線で示された３次元に

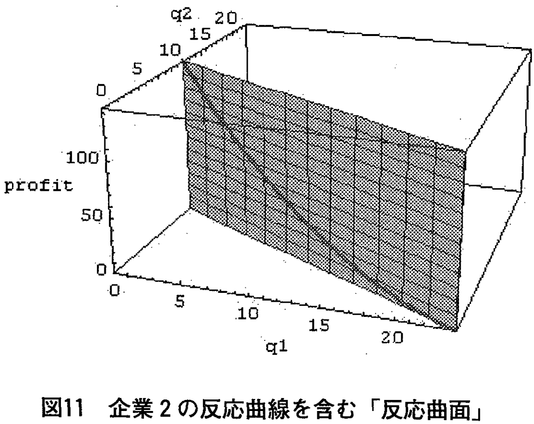

図11　企業２の反応曲線を含む「反応曲面」

３）企業２の利潤曲面，反応曲線および反応曲面を集めたWebページは以下のURLにある。
http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/00_144reactionTwo-st103d(162-164;170-174)jpg.html

おける企業2の反応曲線に注目すれば，企業1の生産量が増加すると企業2の最適な利潤は減少することがわかる（図10からも読み取ることができる)。

2．2　第1段階の解——企業1の最適生産量を求める（シュタッケルベルク均衡）

企業1の最適生産量を求めるには次のようにすればよい。企業1は企業2がその反応曲線に従って企業2にとって最適な生産量を決定することを知っているので，企業2の反応曲面と企業1の利潤曲面との切断面の中で，企業1に最大の利潤をもたらす生産量を求めればよい。このとき企業2は企業2の反応曲線上の生産量を選ぶことで利潤は最大になっている。すなわち，この点は部分ゲーム完全均衡（subgame perfect equilibrium)，すなわち，企業1が先導者で企業2が追随者の場合のシュタッケルベルク均衡である[4)]。

図12は，企業2の反応曲線（青い太線)，企業2の反応曲面（空色）と企業1の利潤曲面（黄色，赤，青のグラデーション）を同時に描いたものである。図13から15までにシュタッケルベルク均衡を求める途中経過が描かれている。すなわち，図12から企業2の利潤曲面を削除すると図13が求められる。企業1の利潤曲面のうち，企業2の反応曲面で切断された部分があるが，その部分を強調して赤い色で示そう（図14)。ここでは企業1の利潤曲面は白い色で示している。この赤い部分の中で最大の利潤を求めたものを図15に示した。なお，シュタッケルベルク均衡は青い丸印で描かれている。

4）脚注2より，企業2の反応関数は $q_2=r_2(q_1)=(24-q_1)/2$ である。この式を企業1の利潤関数 $\pi_1(q_1, q_2)=\{24-(q_1+q_2)\}\ q_1$ に代入して変形すると，$\pi_1(q_1, r_2(q_1))=-(1/2)(q_1-12)^2+72$ となる。したがって，企業1は $q_1=12$ で利潤を最大にし，企業2は $q_2=r_2(12)=(24-12)/2=6$ で利潤を最大にする。すなわち，企業1を先導者，企業2を追随者とするシュタッケルベルク均衡が達成される。このときの利潤額は $\pi_1(12,6)=\{24-(12+6)\}\times 12=72$ および，$\pi_2(12,6)=\{24-(12+6)\}\times 6=36$ となる。

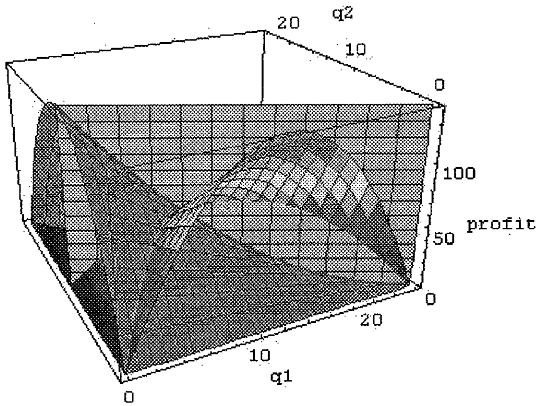

図12　企業１の利潤曲面，企業２の利潤曲面と企業２の反応曲面

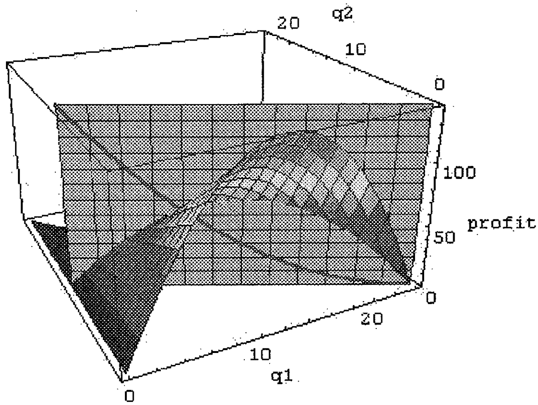

図13　企業１の利潤曲面と企業２の反応曲面
(図12から企業２の利潤曲面を削除)

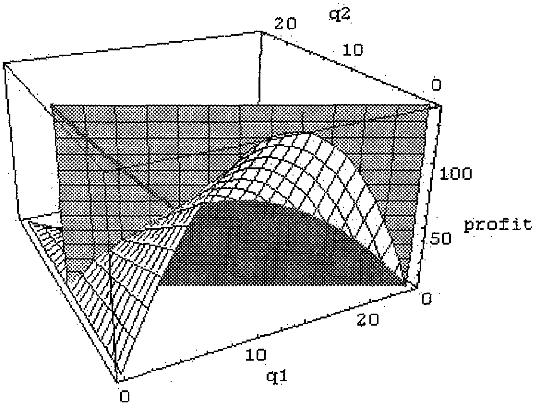

図14　企業１の利潤曲面と企業２の反応曲面の共通部分（赤色）
（図13から企業１の利潤曲面を白色にする）

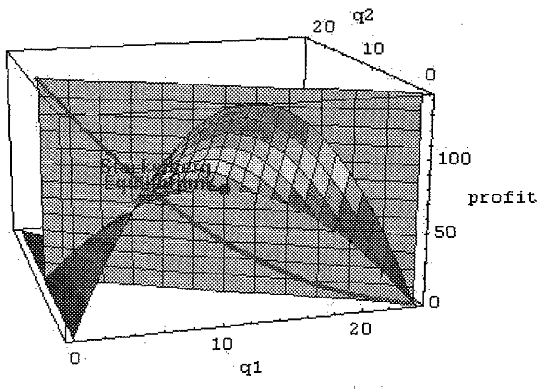

図15　シュタッケルベルク均衡

別の視点でシュタッケルベルク均衡を見てみよう。企業１の利潤曲面を企業２の反応曲面で切断した切り口（赤色）を図16に表示しよう。この赤い領域の中で最大の利潤をもたらす企業１の生産量とそれに対応した，企業２の反応曲線上の生産量が部分ゲーム完全均衡（企業１が先導者で，企業２が追随者の場合のシュタッケルベルク均衡）となる。

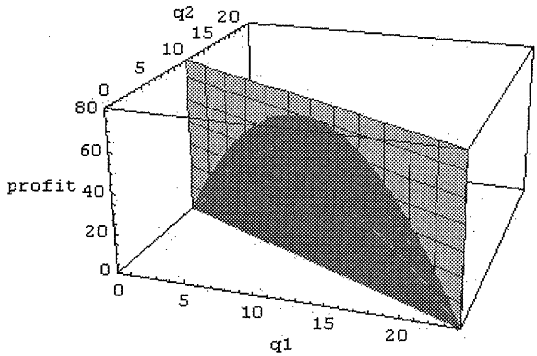

図16　企業１の利潤曲面と企業２の反応曲面の共通部分（赤色）

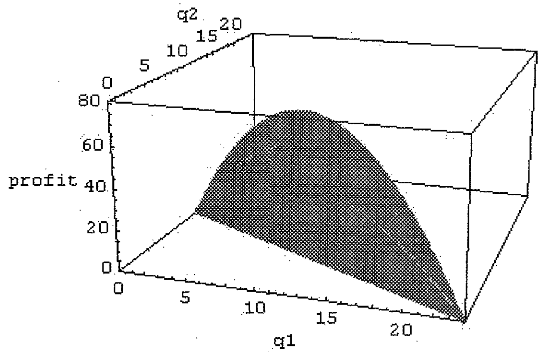

図17　企業１の利潤曲面を企業２の反応曲面で切断した断面図

以下にその画像の一部[5)] を掲載する。図18には企業１の利潤水準が40のときを描いている。図19には企業１の利潤が72で最大になっていることが示されている。また，図20には企業１の利潤を最大にするときの企業１の生産量12と企業２の生産量６が示されている。

5）ほぼ同様のアニメーションは，次の URL にアクセスすると見ることができる。 http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/findStackelbergOne-s113a（142-179）jpg.html

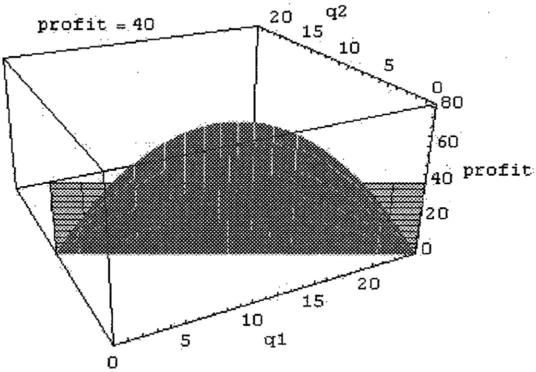

図18　企業2の反応曲面を考慮したときに可能な企業1の利潤水準

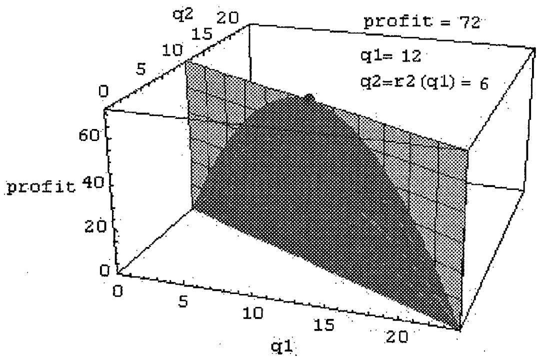

図19　企業2の最大利潤を達成する

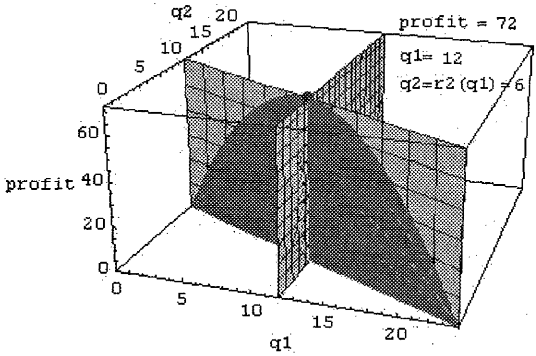

図20　企業1の最適生産量がわかるように補助平面（薄緑色）を描く

3．シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡[6] の比較

3．1　シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡の生産量水準の違いを見る

図21には，企業1の利潤曲面（黄色から赤，紫へと利潤水準が下がっていく），企業2の利潤曲面（黄緑色）が同時に描かれている。図22には，図21に企業2の反応曲面（空色）を追加した図を掲載した。

6）クールノー均衡は，2つの企業の反応曲線の交点として求められる。企業2の反応関数と同様にして，企業1の反応関数を求めると $q_1=r_1(q_2)=(24-q_2)/2$ が得られる。脚注2で得られた企業2の反応関数は $q_2=r_2(q_1)=(24-q_1)/2$ であるので，この2式を同時に満たす生産量がクールノー均衡である。すなわち，$q_1=q_2=24/3=8$ となる。また，そのときの利潤は，ともに等しく，$\pi_1(8,8)=\pi_2(8,8)=\{24-(8+8)\}\times 8=64$ である。

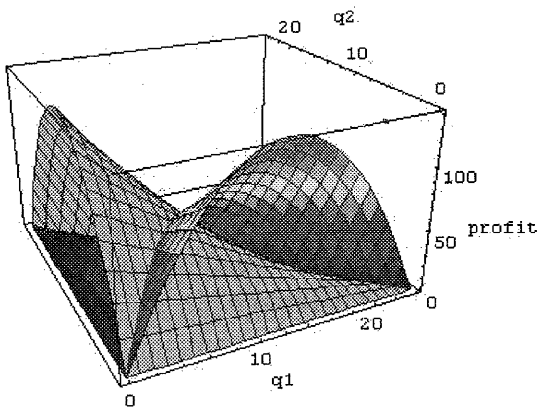

図21 企業1の利潤曲線と企業2の利潤曲線を同時に表示

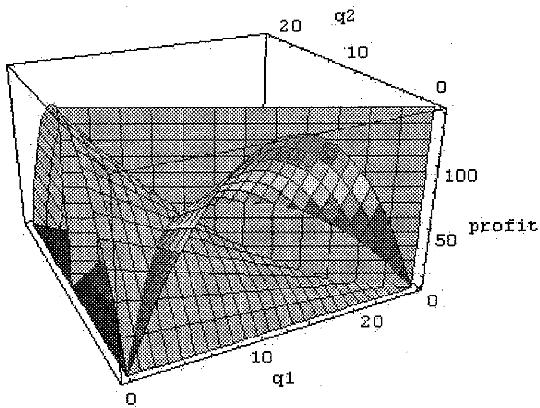

図22 図21に企業2の反応曲面（空色）を追加表示

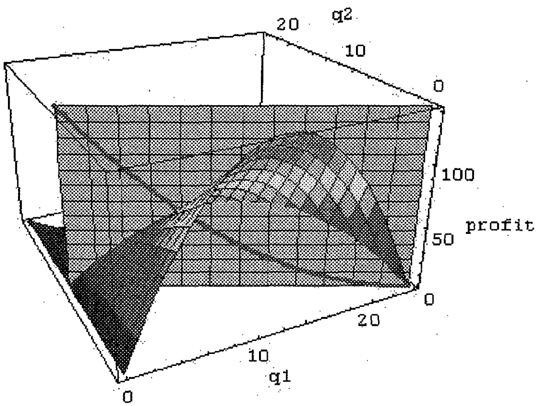

図23　図22から企業２の利潤曲面を削除

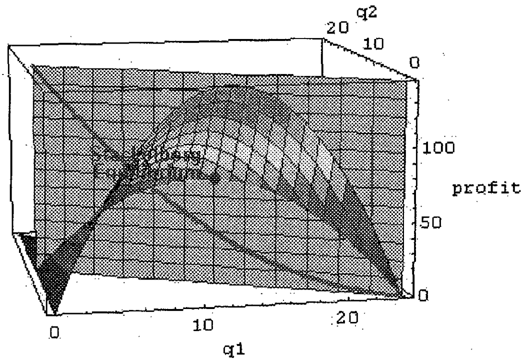

図24　企業１のシュタッケルベルク均衡を表示

図23には，図22から企業２の利潤曲面を削除した図を描いている。また，図24には，企業１の利潤最大をもたらす，シュタッケルベルク均衡（青い丸印）を表示した。

図25は図24を別の角度から見た画像である。企業１の反応曲線は赤茶色の太線で描かれている。また，企業２の反応曲線は青の太線で描かれている。２つ

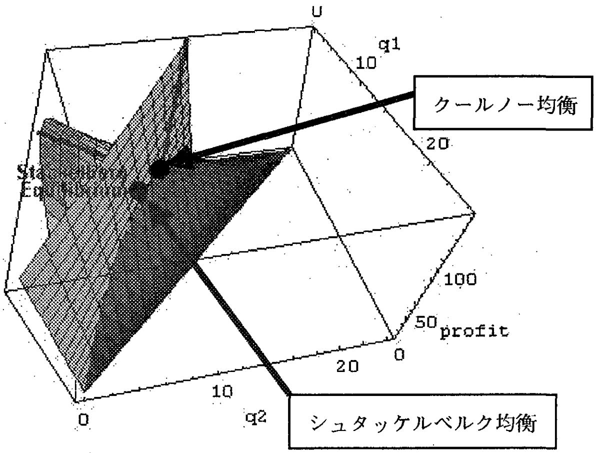

図25　図24を右後方から見た場合

の反応曲線の交点（黒い丸印）がクールノー均衡であることとシュタッケルベルク均衡が青い丸印で示されていることを考慮すれば，２つの均衡の比較を行うことは容易である。

図26および27からシュタッケルベルク均衡とクールノー均衡の関係を見てみよう。企業１の利潤曲面は黄色，赤，紫のグラデーションで表示され，企業２の利潤曲面は黄緑色で表示されている。また，企業１の反応曲線は赤い太線，企業２の反応曲線は青い太線で表示されている。図26には明確に表示されていないが，この２つの曲線の交点がクールノー均衡を示している（図27には明確に描かれている)。企業１にとってはクールノー均衡のときよりもシュタッケルベルク均衡の時のほうがより多い利潤を獲得できる。しかし，企業２にとっては逆に，クールノー均衡のときよりもシュタッケルベルク均衡の時のほうがより少ない利潤になっている（シュタッケルベルク均衡（Stackelberg Equilibrium）を示す青い丸印から垂線を下ろし，それが企業２の利潤曲面と交差する点，すなわち，企業２の反応曲線を示す青い太線との交点（オレンジ色の丸印）が示す利潤水準は明らかにクールノー均衡のときの利潤より少ない)。

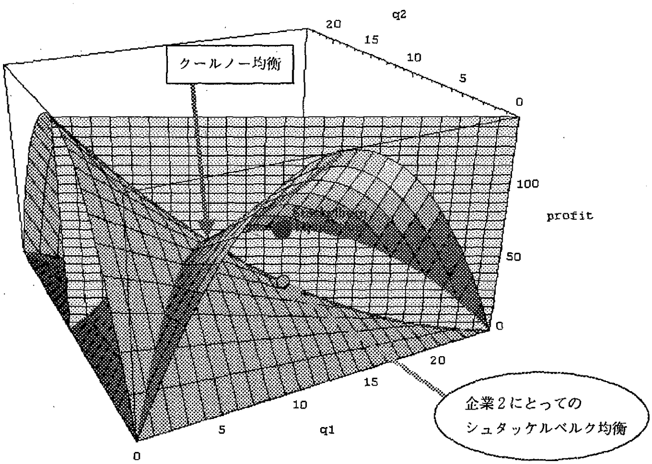

図26　企業1の利潤を最大にするシュタッケルベルク均衡を表示する――企業2の利潤曲面（黄緑色），企業2の反応曲線（青い太線），企業2の反応曲面（空色），企業1の利潤曲面（黄色，赤，紫のグラデーション），および，企業1の反応曲線（赤い太線）

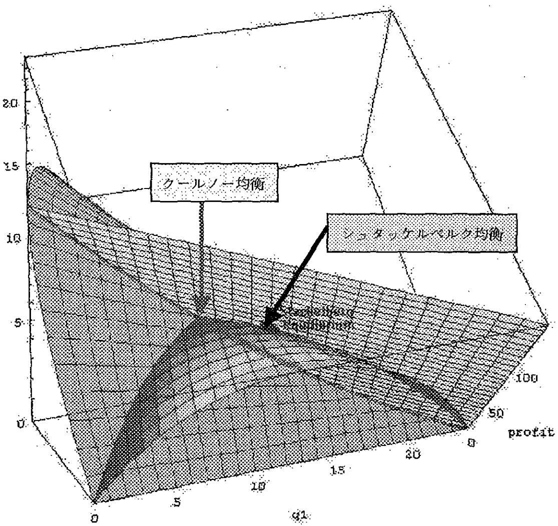

図27　図26を上方から見た図

図28は，図26あるいは27をほぼ真上から見た図である。企業1の反応曲線は赤い太線，企業2の反応曲線は青い太線で描かれている。クールノー均衡は黒い丸印で示され，シュタッケルベルク均衡は青い丸印で示されている。ただし，企業1の等利潤線を補って表示してある。クールノー均衡を通る黄色の線は企業1の利潤64に対応し，シュタッケルベルク均衡を通る赤褐色の線は企業1の利潤72に対応している。

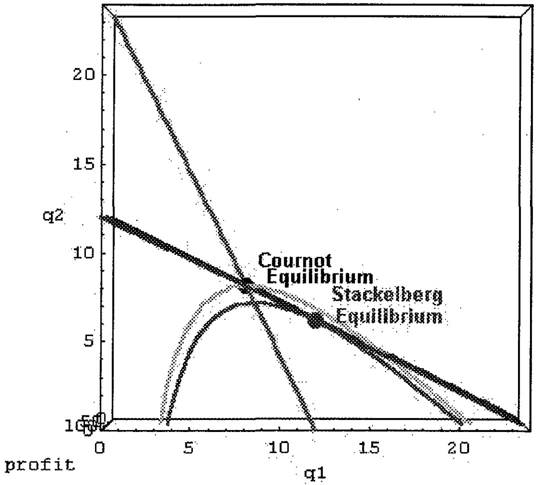

図28　シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡（2つの反応曲線の交点）

図29は，別の視点からシュタッケルベルク均衡（青い丸印）を見たものである。企業1の利潤曲面（黄色，赤，青のグラデーション），企業2の反応曲線（青い太線）は企業1の利潤水準72を通る等利潤線（青色）に接している。また，赤い太線は企業1の反応曲線，茶色い太線は企業1の利潤水準64（クールノー均衡（黒丸印）の時の利潤水準）を通る等利潤線である。

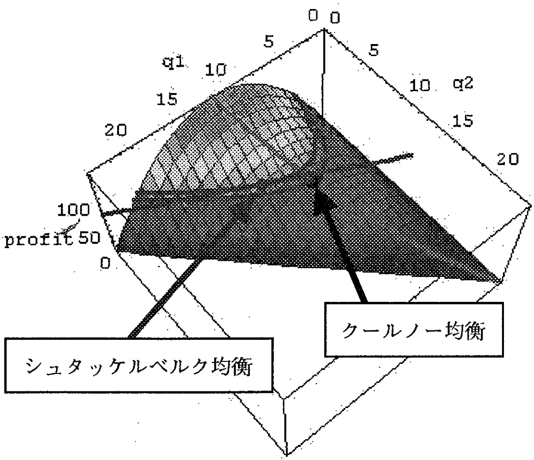

図29　別の角度から見たシュタッケルベルク均衡とクールノー均衡

3．2　シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡の利潤水準の違いを見る

図30から34は，企業1の利潤水準を0（ゼロ）から144まで次第に上げていく画像の一部を掲載したものである。企業1の利潤曲面は黄色，赤，青へのグラデーション，企業2の反応曲面は空色で表示されている。シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡を寡占島（Oligopoly Island）の2つの記念碑と呼ぶことにし，利潤水準を海水面とここでは呼ぶことにする。

アニメーションで見ると企業1のシュタッケルベルク均衡とクールノー均衡の利潤水準の違いを見て取れる[7]。

7）本文と配色や表現が異なるが類似のアニメーションは，次のURLにアクセスすると見ることができる。
http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/floodOne-c114(522-594) jpg.html

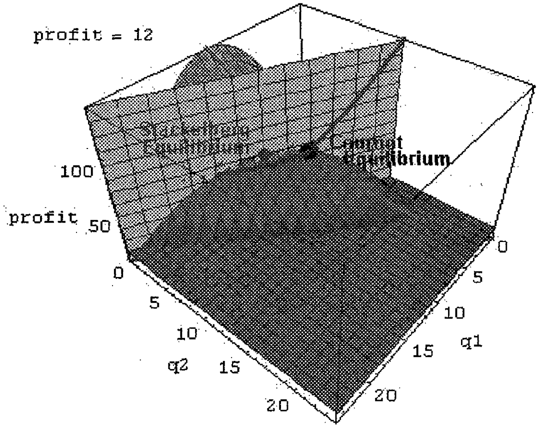

図30 海水面（利潤水準）が12のときの寡占島の2つの記念碑

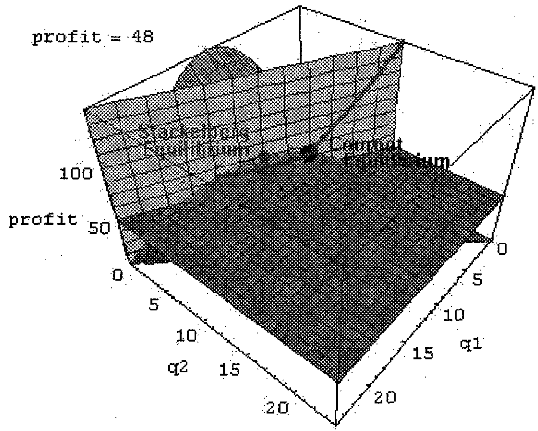

図31 海水面（利潤水準）が48のときの寡占島の2つの記念碑

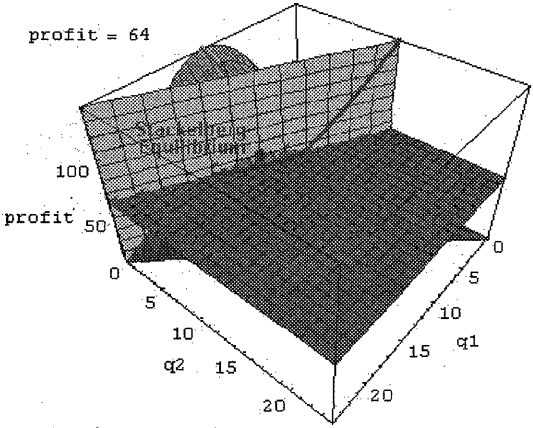

図32　海水面（利潤水準）が64のときクールノー均衡の記念碑は水没!!

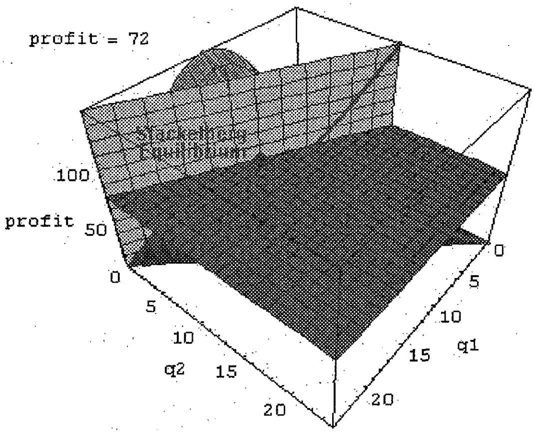

図33　海水面（利潤水準）が72のときシュタッケルベルク均衡の記念碑も水没!!

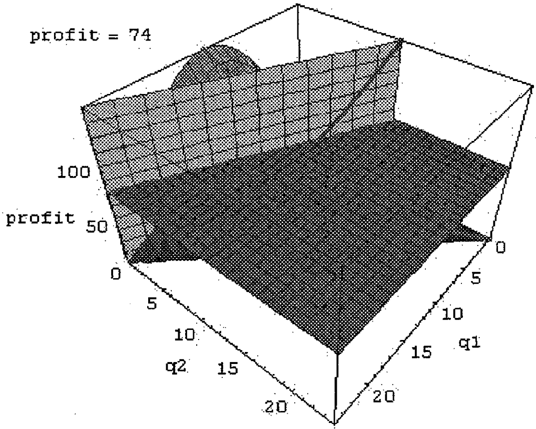

図34　海水面（利潤水準）が74のとき２つの記念碑は完全に水没!!

さらに，別の視点から企業１のクールノー均衡とシュタッケルベルク均衡の利潤水準の違いを見てみよう。図35から38は，企業１の利潤水準を144から次第に下げていく画像の一部を掲載したものである。企業１の利潤曲面は赤色，企業２の反応曲面は黄色で表示されている。図には利潤水準で切断された下方部分を表示してある。

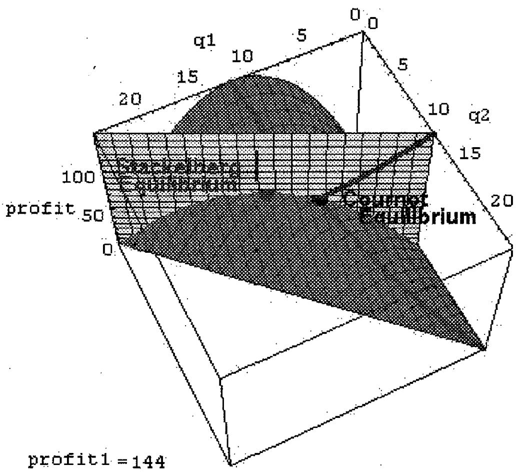

図35　シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡の利潤水準を比べる
（利潤水準144で切断した図）

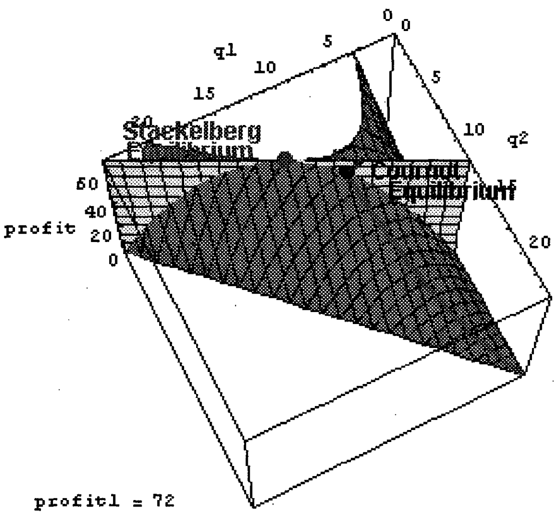

図36　シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡の利潤水準を比べる（利潤水準72で切断した図）

図36には企業１の利潤水準が72以下の部分を表示している。企業１にとってのシュタッケルベルク均衡が表示されるぎりぎりの利潤水準であるが，クールノー均衡はまだ十分表示されている。すなわち，企業１にとってはシュタッケルベルク均衡のときのほうがクールノー均衡のときよりも利潤が多いことがわかる。このことは図37を見れば納得できる。このとき企業１の利潤水準は64であるが，もはやシュタッケルベルク均衡は画面視野に入ってこない。図38は企業１の利潤水準が40の時を描いている。シュタッケルベルク均衡はもちろん，クールノー均衡も画面視野から消えている。

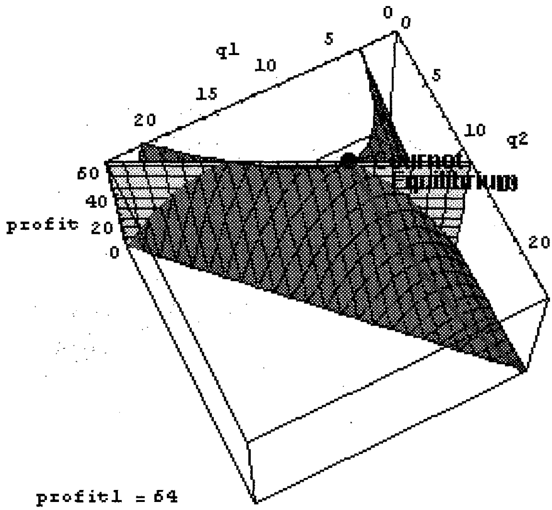

図37 シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡の場合の利潤水準を比べる
(利潤水準64で切断した図)

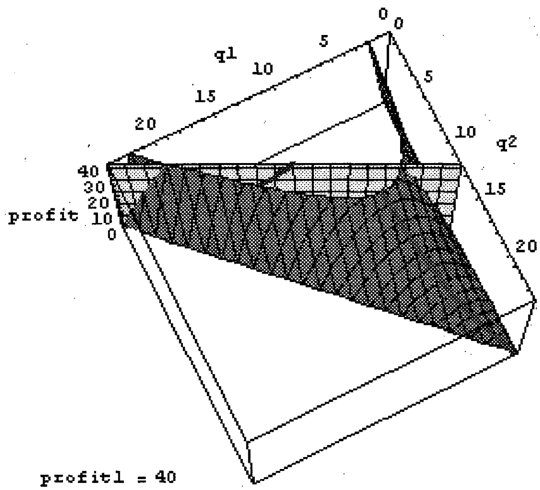

図38 シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡の利潤水準を比べる
(利潤水準40で切断した図)

図36と37をほぼ真上から見た図が図39と40である。ただし，企業1の利潤水準に応じて配色を変えている。ピンク色から空色に向かって利潤額が増加している。

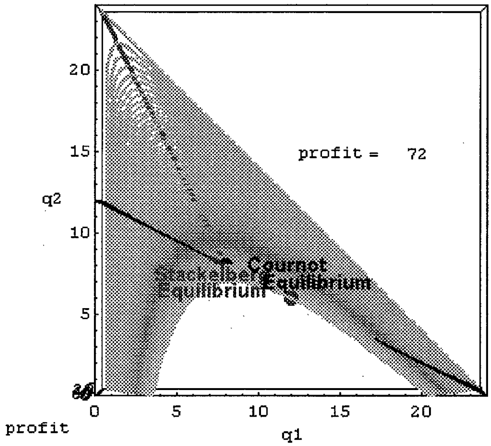

図39　企業1のクールノー均衡（黒い丸印）とシュタッケルベルク均衡（青い丸印）（利潤水準72で切断したときを表示）

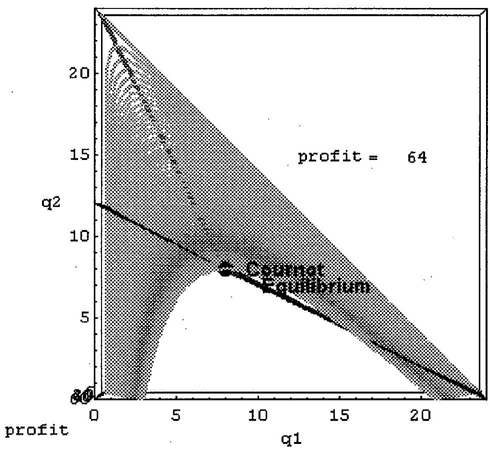

図40　企業1のクールノー均衡（黒い丸印）（利潤水準64で切断したときを表示）

次の図41から43はクールノー均衡とシュタッケルベルク均衡を別の角度から見たものの一部である。図には明示的に示していないが，企業1の反応曲線（赤茶色の太線）と企業2の反応曲線（濃紺色の太線）あるいは企業1の反応曲面（黄色）との交点がクールノー均衡であることを思い起こそう。

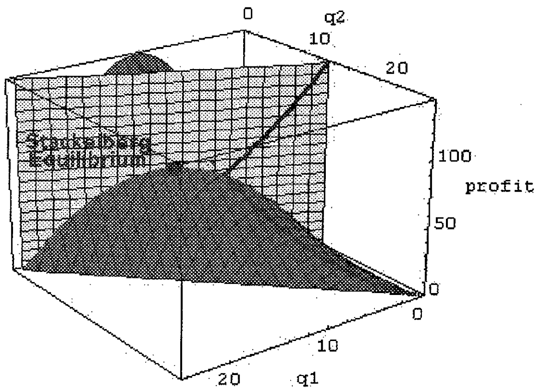

図41　企業1のシュタッケルベルク均衡

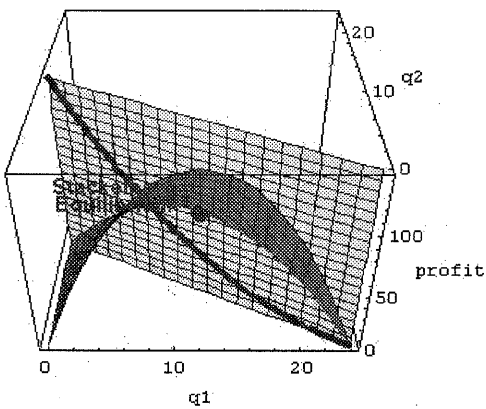

図42　図41を左側奥から見た場合の企業1のシュタッケルベルク均衡

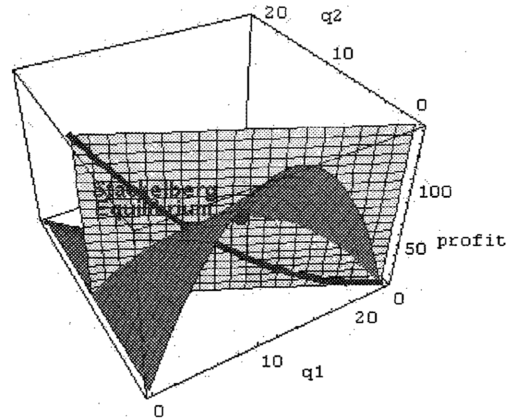

図43　図42をやや左から見た場合の企業1のシュタッケルベルク均衡

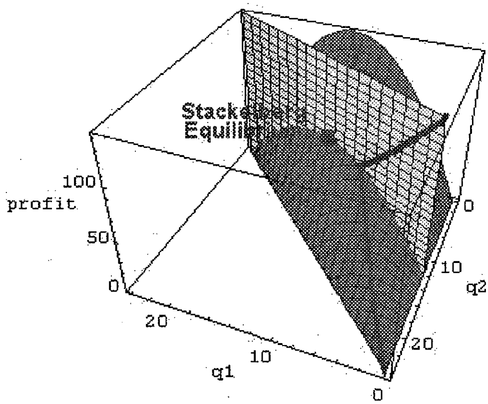

図44　図43を左側奥から見た場合の企業1のシュタッケルベルク均衡

図45と46にはクールノー均衡（黒い丸印）とシュタッケルベルク均衡（青い丸印）の位置が示されている。企業1の利潤曲面は赤色で，企業2の利潤曲面は黄緑色で表示されている。図45は利潤水準72で切断し，利潤水準が72以下の部分を表示している。図46は利潤水準64で切断し，利潤水準が64以下の部分を

表示している。図46にはシュタッケルベルク均衡が表示されていないことから，企業1にとってシュタッケルベルク均衡の場合のほうがクールノー均衡の場合よりも利潤が多いことがわかる。

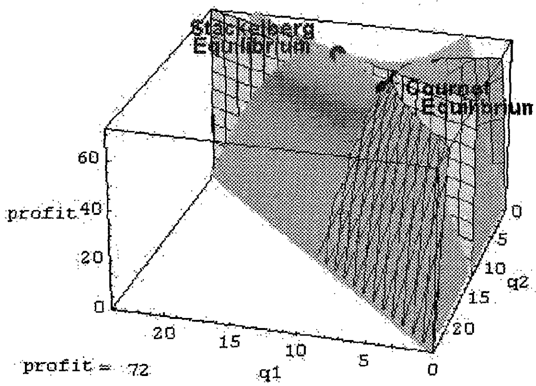

図45　シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡を比べる
（利潤水準72以下の部分）

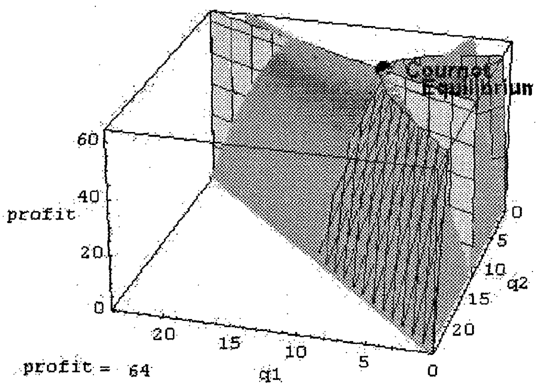

図46　シュタッケルベルク均衡とクールノー均衡を比べる
（利潤水準64以下の部分を表示したのでシュタッケルベルク均衡は表示されない）

4．結　　語

画像やアニメーションを用いるとシュタッケルベルク均衡やクールノー均衡の持つ特徴がよく理解できると思う。もちろん，本論文で採用した説明方法は特定のパラメータに依存しているが，その手法は一般性を失っていない。実際に，多くの基本的な特徴を捉えることができる。特に，MATHEMATICA による画像はその細部を明確に描くことが可能なので必要であればその点を中心にした画像を作成できる。

また，インターネットやアニメーションを利用した教育方法は従来の黒板やOHP による方法に比べて利点が多い[8)]。画像やアニメーションのファイルをWeb ページに公開すれば，学生は必要な個所を好きな時間に，何回でも繰り返して学習できることがメリットとして上げられている。もちろん画像に頼りすぎるのは良くないが，はじめて経済学を学習するものにとっては入りやすい方法の一つであろう。

本論で目指したことは，CAL (Computer Assisted Learning)，CAI (Computer Aided Instruction)，あるいは，E-Learning と呼ばれる方法を経済学に取り入れようとする試みの継続である[9)]。

費用格差のある場合についての画像表示による説明は別の論文で扱う。また，他の多くの経済モデルについてアニメーションを用いて説明することを予定している。

8）実際，筆者は平成13年度から「産業組織論」の授業ではプロジェクタにコンピュータ出力を接続し，LAN 接続で JavaScript と HTML ファイルを利用した，アニメーションファイルにアクセスしたり，パワーポイントのハイパーリンク機能を用いてアニメーションを見せ，学生の興味を引くことができている。

9）筆者の作成した，ミクロ経済学，マクロ経済学，産業組織論およびゲーム理論についての Computer Assisted Learning in Economics Programs 14 本は画像を中心にしたものであるが，以下の Web ページに公開している。その URL は
http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/cal-win.html
である。

付録1　アニメーション作成の方法について

1．MATHEMATICAのプログラムを作成し（付録2を参照），画像を表示させる。

2．その画像をHTML/Math ML形式で保存する。任意のフォルダのimagesフォルダ内にindex_gr_*.gifファイルが作成される。*には数字1からの通し番号が入る。

3．MATHEMATICAのプログラムを作成し，gifフォーマット形式の画像（index_gr_*.gif）をjpeg形式の画像（xxxx*.jpg）に変換する。xxxxは指定した任意の文字列，*には既定の数字の通し番号が入る。ファイル名の一部を既定値の“index_gr_”から“xxxx”に変えるのは画像管理上混乱を起こさないための工夫である。

4．HTMLとJavaScriptを用いてアニメーションを作成する（付録3および4を参照）。具体的には，画像を1枚1枚コマ送りするプロセスはJavaScriptを用いたプログラムを用いる。このJavaScriptプログラムをHTMLファイルに取り込み，画像の説明をHTML文書で行う。

5．JavaScriptプログラムで処理できる画像操作は，次の7種類である。「(既定値で）スタート（start)」,「ストップ（stop)」,「一つ前の画像へ戻る（backward)」,「一つ先の画像へ移動する（forward)」,「(直前に設定してある表示速度で）再スタート（Restart)」,「コマ送りの表示速度を早くする（quick)」，および,「コマ送りの表示速度を遅くする（slow)」である（付録4を参照)。

6．Internet ExplorerやNetscape NavigatorなどのブラウザでHTMLファイルを表示すると，寡占理論のアニメーションを見ることができる。アニメーションを利用すると，企業1と企業2の利潤曲面，最適反応点，その軌跡である3次元における反応曲線，企業2の反応曲面（反応曲線を含む平面）と企業1の利潤曲面の共通部分で企業1の利潤を最大にする,「企業1が先導者の場合のシュタッケルベルク均衡」を理解しやすくなる。

付録2　図1，2および8を表示するためのMATHEMATICAプログラム

以下のプログラムで（＊　＊）で囲まれた部分はコメントである。

図1を描くプログラム

```
（＊企業1の利潤関数＊）
ff=(aa-cc-(x+y)) x
（＊需要曲線の切片と費用関数のパラメータの設定＊）
aa=25;cc=1;
（＊利潤額に応じて色を変えるための指定＊）
colfunFF22[z_]:=Hue[-0.35+0.8 z,1,1]
（＊利潤曲面を描く＊）
ffsurf22=Plot3D[
    ff, {x,0,aa-cc}, {y,0,aa-cc},
    PlotPoints->25,
    PlotRange-> {0,((aa-cc)/2)^2},
    AxesLabel-> {"q1","q2","profit"},
    BoxRatios-> {1,1,0.6},
    ClipFill->None,
    ViewPoint-> {-1,-2,1},
    ColorFunction->colfunFF22
    ]
```

図2を描くプログラム

```
（＊等利潤線の色，太さを指示する関数の設定プロシージャ＊）
isoOneHueThick[profit_,hh_,ss_,bb_,thk_]:=ParametricPlot3D[
    {x,aa-cc-x-profit/x,profit, {Hue[hh,ss,bb],Thickness[thk]}},
    {x,0.001,aa-cc},
    AxesLabel-> {"q1","q2","profit"},
```

```
    PlotRange->{{0,aa-cc},{0,aa-cc},{0,((aa-cc)/2)^2}},
    DisplayFunction->Identity
    ]

 (*色を変え，太さは一定で等利潤線を145本描く*)
paiOneGradation=Show[Table[
      isoOneHueThick[profit,1-profit/160,1,1,0.01],{profit,0,144}
    ],
    PlotRange->{{0,aa-cc},{0,aa-cc},{0,((aa-cc)/2)^2}},
    BoxRatios->{1,1,0.6},
    ViewPoint->{-1,-1.5,1.2},
    DisplayFunction->$DisplayFunction
    ]
```

図8を描くプログラム

```
gg=(aa-cc-(x+y)) y
aa=25;cc=1;

 (*企業2の利潤曲面を利潤水準，色を指定して描くプロシージャ*)
ggsurfHue[profitTwo_,hh_,ss_,bb_]:=
  Plot3D[{gg,Hue[hh,ss,bb]},{x,0,aa-cc},{y,0,aa-cc},
    PlotPoints->25,
    PlotRange->{{0,aa-cc},{0,aa-cc},{0,profitTwo}},
    AxesLabel->{"q1","q2","profit"},
    BoxRatios->{1,1,0.6},
    ClipFill->None,
    ViewPoint->{1,1,1},
    DisplayFunction->Identity
```

```
]

(*企業1の生産量を通る平面を生産量，利潤水準，色を指定して描くプロシージャ*)
q1Plane[q1_,profit_,hh_,ss_,bb_]:=ParametricPlot3D[
    {q1,y,z,Hue[hh,ss,bb]},{y,0,aa-cc},{z,0,profit},
    Shading->True,
    PlotRange->{{0,aa-cc},{0,aa-cc},{0,((aa-cc)/2)^2}},
    DisplayFunction->Identity
    ]

(*企業2の反応曲線の一部を利潤水準の最小値と最大値，色を指定して描くプロシージャ*)
reactionTwoBand[profitMin_,profitMax_,hh_,ss_,bb_,thk_]:
    =ParametricPlot3D[
    {x,(aa-cc-x)/2,((aa-cc-x)/2)^2,{Hue[hh,ss,bb],Thickness
    [thk]}},
    {x,aa-cc-2 Sqrt[profitMax],aa-cc-2 Sqrt[profitMin]},
    BoxRatios->{1,1,0.5},
    AxesLabel->{"q1","q2","profit"},
    PlotRange->{{0,aa-cc},{0,aa-cc},{0,((aa-cc)/2)^2}},
    DisplayFunction->Identity
    ]

(*企業2の最適反応点を利潤水準，色を指定して描くプロシージャ*)
bestResponseTwo[profit_,hh_,ss_,bb_,sz_]:=
  Graphics3D[{Hue[hh,ss,bb],PointSize[sz],
     Point[{aa-cc-2 Sqrt[profit],(aa-cc-(aa-cc-2 Sqrt[profit]))
```

```
  /2,profit}]},
 PlotRange->{{0,aa-cc},{0,aa-cc},{profit-1,profit+1}}
 ]
```

（＊企業2の最適点の軌跡，すなわち，3-D空間における反応曲線を導出する画像を描くプロシージャ＊）

```
deltaTwo=0.000001;
firmTwoReaction=Partition[Table[Show[
      ggsurfHue[((aa-cc-x)/2)^2,0.32,0.8,1],
      q1Plane[x,((aa-cc)/2)^2,0.85,0.7,1],
      reactionTwoBand[((aa-cc-x)/2)^2,((aa-cc)/2)^2,0.65,1,0.8,
      0.01],
      bestResponseTwo[((aa-cc-x)/2)^2,0.65,1,0.5,0.035],
      Graphics3D[Text["q1=",{13,16,200}]],
      Graphics3D[Text[0.01*Round[(x-deltaTwo)*100],{18,15,
        212}]],
      Graphics3D[Text["q2=r2(q1)=",{19,14,200}]],
      Graphics3D[
         Text[0.01*Round[((aa-cc-(x-deltaTwo))/2)*100],{26,15,
      212}]],
      Graphics3D[Text["profit =",{-5,5,190}]],
      Graphics3D[
        Text[0.01*Round[((aa-cc-(x-deltaTwo))/2)^2*100],{6,7.2,
      202}]],
      PlotRange->{{0,aa-cc+2 deltaTwo},{0,aa-cc},{0,((aa-cc)/2)
      ^2}},
      BoxRatios->{1,1,0.6},
      ViewPoint->{1,-1.2,1},
```

```
      DisplayFunction->Identity
      ],
    {x, 0 + deltaTwo, aa-cc + deltaTwo} ], 3
    ]
```

```
(*企業2の反応曲線を導出する画像を表示する*)
Show[
  GraphicsArray[firmTwoReaction],
  DisplayFunction->$DisplayFunction
  ]
```

付録3 JavaScriptリスト

```
<Script Language=]JavaScript1.1">
<!--
var TimeSet1=300;
var ImageSetA=142;
var ImageSetStart=142;
var ImageSetEnd=179;
ANIMA=new Array();
for(i=ImageSetStart;i<ImageSetEnd+1;i++) {
  ANIMA[i]=new Image();
  ANIMA[i].src="images/s113a"+i+".jpg";
}
function anime1() {
  document.animation.src=ANIMA[ImageSetA].src;
  ImageSetA++;
  if(ImageSetA>ImageSetEnd) {
  ImageSetA=ImageSetStart;
```

```
}
  timerID=setTimeout("anime1()",TimeSet1);
}
function anime2() {
  ImageSetA++;
  if(ImageSetA>ImageSetEnd) {
  ImageSetA=ImageSetStart;
}
  document.animation.src=ANIMA[ImageSetA].src;
}
function anime3() {
  ImageSetA--;
  if(ImageSetA<ImageSetStart) {
  ImageSetA=ImageSetEnd;
}
  document.animation.src=ANIMA[ImageSetA].src;
}
function stop1() {
  clearTimeout(timerID);
}
//-->
</Script>
```

付録4　HTMLリストの一部

```
  <IMG SRC="images/s113a"+ImageSetStart+".jpg" Name="animation"
Alt="animation" BORDER=0 Width="288" Height="288" Align="left">
 <FORM>
    <INPUT TYPE="button" VALUE="start" onClick="TimeSet1=300;
```

```
ImageSetA=ImageSetStart; anime1()">
    <INPUT TYPE="button" VALUE="stop" onClick="ImageSetA--;
stop1()">
    <INPUT TYPE="button" VALUE="backward" onClick="anime3()">
    <INPUT TYPE="button" VALUE="forward" onClick="anime2()">
    <INPUT TYPE="button" VALUE="Restart" onClick="anime1()">
    <INPUT TYPE="button" VALUE="quick" onClick="TimeSet1=0.8*
TimeSet1">
    <INPUT TYPE="button" VALUE="slow" onClick="TimeSet1=1.2*
TimeSet1">
  </FORM>
```

参考文献

Friedman, James W. [1983], *Oligopoly Theory*, Cambridge University Press.

Huang, Cliff J. and Philip S. Crooke [1997], *Mathematics and Mathematica for Economists*, Blackwell Publishers Inc., Massachusetts, USA, pp.29-31 and pp.277-285.

宮坂雅輝［1998］『JavaScript ハンドブック』（ソフトバンク）の pp.115-117.

岡崎桂子，長谷川豊，半場方人［1997］『詳解 HTML & JavaScript 辞典』（秀和システム）の pp.336-337.

鵜沢　秀［1998］「数式処理システム Mathematica の応用とインターネットを利用した経済学学習について」『商学討究』（小樽商科大学）第48巻第2・3合併号，pp.49-74.

Uzawa, Masaru [2000a], "Looking at the Cournot-Nash Equilibrium by using MATHEMATICA Graphics —— You can choose any value of parameters in the Cournot model ——," 鵜沢編『コンピュータ利用による経済学学習プログラムと実験経済学』（平成10・11年度科学研究費補助金基盤研究（C (2)））（課題番号：10630001）報告書，pp.147-173に所収。

鵜沢　秀［2000b］「MATHEMATICA のグラフィックス機能を利用してクールノー均衡を見る　——あなたがクールノー・モデルのパラメータを変更できる——」小樽商科大学　情報処理センター広報　11号，pp.11-25.

鵜沢　秀［2000c］『産業組織論』（エコノミスト社）

鵜沢　秀［2001］「寡占島の2つの記念碑をアニメーションで見よう　クールノー均衡とシュタッケルベルク均衡」(2001年)，Web ページの URL は以下のとおりである：

http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/mathanim.html（日本語版）
http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/mathanim-e.html（英語版）

Wolfram, Stephen [1999], *The MATHEMATICA book*, 4th ed., Mathematica Version 4, Wolfram Media, Cambridge University Press.

Summary

This is new approach to teach students Stackelberg equilibrium (and Cournot equilibrium) in Duopoly game using animation. We assume constant marginal cost and linear demand function for two firms. We consider 2 stage game where firm 1 is a first mover and firm 2 is a second mover. This is well known Stackelberg duopoly model where firm 1 is a leader and firm 2 is a follower. Following the established formula, we use backward induction approach to solve for this game. At the second stage, we solve for the firm 2's best response function (reaction function or curve in the Cournot model) using Animation whose figures are made by MATHEMATICA and run by JavaScript and HTML. You will see some of the program lists in Appendices 2-4. At the first stage, we will find the Stackelberg equilibrium in the region which consists of the cross points of firm 1's profit surface and firm 2's reaction plane (i.e., the generalized reaction curve in the 3-D space). We compare the Stackelberg equilibrium with the Cournot one with several points of view. I hope you will be satisfied with my animations in the 3-D space. Associated animations are seen at the following URL of my Web site:

http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/mathanim-e.html