無制限整数ナップサック問題をめぐる話題

飯田浩志

概　　要

本稿では，古典的な0-1ナップサック問題の数ある拡張の一つである，無制限整数ナップサック問題を取り上げる．0-1ナップサック問題の拡張であることから，無制限整数ナップサック問題も容易には解き得ない問題である．しかしその一方で，ある特殊な場合には多項式時間で解けるということも知られている．本稿では，この特殊な場合に焦点を当て，いくつかの話題を提供する．

キーワード: 組合せ最適化; ナップサック問題; 貪欲法; 多項式アルゴリズム

1　はじめに

> OR (数理計画) 問題の中でもっとも直観的な例題は，「ナップザック問題」である．制約式が1つ，決定変数が悉無条件，最大化すべき目的関数がある．
> —若林 [6, p. 32]

本稿では，0-1ナップサック問題 (以下KP) の数ある拡張の中から，無制限整数ナップサック問題 (Unbounded Knapsack Problem, 以下UKP) を取り上げ，いくつかの話題を提供する．UKPは，次のように定式化される:

$$z = \max_{x} \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b;\ x_j \ge 0\ (\text{整数}),\ j = 1, 2, \ldots, n \right\}, \tag{1}$$

ここに，n ヶの各添字 $j = 1, 2, \ldots, n$ がそれぞれ一つの項に対応する．係数 a_j, c_j はそれぞれ，項 j の重量と価値を表す．また，x は $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ なる n-ベクタであり，解と呼ばれる．特に，$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$, $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ それぞれを解 x の重量，価値と呼ぶことにする．今後は簡便さの為，両者をそれぞれ ax, cx とベクタ表記することがある．解 x は，制約条件 $ax \le b$ を満たす時，可能と言われる．我々の目的である cx の最大化，これを実現する可能解を最適解と呼ぶ．UKPは，KP における悉無条件 $x_j \in \{0, 1\}$ を，x_j は 0 以上の整数なる制約に拡張し，各項の取り得る個数に明示的な上限を設けない．

Nemhauser と Wolsey [5, p. 433] に見られるように，通常，UKP は上記のように最大化問題として定式化される．他方，次のように最小化問題として定式化されることもある:

$$z = \min_{x} \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b;\ x_j \ge 0\ (\text{整数}),\ j = 1, 2, \ldots, n \right\}. \tag{2}$$

本稿では，両者ともに取り扱う．

一般性を失うこと無く，本稿では，凡ての係数 a_j, c_j および重量制限 b は正の整数と仮定する．加えて，$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ および $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ も仮定する．これは，UKPに固有の性質である支配関係 (dominance relation) から来る．端的に言えば，$a_j \ge a_k$ かつ $c_j \le c_k$ ならば，最大化問題 (1) では $x_j = 0$，最小化問題 (2) では $x_k = 0$ なる最適解が存在する．支配関係の詳細については，たとえば Andonov ら [1] を参照されたい．さらに，最大化問題 (1) について

$$c_1/a_1 \le c_2/a_2 \le \cdots \le c_n/a_n$$

を，最小化問題 (2) について

$$c_1/a_1 \geq c_2/a_2 \geq \cdots \geq c_n/a_n \tag{3}$$

を，それぞれ仮定する．つまり，UKP の定式化によらず，常に項 n が最も好ましいとする．最大化問題(1)および最小化問題(2)それぞれの線形緩和問題(x_j の整数性を除いた問題) を考えれば，両者ともに $(0,\ldots,0,b/a_n)$ が最適解となる．

このUKPに関しては，前出の支配関係をはじめ，最適解の周期性等，様々な性質が明らかになってはいるものの，NP困難なKPの拡張であるが故にUKPもNP困難であり，一般に容易には解き得ない．しかしながら，ある特殊な場合に限れば，UKPは多項式時間で解けることが知られている．このことについての先行研究としては，Magazine ら [4]，Hu と Lenard [2]，Zukerman ら [7] がある．以下，2節では，文献 [4,2] で議論された，貪欲法の適用できる場合について；3節では，文献 [7] で議論された，貪欲法とはまた別の多項式時間解法の適用可能な場合について，それぞれ見ていく．

2 貪欲法

Magazine ら [4] は，等式制約下の最小化問題(2)，即ち

$$z = \min_x \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^n a_j x_j = b;\; x_j \geq 0\ (\text{整数}),\ j=1,2,\ldots,n \right\} \tag{4}$$

について，貪欲法で解き得る場合を規定する必要十分条件を明らかにした．ここで，問題(4)については，(3)に加えて，可能解の存在を保証するために次も仮定される

$$1 = a_1 < a_j,\ 2 \leq j \leq n. \tag{5}$$

貪欲法 (グリーディ法) とは，とりあえず目先のことだけを考えるアルゴリズムであり，一般に最適解を与えない (たとえば，久保と松井 [3, p. 65] 参照)．

問題(4)への貪欲法は，条件(3)に鑑みれば，Cライクな疑似コードで以下のように書ける：

for $(j = n; j > 1; j--)$ { /* $j = n, n-1, \ldots, 2$ */
　　$x_j = \lfloor b/a_j \rfloor$; /* 項$j$を取れるだけ取る */
　　b -= $a_j x_j$;
}
$x_1 = b$;
return x;

Magazineら[4]の示した条件について述べる前に，函数を二つ定義する：ひとつは$F_k(y)$ $(1 \leq k \leq n, 0 \leq y \leq b)$，伝統的にナップサック函数と呼ばれるものである．問題(4)において，最初のk種類の項のみ選択可，重量制限がyである（つまり，$z = F_n(b)$）；もうひとつは$H_k(y)$．$F_k(y)$と同じ制約の下，前出の貪欲法によって得られる解の価値を表す．ここでは，Magazineら[4]のそれではなく，HuとLenard[2]による，より洗練された結果を示す．

定理（HuとLenard，1976）．勝手な正の整数yと，ある固定されたkについて$H_k(y) = F_k(y)$とする．もし$a_{k+1} > a_k$で，pとδが$a_{k+1} = pa_k - \delta$および$0 \leq \delta < a_k$から決まる整数ならば，以下は同値である．

(a′)　すべての正の整数yについて$H_{k+1}(y) \leq H_k(y)$,
(a)　すべての正の整数yについて$H_{k+1}(y) = F_{k+1}(y)$,
(b)　$H_{k+1}(pa_k) = F_{k+1}(pa_k)$,
(c)　$c_{k+1} + H_k(\delta) \leq pc_k$.

上の(a′)は，Magazineら[4]の得た結果へHuとLenard[2]によって追加され，その証明をより簡素なものにした．

一つ，(c)が重量制限bを含まないことや(a)の記述からもすぐ分かるように，定理の眼目は，(c)を満足する係数c_j, a_jを持つinstance（係数に数値が与えら

れた具体例）ならば，b の値に関係なく貪欲法で解けるということである．別の見方をすれば，定理は，b の値に依存して貪欲法で解けたり解けなかったりする instance を拾わない．たとえば，次の instance は (3)，(5) を満たし且つ貪欲法で解ける

j	1	2	3
a_j	1	4	9
c_j	2	3	6
b		13	

にもかかわらず，$c_3 + H_2(3) = 12 \not\leq 9 = \lceil a_3/a_2 \rceil c_2$ なので，定理の (c) を満足しない（無論 (a′) も，$H_3(12) = 12 \not\leq 9 = H_2(12)$ で成立しない）.[1]

また，最大化問題 (1) に対しても定理は依然として成立するので，[2] 上で述べたことは，最大化問題 (1) でも事情は同じである．たとえば次の instance では，貪欲法が最適解 (1,1) を与えるものの，定理の (c) は $c_2 + H_1(1) = 3 \not\geq 4 = \lceil a_2/a_1 \rceil c_1$ で満たされない（(a′) も，$H_2(4) = 3 \not\geq 4 = H_1(4)$ で不成立）

j	1	2
a_j	2	3
c_j	2	3
b	5	

以上の点から，貪欲法で解き得る凡ての instance を拾い上げるように定理を拡張することは，ひとつ興味深い課題であろう．

[1]ついでに言うと，(c) は $k = 1$ の時には常に成立する．なぜなら，$k = 1$ の時に (c) は，$a_1 = 1$ と $H_1(0) = 0$ から $c_2/a_2 \leq c_1/a_1$ に縮退し，(3) に一致するからである．

[2]問題 (4) で目的函数を異符号にして最大化問題とした後，凡ての $-c_j$ を c_j に書き直し，特に $c_1 = 0$ として項 1 に対応する変数 x_1 をスラック変数にすれば，最大化問題 (1) を得る．文献 [4, 2] では，係数 c_j の符号に制約は無いので，得られた最大化問題 (1) に対しても，定理は成立する．ただし，$c_j = -c_j$ なる操作を施した関係で，定理の (a′) および (c) の不等号の向きが逆になる．

3 Zukermanらのアルゴリズム

本節では，最小化問題(2)のみ取り扱う．最近，Zukerman ら [7] は，次の条件が成立する時，最小化問題(2)が，彼らの提案する多項式アルゴリズムで解けることを示した．

$$c_{j+1} \leq \lfloor a_{j+1}/a_j \rfloor c_j, \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{6}$$

この条件が成立するとき，$x_n \geq \lfloor b/a_n \rfloor$ なる最適解 x が存在する [7]．一つ，条件(6)は(3)を含意することに注意されたい．Zukerman らの多項式アルゴリズムは，条件(6)を再帰的に用いるものであり，C ライクな疑似コードでは以下のようになろう：

```
for (j = 1; j < n; j++) x*_j = x_j = 0; /* clear x*, x */
x*_n = ⌈b/a_n⌉;
for (j = n; j ≥ 1; j--) {
    x_j = ⌈b/a_j⌉; /* 候補（可能解）*/
    if (cx < cx*) x* = x;                                  (7)
    x_j = ⌊b/a_j⌋; b -= a_j x_j;
    if (b == 0) break; /* exit loop */
}
return x*;
```

要するに，高々 n 個の候補の中から，最も目的函数値 cx の小さいものを選択している．実は条件(6)は，(7)で解ける(2)の instance を規定するための十分条件ではあるものの，必要条件ではない．他の十分条件としては，trivial ではあるが $a_n \mid b$，即ち a_n が b を割り切る場合が，すぐに思いつく．[3]

[3] $a_n \mid b$ なる instance に対して，(7)は唯一の候補 $(0, \ldots, 0, b/a_n)$ を出力する（$j = n$ でループ内部の処理をした後，最後の『b が 0 に等しい』という条件に引っかかって，$j = n$ のままループを抜ける）．これが最適であることは，(3)から明らか．

その他にも，$n=2$ なる非常に単純な場合にではあるけれども，次の条件が成立する時に，解 $(0, \lceil b/a_2 \rceil)$ が最適であることがいえる．

$$\frac{c_1}{a_1}(b - \lfloor b/a_2 \rfloor a_2) \geq (\lceil b/a_2 \rceil - \lfloor b/a_2 \rfloor)c_2, \tag{8}$$

ここで，右辺は c_2 では置き換えられない．何となれば，$a_2 \mid b$ の時に成立しなくなってしまうからである．一応，証明しておこう．

証明． $x_2 \leq \lfloor b/a_2 \rfloor$ なる可能解 $x=(x_1, x_2)$ について，$x_1 \geq \lceil (b - a_2 x_2)/a_1 \rceil$ が成立する．この時，

$$\begin{aligned} c_1 x_1 + c_2 x_2 &\geq c_1 \left\lceil \frac{b - a_2 x_2}{a_1} \right\rceil + c_2 x_2 \\ &\geq \frac{c_1}{a_1} b - \left(\frac{c_1}{a_1} a_2 - c_2 \right) x_2 \\ &\geq \frac{c_1}{a_1} b - \left(\frac{c_1}{a_1} a_2 - c_2 \right) \lfloor b/a_2 \rfloor \\ &= \frac{c_1}{a_1}(b - \lfloor b/a_2 \rfloor a_2) + \lfloor b/a_2 \rfloor c_2 \geq \lceil b/a_2 \rceil c_2. \end{aligned}$$

したがって，解 $(0, \lceil b/a_2 \rceil)$ は最適である． ∎

例をあげると，(6) にも $a_n \mid b$ にも当てはまらない次の instance が，(8) によって新たに拾われる

j	1	2
a_j	4	6
c_j	4	5
b	11	

j	1	2
a_j	6	10
c_j	6	7
b	19	

しかし残念ながら，条件(8)は，解 $(0, \lceil b/a_2 \rceil)$ が最適であるための必要条件ではない．以下の二つの instance：前者は $(0,1)$ を，後者は $(0,2)$ をそれぞれ最適解に持つけれども，(8)でも拾い切れない

j	1	2
a_j	4	6
c_j	4	6
b	5	

j	1	2
a_j	6	10
c_j	6	9
b	18	

ここで，$n=2$ の場合に関する条件をさらに改良して必要十分にまで引き上げることができれば，一般の n の場合への糸口が見えてくるのではないかとも思える．しかし，$n=2$ なる単純な場合を突き詰めても，一般の場合の条件に思い至ることは無いのかもしれない．たとえば，条件 $a_n \mid b$ の拡張として，次を考えてみる：

仮説.

$$b_j = \begin{cases} b, & j = n \\ b_{j+1} - \lfloor b_{j+1}/a_{j+1} \rfloor a_{j+1}, & j = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

と定義する．この時，$a_j \mid b_j$ なる j があれば，当該 UKP (2) は (7) で解ける．

確かに，これは $n=2$ の時には正しい．何となれば，$a_1 \mid (b - \lfloor b/a_2 \rfloor a_2)$ の時，非負の整数 p を用いて $pa_1 + \lfloor b/a_2 \rfloor a_2 = b$ と書ける．この時，勝手な可能解 $x = (x_1, x_2)$ について

$$x_1 \geq p + \frac{a_2}{a_1}\left(\lfloor b/a_2 \rfloor - x_2\right)$$

である．したがって，$x_2 \leq \lfloor b/a_2 \rfloor$ を満たす可能解 x について，(3)から

$$
\begin{aligned}
c_1x_1+c_2x_2 &\geq pc_1+\frac{c_1}{a_1}a_2(\lfloor b/a_2\rfloor - x_2)+c_2x_2 \\
&\geq pc_1+\lfloor b/a_2\rfloor c_2
\end{aligned}
$$

が得られる．よって，$x_2 \geq \lfloor b/a_2\rfloor$ なる最適解 x が存在する．しかしながら，$n=3$ で早くも破綻する．たとえば，次が反例である

j	1	2	3
a_j	1	8	12
c_j	1	6	9
b		16	

いずれにせよ，(7) を用いて多項式時間で解き得る最小化問題 (2) の instance を規定する必要十分条件とは如何なるものか？　こちらもまた，興味深い課題であろうと思われる．

4　おわりに

以上，無制限整数ナップサック問題が多項式時間で解き得る特殊な場合を規定する条件について，未解決の課題を二つ掲げた．本稿が，今後の議論の緒となれば幸いである．

参考文献

[1] R. Andonov, V. Poirriez, and S. Rajopadhye, "Unbounded knapsack problem: Dynamic programming revisited," Euro J Opnl Res **123**(2) 394-407 (June 1, 2000).

[2] T. C. Hu and M. L. Lenard, "Optimality of a heuristic solution for a class of knapsack problems," Operations Research **24**(1) 193-196 (1976).

[3] 久保幹雄・松井知己，シリーズ［現代人の数理］14　組合せ最適化［短編集］，朝倉書店，初版第2刷，Apr. 2000（初版第1刷，Jan. 1999）.

[4] M. J. Magazine, G. L. Nemhauser, and L. E. Trotter, Jr., "When the greedy solution solves a class of knapsack problems," Operations Research **23**(2) 207–217 (1975).

[5] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey, Integer and Combinatorial Optimization, Wiley-Interscience, New York, paperback reprinted, 1999.

[6] 若林信夫，"オペレーションズ・リサーチの成長と今後の課題，" 商学討究 **48**. 4，23−42（小樽商科大学，March 1998）.

[7] M. Zukerman, L. Jia, T. Neame, and G. J. Woeginger, "A polynomially solvable special case of the unbounded knapsack problem," Oper Res Lett **29**(1) 13–16 (Aug. 1, 2001).