代替弾力性の幾何表現：若林（1980）への覚書*

山　本　賢　司

本稿では，生産関数にたいして定義される代替弾力性の幾何表現を追記する。

若林（1980）は，1生産物・2生産要素モデルの生産関数について代替弾力性の幾何表現を与えている。これを補完する意味で，本稿は生産関数と双対関係をもつ費用関数によって代替弾力性に幾何表現を与えることを意図している。

1．若林（1980）による記述とその意味

代替の弾力性（elasticity of substitution: σ）は，ヒックスが1932年に定義して以来，経済分析の主要な概念の1つである。もっとも単純な1生産物（y）・2生産要素（x_1, x_2）の想定の下では，(1)式で定義される。

$$(1)\quad \sigma=-\frac{d\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{d\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)}\cdot\frac{\dfrac{w_1}{w_2}}{\dfrac{x_1}{x_2}} \approx \frac{\Delta\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)\Big/\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)}{\Delta\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)\Big/\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)}$$

ここで，生産関数 $y=f(x_1, x_2)$ は，2要素について狭義の増加関数であり，1次同次であるとし，w_i は要素 x_i の市場価格を表すものとする。

完全競争市場では，企業の利潤最大化条件は，

*本論題は，若林（1980）の図1（185ページ）より借用した。

生産物の供給量について費用最小化条件をも満たしている。よって，要素価格比（w_1/w_2）と技術的限界代替率（$RTS=f_1/f_2$；但し，f_i は要素 $i(i=1,2)$ の限界生産物を示す）は互いに等しい。

2．生産関数からのアプローチ

若林（1980）は，(1)式で定義される代替の弾力性に幾何的な表現を与えている。本節では，彼の図1を再掲し，生産関数からのアプローチを説明する。先ず，図1の曲線 $f(x_1, x_2)=\bar{y}$ は任意の等量曲線を示している。点 P を当初の生産点，点 Q を，要素価格比 w_1/w_2 が上昇した後の生産点としよう。

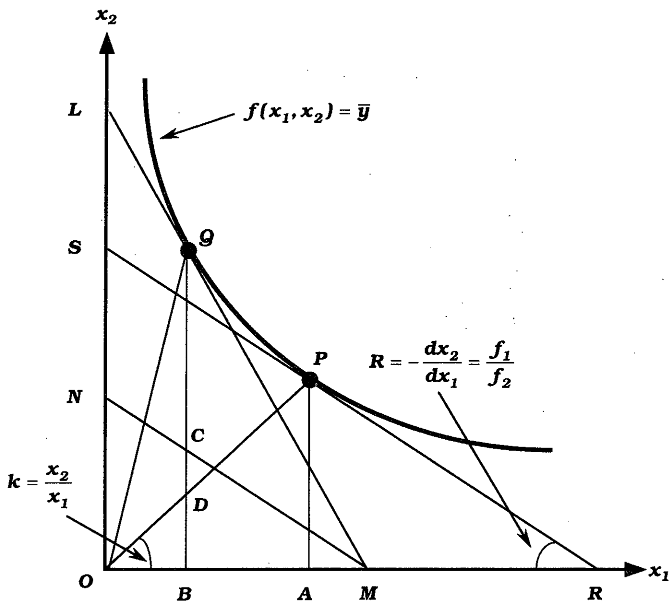

図1

すると，点 P，Q へのそれぞれの接線 RS，LM，更に RS に平行で点 M を通る線分 MN を引くことができる。よって，比 CQ/BC は(1)式のうちの要素価

格比の上昇率 $\Delta(w_1/w_2)/(w_1/w_2)$ を表している。また，比 DQ/CQ は要素投入比率の変化率 $\Delta(x_2/x_1)/(x_2/x_1)$ を示す。従って，(1)式によって

$$(2)\quad \sigma=\frac{DQ}{CQ}\cdot\frac{BC}{BD}$$

が得られる。

幾何的には，点 C が点 D より上に位置すれば $\sigma>1$，下に位置すれば $\sigma<1$，一致すれば $\sigma=1$ となる。これによって，たとえば $\sigma>1$ ならば，要素価格比率（w_1/w_2）が１％上昇すると，要素投入比率（x_2/x_1）は１％を上回って上昇する。相対的に安価となる第２要素への代替が進むため，第１要素の第２要素にたいする所得分配比率が低下することになる。

3．費用関数からのアプローチ

本節では，生産関数と双対関係にある（最小）費用関数を用いて，若林（1980）の幾何表現を導く。費用関数 $c(w_1,w_2;y)$ は，所与の生産量 y を競争価格 w_1,w_2 の下で実現するときの最小費用を示す。この関数は，w_1,w_2 について(i)非減少関数であり，(ii)１次同次関数であり，(iii)凹関数である。最後の凹関数の性質によって，要素価格フロンティア

$$(3)\quad \{(w_1,w_2)\mid c(w_1,w_2;y)=\bar{c}\}$$

は原点に対して凸となる（例えば，奥野・鈴村（1985），97-100ページ参照）。図２の曲線は，要素価格フロンティアを示している。

要素価格フロンティアの傾きの絶対値は，

$$(4)\quad -\frac{dw_2}{dw_1}=\frac{x_1}{x_2}$$

に等しく，（最小費用での）要素投入比率を示す。よって，図２での点 P を当初の要素価格（w_1,w_2），点 Q を変化後の要素価格（w_1',w_2'）とすると，接線

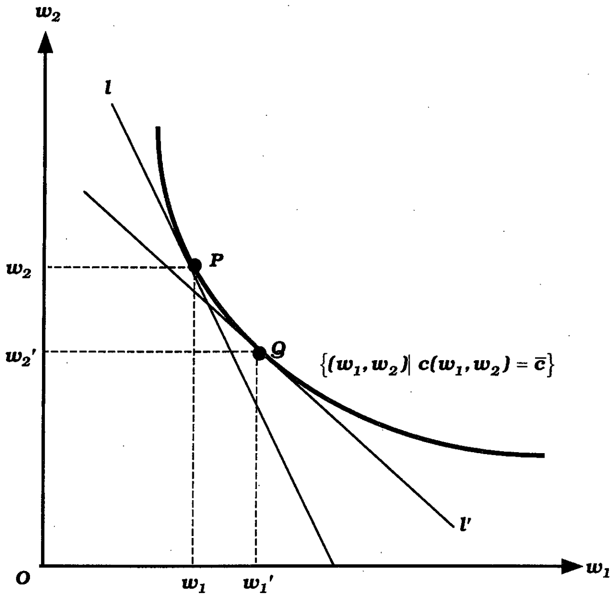

図 2

l と l' の傾きの絶対値がそれぞれ要素投入比率を示す。

次に，図 3 を用いて，(1)式の弾力性を導くことにしよう。要素価格比の変化率は

$$\frac{\Delta\left(w_1/w_2\right)}{\left(w_1/w_2\right)} = \frac{AQ/AO - AC/AO}{AC/AO} = \frac{CQ}{AC} \tag{5}$$

と表される。他方，要素投入比率の変化率 $\Delta(x_2/x_1)/(x_2/x_1)$ は

$$\frac{\Delta\left(x_2/x_1\right)}{\left(x_2/x_1\right)} = \frac{AQ/AB - AD/AB}{AD/AB} = \frac{DQ}{AD} \tag{6}$$

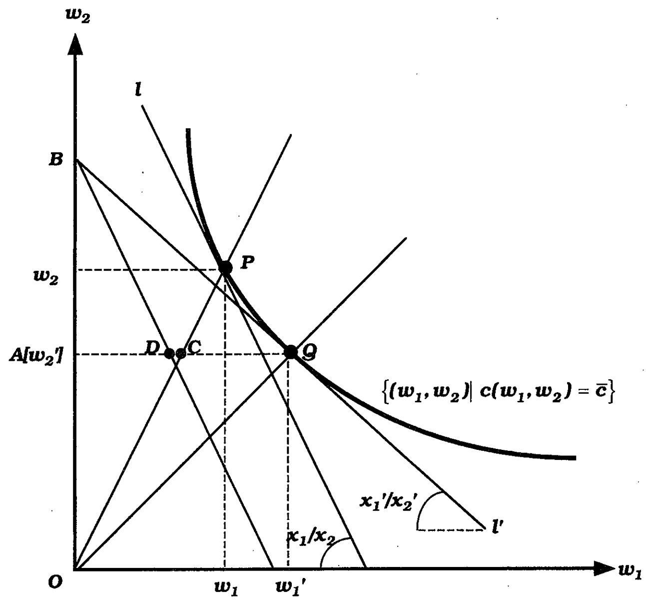

図 3

と示される。よって，

$$(7)\quad \sigma = \frac{DQ/AD}{CQ/AC}\ \frac{AC}{AD} \cdot \frac{CQ}{DQ}$$

を得る。この(7)式は，生産関数から導かれた若林（1980）の(2)式に対応する，費用関数からの幾何表現である。

参考文献

Jorgenson, D. W. (1987), "production functions", in J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman (eds.), *The New Palgrave: a dictionary of economics*, Vol. 3, London: Macmillian, 1002-1007.

奥野正寛・鈴村興太郎（1985），『ミクロ経済学Ｉ』，（東京：岩波書店）．

若林信夫（1980），「生産関数」（熊谷尚夫・篠原三代平（編）『経済学大辞典Ｉ』（第２版）（東京：東洋経済新報社，181-192頁））．