

潜在変数または顕在変数に関する尺度不変因子分析モデルのある拡張

鉄道総合技術研究所 小笠原 春彦

1. 問題

独立な集団間での因子構造や因子パターンの不変性または相違の問題は、心理学においては factorial invariancy の問題として古くから論じられてきた。因子負荷行列を異なる集団間で不変とするモデルのうち、因子の分散共分散行列の構造化モデルのひとつは、Harshman の PARAFAC2 モデルである。このモデルは、因子回転の不定性から自由であるというユニークな性質を持っている。ところで、観測個体が属する集団が複数個の集団に離散的に分かれるのではなく、外的変数（例えば年齢や所得）とともに連続的に変化する事象において、分散共分散行列が変化するモデルが Ogasawara (1989, 1990) により提案されている。また、その特殊ケースとして PARAFAC2 モデルの連続的に変化する多母集団への拡張が小笠原 (1989) により行われた。ここでは、PARAFAC2 モデルを潜在変数である共通因子のレベルでの尺度不変モデルとしてとらえるとともに、これに対応する顕在変数に関する尺度不変モデルを提案し、適用例を示す。

2. モデルとモデルにおけるパラメータの推定

小笠原 (1989) は PARAFAC2 モデルのある拡張として次のモデルを提案した。 p 個の観察された変数で構成されるベクトルを \mathbf{s} であらわし、 i 番目のサンプルの値を \mathbf{s}_i とすると、 \mathbf{s}_i は次のように記述される。

$$\mathbf{s}_i = \boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{A}\mathbf{f}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

ここで、 \mathbf{A} は $p \times k$ の集団間で不変な因子負荷行列、 \mathbf{f}_i は長さ k の共通因子のベクトル、 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ は長さ p の独自因子のベクトルであり、 $E(\mathbf{s}_i) = \boldsymbol{\mu}_i$, $E(\mathbf{f}_i) = \mathbf{0}$, $E(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \mathbf{0}$ である。 \mathbf{f}_i と $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ は、 $i = 1, \dots, N$ のサンプルについて、互いに独立に次の多変量正規分布に従うとする。

$$f_i \sim N(0, W_i \Phi W_i)$$

$$\epsilon_i \sim N(0, \Psi_i)$$

ここで, $\text{Cov}(f_i, \epsilon_i) = \mathbf{0}$ であり, W_i と Ψ_i は対角行列とする. これらから,

$$s_i \sim N(\mu_i, \Lambda W_i \Phi W_i \Lambda' + \Psi_i) \quad (i=1, \dots, N)$$

となる. ここで, モデルの一意性のために $\text{Diag}(\Phi) = \mathbf{I}$ とする. $W_i \Phi W_i$ と Ψ_i は, i 番目の個体をとる外的基準の値 y_i が与えられた時の共通因子と独自因子の分散共分散行列であり, y_i の関数である. なお, $\Sigma_i = \Lambda W_i \Phi W_i \Lambda' + \Psi_i$ とする.

さて, この拡張された PARAFAC2 モデルでは Σ_i の相違を共通因子の分散の相違によるものとしてとらえており, 因子レベルでの尺度不変モデルとみなすことができるが, これらの相違が観察された顕在変数の尺度の相違として考えられる場合には次のように Σ_i を書き換えることができる. なお, モデルを簡略にするために k 個の共通因子は直交しているものとする.

$$\Sigma_i = D_i (\Lambda \Lambda' + \Psi) D_i$$

ここで, D_i と Ψ は対角行列で, モデルの一意性のために $\text{Diag}(\Lambda \Lambda' + \Psi) = \mathbf{I}$ とする. すなわち, D_i の対角要素は顕在変数の標準偏差であり, y_i によって定まる. また, 拡張 PARAFAC2 モデルと同様に $E(s_i) = \mu_i$ とする. なお, このモデルには通常の直交因子モデルと同様に因子回転の不定性が存在する.

拡張 PARAFAC2 モデルにおけるパラメータは μ_i , W_i , Ψ_i におけるパラメータと Φ , Λ である. 顕在変数に関する尺度不変モデルでは, パラメータは μ_i と D_i におけるパラメータと Λ である. パラメータの最尤推定値はフィッシャーのスコア法により求めるが, そのために必要なグラディエントベクトルとヘシアン行列の期待値は比較的規則的に求めることができる. モデルのデータへのあてはまりの良さに関しては, 複数のグループに分かれたデータの共分散構造分析のケースとは異なり, 標本分散共分散行列に相当するものが得られないので, 適当な統計量がない. しかし, パラメータの推定値の漸近的な標準誤差が数値計算における収束時の情報行列の逆行列の対角要素の平方根より得られるので, パラメータの評価を行うことができる.

3. モデルの適用及び討論

以上のモデルを, 6 問題から成り, 2 因子を想定した成人用知能検査のデータへ適用した. 各問題の正答数は年齢とともに平均が減少するだけでなく, 分散共分散行列も変化するが, μ_i , W_i , Ψ_i , D_i の各要素が, 年齢に関する多項式であらわせるモデルを設定した. このデータでは, ϕ_{21} の t 値 (推定値/推定値の標準誤差) が小さく, モデルの一意性はあるものの $\Phi = \mathbf{I}$ の場合と, あまり当てはまりは変わらない結果となった. (W_i が対角行列の場合には通常の因子回転の不定性が生じる.) また, μ_i が Ogasawara (1990) のモデルのように, 因子レベルの変化に分解されるモデルが, 当モデルの発展として考えられた. また, 顕在変数に関する尺度不変モデルには, 因子回転の不定性があるが, 回転後の因子負荷の標準誤差を Jennrich の方法により求め, 因子負荷の推定値の評価として利用した.

参 考 文 献

- 小笠原春彦 (1989). 連続的に変化する多母集団の PARAFAC モデル, 第 17 回日本行動計量学会大会発表論文抄録集.
 Ogasawara, H. (1989). Covariance structure analysis of continuously changing populations, *Behaviormetrika*, 25, 15-33.

Ogasawara, H. (1990). Covariance structure model when the factor means and the covariances are functions of the third variable, *Japanese Psychological Research*, 32 (1), 19-25.