所得階層別物価に関する試論*)

倉　林　義　正

Ⅰ　平均価格と階層別一般物価

以下の考察において，m個の商品と n個の所得階層に分割された価格＝数量データを考え，これらデータが次のようなデータ行列に配列されているものとしよう。ここで，

<価格>

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & \cdots\cdots(\text{階層})\cdots\cdots & M \\
\hline
1 & p_1^1 & \cdots\cdots & p_1^M \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(\text{商品}) & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
N & p_N^1 & \cdots\cdots & p_N^M
\end{array}
$$

<数量>

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & \cdots\cdots(\text{階層})\cdots\cdots & M \\
\hline
1 & q_1^1 & \cdots\cdots & q_1^M \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(\text{商品}) & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
N & q_N^1 & \cdots\cdots & q_N^M
\end{array}
$$

p_i^j と q_i^jはそれぞれj所得階層が購入する i 商品の価格と数量である。j所得階層の効用函数u^jは，

$$u^j = u^j(q_1^j, \cdots\cdots, q_N^j) \qquad (1.1)$$

によって表わされるものとする。

i 商品の価格は所得階層別に相違するから，階層間の交換比率 E^j を導入して，

$$p_i = (\sum_j E^j \ p_i^j \ q_i^j) \ / \sum_j q_i^j, \quad i = 1, \cdots\cdots, N \qquad (1.2)$$

と書くことができよう。他方，階層間の交換比率は，j所得階層の商品購入のための現実の支出と（1．2）で定義された階層間の変化を反映する i 商品の価格との関係で，次の式で与えることが可能であろう。

$$E^j = (\sum_i p_i \ q_i^j) / (\sum_i p_i^j \ q_i^j), \qquad j = 1, \cdots\cdots, M \qquad (1.3)$$

E^jの逆数（$1/E^j$）は，階層間の変化を反映する商品の価格のもとで，現実j階層が支配しうる商品の購入量を表わすものと考えることができるから，それはj階層が持つ購売力と解釈することができよう。

（1.2）と（1.3）において，未知の変数はp_iとE^jである。重要なことがらは，これらが相互依存的な関係の中で同時に決定されることである。いま（1.2）で与えられるp_iを商品iの階層間平均価格（または単に，平均価格），（1.3）で示されるE^jを階層jの一般物価と名付けておくことにすれば，上に述べた事実は，「各商品の平均価格と各階層の一般物価は同時的に（1.2）と（1.3）において，決定される」ことを主張する。p_iとE^jが（1.2）と（1.3）の解として決定されることは明らかである。すなわち，（1.2）と（1.3）から，

$$E^j = \sum_i (p_i / p_i^j)(p_i^j q_i^j) / (\sum_j p_i^j q_i^j / p_i) \tag{1.4}$$

あるいは，

$$p_i = (1/M) \sum_j p_i^j E^j \tag{1.5}$$

が得られる。（1.5）は単体上での連続写像であるから，ブロウェルの不動点定理によって、この関係を満すE^jの存在を主張することができる。

いまk所得階層とl所得階層の間で比較された一般物価指数を$I(k, l)$で表わし，

$$I(k, l) = (p_k / p_l) \tag{1.6}$$

で定義する。$I(k, l)$が指数形式における循環テスト（circularity test）を満足することは見易い。したがって，

$$I(k, l) = I(k, h) \cdot I(h, l) \tag{1.7}$$

そこで，このようにして解かれる階層間で比較された一般物価指数の性質を詳しくしらべるためには，次の2つの方向への検討が必要であろう。その第1は，指数形式の整合性を保証するための各種のテストの結果を明らかにすることである。これによって，原子論的接近の見地から見たこの種の指数形式の内的整合性を確認することができる。第2は，本節の冒頭に表示した価格＝数量データに基いて，p_iとE^jの実際の数値を計算する方法を検討することである。この点は指数論の立場から特に重要である。なぜならば，指数のさまざまの形式と算式の考案が示しているように，指数論の立場からすれば実際の価格＝数量データにもとづく計算の実行可能性が問題であって，単に（1.2）と（1.3）の関係を前提にp_iとE^jの存在が確められるだけでは数量分析の徹底を欠いていると言わざるをえないからである。これらの2つの点は，ここで提案される階層間で比較される一般物価指数の構想を展開するのに当って無視することのできない問題である。しかし，ここではこれらの問題の検討を別の機会に委ねて，もう1つの指数理論上の問題に注意を向けることにしよう。

Ⅱ　階層別一般物価の函数論的接近

指数の形式と内容を意味づける指数理論上の伝統的な接近方法は，しばしば「原子論的接近」と「函数論的接近」の名で区別される。前者が強調するのは統計的な指数形式であり，後者は主体行動に関するミクロ経済理論の基礎から見た指数の意味を強調する。この見地から前者の接近から導れる指数を統計指数，後者の接近に基いて誘導される指数を経済指数と呼ぶこともある。この整理に従うと，前節で議論された階層間で比較される一般物価指数は「原子論的接近」の考えに添って統計的指数を提案しているのに過ぎない。例えば，階層の一般物価の決定は消費主体の選択行動から結果する価格＝数量の決定関係とは全く切り離されたままだからである。それ故，前節の推論に従って，E^j が決定され，またそれが指数形式の整合性を保証するさまざまのテストを満し，その上に E^j の数値計算の方法が考案されたとしても，階層間で比較される一般物価指数の考え方は依然として経済理論的な根拠と正当性に欠けている。それならば，前節の階層間で比較される一般物価指数を経済理論の立場から根拠づけることは可能であろうか。また，そのことはどのようにして達成されるのであろう。

ここで，われわれは，CPI が消費主体の等効用函数上での比較の見地から経済指数として根拠づけられて来たことを想起することが必要であろう。同様の「函数論的接近」の考え方を E^j の決定の中へ持ちこむことを考えよう。簡単のために，j 階層に属する人々を１人の消費主体と考える。この仮定は特定の階層に含まれる個人の集計（aggregation）にきびしい制約を要請するものであるが，ここではその制約の内容に立入らない。一般的に言って，この制約はきびしい内容のものであるかもしれないが，全く根拠のない内容のものではない。そこで E^j の決定に関しこの消費主体が次の関係で行動するものと考えることは合理的であろう。

$$E^j = \mathrm{Min}\left\{\sum_i p_i q_i \;\middle|\; u^j(q) = u^j(q^j)\right\} \Big/ \sum_j p_i^j q_i^j \qquad (2.1)$$

ただし，q^j は (1.1) で定義された効用函数を作る商品のベクトル

$$q^j = (q_1^j, \cdots\cdots, q_N^j) \qquad (2.2)$$

であって，ベクトルの形に表示された次の予算制約

$$p^j q = p^j q^j \qquad (2.3)$$

$$p^j = (p_1^j, \cdots\cdots, p_N^j) \qquad (2.4)$$

のもとで $u^j(q^j)$ を極大にする商品ベクトルを表わす。(2・1) は j 階層の一般物価を，商品の平均価格ベクトル，

$$p = (p_1, \cdots\cdots, p_N) \qquad (2.5)$$

を所与として，j階層の消費主体の効率的な商品ベクトルが与える効用と同じ効用の水準を達成する条件のもとでの支出金額を極小にする支出金額と現実のそれとの比率によって与えることを意味している。（1.1）において効用函数を線型同次函数に特定化するならば，

$$\mathrm{Min}\left\{\sum p_i q_i \mid u^j(q)=u^j(q^j)\right\}= p_i q_i^j \tag{2.6}$$

と書くことができて，(2.6) は (1.3) に帰着する。

（2.1）を（1.2）と連立して p_i と E^j を決定する問題は，すでに Prasada Rao によって解かれ，p_i と E^j の存在と一意性が証明されている。しかし，前節でも言及しておいたように，Prasada Rao の試みも存在と一意性の証明に止まっており，解の数値計算のアルゴリズムにまでは及んでいない。このアルゴリズムの一般的な解法は不動点定理による均衡解のアルゴリズムの展開と言う興味ある問題の領域に関連している。しかし，ここではその領域に立入る用意がないので，効用函数の特定化による解法を示すことにしよう。

函数論的接近による指数理論の展開において相似拡大的な効用函数を特定化することによって指数の性質に対する見通しが明瞭になることが多くの研究によって指摘されている（例えば，Samuelson － Swamy）。そこで，相似拡大的な効用函数のクラスの中から特によく知られている若干の函数型をえらんで，これらの函数型から誘導される p_i と E^j の決定を考えてみよう。検討される函数型は，(i) Cobb － Douglas，(ii) CES，(iii) Bergson，(iv) Minkowski － Hölder，(v) ACMUS，(vi) Klein － Rubin，(vii) Addi－log 型のそれぞれである。

Ⅲ 若干の相似拡大的な効用函数のクラスにおける E^j の決定

（2.1）で設定した E^j の一般的な性質をはじめに考察しておこう。最初に，

$$\mathrm{Min}_{q}\left\{\sum_{i=1}^{N} p_i q_i \mid u^j(q)=u^j(q^j)\right\}$$

を考える。

μ^j を制約式 $u^j(q)=u^j(q^j)$ のラグランジェ乗数とすれば，最小化の一階の条件として，

$$p_i=\mu^j\frac{\partial u^j}{\partial q_i} \quad (i=1,2,\cdots\cdots\cdots,N) \tag{3.1}$$

が成立する。

次に，

$$\mathrm{Max}_{q}\left\{u^j(q^j) \mid \sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j = I^j\right\}$$

を考える。

λ^j を制約式 $\sum_{i=1}^{N} p_i^j\ q_i^j = I^j$ のラグランジェ乗数とすれば，最大化の一階の条件として，

$$\frac{\partial u^j}{\partial q^j_i} = \lambda^j p^j_i \quad (i=1,2, \cdots\cdots\cdots, N) \tag{3.1'}$$

が成立する。

ここで，効用関数が，m次同次関数のときは，オイラーの定理により，

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u^j}{\partial q_i} \cdot q_i = mu^j$$

が成立するから，

(3・1)より　$\sum_{i=1}^{N} p_i \, q_i = \mu^j m \, u^j(q)$

(3・1')より　$\lambda^j \sum_{i=1}^{N} p^j_i \, q^j_i = mu^j(q^j)$

となる。

従って，$u^j(q) = u^j(q^j)$であることを考慮すれば，

$$E^j = \lambda^j \mu^j \tag{3.*}$$

が得られる。この関係はE^j の誘導にとって基本的な関係である。また，ここで$(1／\lambda^j)$が間接効用函数から誘導される最小の支出函数を与えることは興味深い。

(i)　効用関数 $u^j(q)$ が Cobb−Douglas型のときの E^jの決定

$$u^j(q) = \prod_{i=1}^{N} (q_i)^{a^j_i}$$

但し，$a^j_i > 0$, $\sum_{i=1}^{N} a^j_i = 1$ for all j を考える。

$$\frac{\partial u^j}{\partial q_i} = \frac{a^j_i u^j(q)}{q_i}$$

だから，(3.1)より，

$$p_i = \mu^j a^j_i u^j(q) ／ q_i$$

従って，

$$q_i = \frac{\mu^j a^j_i u^j(q)}{p_i}$$

$$u^j(q) = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\mu^j a^j_i u^j(q)}{p_i}\right)^{a^j_i} = \mu^j u^j(q) \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{a^j_i}{p_i}\right)^{a^j_i}$$

これから，

$$\mu^j = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i}{a^j_i}\right)^{a^j_i}$$

が得られる。

一方，

$$\frac{\partial u^j}{\partial q_i^j} = a_i^j u^j(q^j) \ / \ q_i^j$$

だから，（3．1′）より，

$$a_i^j u^j(q^j) \ / \ q_i^j = \lambda^j p_i^j$$

従って，

$$q_i^j = \frac{a_i^j u^j(q^j)}{\lambda p_i^j}$$

$$u^j(q^j) = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{a_i^j u^j(q^j)}{\lambda^j p_i^j} \right)^{a_i^j} = \frac{u^j(q^j)}{\lambda^j} \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{a_i^j}{p_i^j} \right)^{a_i^j}$$

これから，

$$\lambda^j = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{a_i^j}{p_i^j} \right)^{a_i^j}$$

従って，（3．＊）により，

$$E^j = \lambda^j \mu^j = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i}{p_i^j} \right)^{a_i^j} \qquad (j=1, 2, \cdots\cdots\cdots, M)$$

さて，現実の価格および数量データから，パラメーター a_i^j の決定は各商品に対する支出シェアの一定を仮定すれば容易である。

すなわち（3．1）より，

$$\frac{a_i^j u^j(q^j)}{q_i^j} = \lambda^j p_i^j \tag{3.2}$$

が成立している。$\sum_{i=1}^{N} a_i^j = 1$ に注意すれば，

$$u^j(q^j) = \lambda^j \sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j \tag{3.3}$$

が得られる。従って，（3．2），（3．3）より，

$$a_i^j = \frac{p_i^j q_i^j}{\sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j}$$

が求まる。これは，総支出額のうち，第 i 財への支出額の比に等しい。

よって第 j − situationの交換比率は，

$$E^j = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i}{p_i^j} \right)^{\left(\frac{p_i^j q_i^j}{\sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j} \right)} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i}{p_i^j} \right)^{w_i^j}$$

$$w_i^j = \frac{p_i^j \; q_i^j}{\sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j}$$

（ii） 効用関数 $u^j(q)$ がＣＥＳ型のときの E^j の決定

$$u^j(q) = \left[\sum_{i=1}^{N} a_i^j (q_i)^{-\beta^j} \right]^{-\frac{1}{\beta^j}}$$

但し， $a_i^j > 0$, $\sum_{i=1}^{N} a_i^j = 1$， $\beta^j > -1$

(1)の場合と同じようにして， μ^j と λ^j を求める。若干の計算の後，

$$\mu^j = \left[\sum_{i=1}^{N} (a_i^j)^{\frac{1}{1+\beta^j}} (p_i)^{\frac{\beta^j}{1+\beta^j}} \right]^{\frac{1+\beta^j}{\beta^j}}$$

ならびに，

$$\lambda^j = \left[\sum_{i=1}^{N} (a_i^j)^{\frac{1}{1+\beta^j}} (p_i^j)^{\frac{\beta^j}{1+\beta^j}} \right]^{-\frac{1+\beta^j}{\beta^j}}$$

が得られる。従って，(3.*)により，

$$E^j = \lambda^j \mu^j = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (a_i^j)^{\frac{1}{1+\beta^j}} (p_i)^{\frac{\beta^j}{1+\beta^j}}}{\sum_{i=1}^{N} (a_i^j)^{\frac{1}{1+\beta^j}} (p_i^j)^{\frac{\beta^j}{1+\beta}}} \right]^{\frac{1+\beta^j}{\beta^j}}$$

さて，現実の価格および数量データから，パラメーター a_i^j， β^j を決定することは，次のようにしてできる。

$$\frac{\partial u^j(q^j)}{\partial q_i^j} = \frac{a_i^j (q_i^j)^{-(\beta^j+1)} u^j(q^j)}{\left[\sum_{i=1}^{N} a_i^j (q_i^j)^{-\beta^j} \right]}$$

だから，(3.1′) より，

$$\frac{a_i^j (q_i^j)^{-(\beta^j+1)} u^j(q^j)}{\left[\sum_{i=1}^{N} a_i^j (q_i^j)^{-\beta^j} \right]} = \lambda^j p_i^j \qquad (3.4)$$

(3.4)より，

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{N} a_i^j (q_i^j)^{-\beta^j} \right] u^j(q^j)}{\left[\sum_{i=1}^{N} a_i^j (q_i^j)^{-\beta^j} \right]} = \lambda^j \sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j$$

これから，

$$\lambda^j = \frac{u^j\,(q^j)}{\sum_{i=1}^{N} p_i^j\, q_i^j}$$

これを（3.4）に代入すると，

$$\frac{a_i^j\,(q_i^j)^{-(\beta^j+1)}\,u^j(q^j)}{\left[\sum_{i=1}^{N} a_i^j (q_i^j)^{-\beta^j}\right]} = \frac{p_i^j u^j(q^j)}{\sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j} \qquad (3.5)$$

従って，[1]

$$\left[\frac{a_i^j\,(q_i^j)^{-\beta^j}}{\sum_{i=1}^{N} a_i^j\,(q_i^j)^{-\beta^j}}\right] = \frac{p_i^j\; q_i^j}{\sum_{i=1}^{N} p_i^j\; q_i^j}$$

さて，次の平均支出シェア $\left\{ p_i^j\; q_i^j \Big/ \sum_{i=1}^{N} p_i^j\; q_i^j \right\}$ が一定であると仮定すると，（3.5）より，

$$\frac{a_i^j(q_i^j)^{-\beta^j}}{\sum_{i=1}^{N} a_i^j(q_i^j)^{-\beta^j}} = w_i^j \qquad (3.5')$$

但し，$w_i^j \equiv p_i^j\; q_i^j \Big/ \sum_{i=1}^{N} p_i^j\; q_i^j$

従って，

$$a_i^j = w_i^j\,(q_i^j)^{\beta^j}\,\left[\sum_{i=1}^{N} a_i^j\,(q_i^j)^{-\beta^j}\right] \qquad (3.6)$$

いま，$\sum_{i=1}^{N} a_i^j(q_i^j)^{-\beta^j} \equiv Q^j$ とおけば，（3.6）は，

$$a_i^j = w_i^j(q_i^j)^{\beta^j}\,Q^j \qquad (3.6')$$

となる。$\sum_{i=1}^{N} a_i^j = 1$ であることを考慮すれば，パラメーター a_i^j，β^j は決定できる。[2]
このようにして決定したパラメーター $\hat{a}_i^j$，$\hat{\beta}^j$ を用いれば，交換比率は，

$$E^j = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (\hat{a}_i^j)^{\frac{1}{1+\hat{\beta}^j}}\,(p_i)^{\frac{\hat{\beta}^j}{1+\hat{\beta}^j}}}{\sum_{i=1}^{N} (\hat{a}_i^j)^{\frac{1}{1+\hat{\beta}^j}}\,(p_i^j)^{\frac{\hat{\beta}^j}{1+\hat{\beta}^j}}}\right]^{\frac{1+\hat{\beta}^j}{\hat{\beta}^j}}$$

となる。

〔Appendix〕

$a_i^j\,(q_i^j)^{-\beta^j} \equiv z_i^j$ とおけば，

(3.5′)より，

$$z_i^j = w_i^j \left\{ \sum_{i=1}^{N} z_i^j \right\} \qquad (3.7)$$

あるいは，行列の形式に書き改めて，

$$W^j \cdot Z^j = O$$

但し，

$$W^j \equiv \begin{bmatrix} 1-w_1^j & -w_1^j & \cdots\cdots & -w_1^j \\ -w_2^j & 1-w_2^j & \cdots\cdots & -w_2^j \\ \vdots & & & \vdots \\ -w_N^j & -w_N^j & & 1-w_N^j \end{bmatrix}$$

$$Z^j \equiv [\, z_1^j,\ z_2^j,\ \cdots\cdots,\ z_N^j \,]'$$ [3)]

$$O \equiv [\, 0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0 \,]'$$

Wの第k列の列和を考えてみよう。W_i^jがShare weightであることに注意すれば，$\sum_{i=1}^{N} W_i^j = 1$であるから，すべての列和がゼロである。従って，定数倍を除いて一意の半正の解z^{j*}が存在する。[4)]

従って，$\sum_{i=1}^{N} z_i^{j*} = 1$になるように基準化すれば，(3.7)より明らかなように，

$$z_i^{j*} = w_i^j \qquad (3.8)$$

となる。変数をもとに置きもどせば，

$$a_i^j (q_i^j)^{-\hat{\beta}^j} = w_i^j$$

従って，

$$\hat{a}_i^j = w_i^j (q_i^j)^{\hat{\beta}^j} \qquad (3.8')$$

$\sum_{i=1}^{N} \hat{a}_i^j = 1$ に注意すれば，

$$1 = \sum_{i=1}^{N} w_i^j (q_i^j)^{\hat{\beta}^j} \qquad (3.9)$$

となり，よって，これから$\hat{\beta}^j$が求まる。この結果を(3.8′)に代入すれば，$\hat{a}_i^j$が求まる。[5)]

(iii) 効用関数 $u^j(q)$ がBergson型のときの E^j の決定

$$u^j(q) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j (q_i)^{b^j}, & (b^j \neq 0) \\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j \, [\log q_i], & (b^j = 0)^{6)} \end{cases}$$

但し，$\alpha_i^j > 0$ の形に表わされる効用函数は Bergson型の効用函数と呼ばれる。まず，

$$u^j(q) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j (q_i)^{b^j}$$

の場合について考えよう。

(1), (2) の函数形の場合と同じように最初に μ^j を求める。簡単な計算によって，

$$\mu^j = \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} (\alpha_i^j)^{-\frac{1}{b^j-1}} (p_i)^{\frac{b^j}{b^j-1}}\right]^{\frac{b^j-1}{b^j}}}{b^j \left\{u^j(q)\right\}^{\frac{b^j-1}{b^j}}} \tag{3.10}$$

が得られる。同様に，

$$\lambda^j = \frac{b^j \left\{u^j(q^j)\right\}^{\frac{b^j-1}{b^j}}}{\left\{\sum_{i=1}^{N} (\alpha_i^j)^{-\frac{1}{b^j-1}} (p_i^j)^{\frac{b^j-1}{b^j}}\right\}^{\frac{b^j-1}{b^j}}} \tag{3.11}$$

となる。よって E^j は，(3・*)から，

$$E^j = \lambda^j \mu^j = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (\alpha_i^j)^{-\frac{1}{b^j-1}} (p_i)^{\frac{b^j}{b^j-1}}}{\sum_{i=1}^{N} (\alpha_i^j)^{-\frac{1}{b^j-1}} (p_i^j)^{\frac{b^j}{b^j-1}}}\right]^{\frac{b^j-1}{b^j}}$$

として計算される。

さて，現実の価格データおよび数量データから，パラメーター α_i^j ，b^j を決定するためには次のようにすればよい。

(3.11) の誘導の過程で次の関係の成立は見易い。

$$b^j \alpha_i^j (q_i^j)^{b^j} = \lambda^j p_i^j q_i^j$$

および，

$$b^j \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j (q_i^j)^{b^j} = \lambda^j \sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j$$

従って，

$$\frac{\alpha_i^j (q_i^j)^{b^j}}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j (q_i^j)^{b^j}} = \frac{p_i^j \; q_i^j}{\sum_{i=1}^{N} p_i^j \; q_i^j} \equiv w_i^j \tag{3.13}$$

が得られる。ここで，w_i^j は，支出の Share weight である。

いま，$\alpha_i^j \ (q_i^j)^{b^j} \equiv z_i^j$ とおけば，(3.13) は，

$$z_i^j = w_i^j \sum_{i=1}^{N} z_i^j$$

となる。行列の形式表示にすると，

$$W^j \cdot Z^j = O$$

但し，

$$W^j = \begin{bmatrix} 1 - w_1^j & - w_1^j & \cdots\cdots & - w_1^j \\ - w_2^j & 1 - w_2^j & \cdots\cdots & - w_2^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ - w_N^j & - w_N^j & \cdots\cdots & 1 - w_N^j \end{bmatrix}$$

$$Z^j = [\ z_1^j,\ z_2^j,\ \cdots\cdots,\ z_N^j]'$$

$$O = [\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0\ ]'$$

w^j の各列和がゼロであり，対角要素は正，非対角要素は負であるから，体系 $W^j \cdot Z^j = O$ は，定数倍を除いて，一意に半正値解をもつ。[7)]

従って，いま，

$$\sum_{i=1}^{N} z_i^{j*} = 1$$

と基準化すれば，

$$\hat{\alpha}_i^j (q_i^j)^{\hat{b}^j} \equiv z_i^{j*} = w_i^j$$

が得られる。即ち，

$$\hat{\alpha}_i^j = w_i^j \ (q_i^j)^{-\hat{b}^j}$$

従って簡単のため，

$$\sum_{i=1}^{N} \hat{\alpha}_i^j = 1$$

と仮定すれば，[8)]

$$\sum_{i=1}^{N} \hat{\alpha}_i^j = 1 = \sum_{i=1}^{N} w_i^j (q_i^j)^{-\hat{b}^j}$$

から $\hat{b}^j$ が求まり，結局，$\hat{\alpha}_i^j$ も決定できる。従って，このようにして推定したパラメーター $\hat{\alpha}_i^j$，$\hat{b}^j$ を用いれば，E^j は，

$$E^j = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (\hat{\alpha}_i^j)^{-\frac{1}{\hat{b}^j-1}} (p_i)^{\frac{\hat{b}^j}{\hat{b}^j-1}}}{\sum_{i=1}^{N} (\hat{\alpha}_i^j)^{-\frac{1}{\hat{b}^j-1}} (p_i^j)^{\frac{\hat{b}^j}{\hat{b}^j-1}}} \right]^{\frac{\hat{b}^j-1}{\hat{b}^j}}$$

となる。

次に，

$$u^j(q) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j \ [\log \ q_i]$$

の場合について，同じような手続をくり返す。

計算の結果，

$$E^j = \lambda^j \mu^j = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i}{p_i^j} \right)^{\left(\frac{\alpha_i^j}{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k^j} \right)}$$

がえられる。そこで現実の価格および数量データから，パラメーター α_i^j を決定するのには次のように考えればよい。

この E^j の誘導の過程で，

$$\alpha_i^j = \lambda^j p_i^j q_i^j$$

および

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j = \lambda^j \sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j$$

が成立する。従って，

$$\frac{\alpha_i^j}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j} = \frac{p_i^j q_i^j}{\sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j} \equiv w_i^j \qquad (3.14)$$

ここで，w_i^j は，支出の Share weight である。(3.14)を行列の形式に書きあらためるならば，

$$W^j \cdot A^j = O$$

となる。但し，W^j は，前に出てきたように列和がすべてゼロで，対角要素がすべて正，非対角要素がすべて負である$N\times N$の行列である。また，

$$A^j = [\alpha_1^j, \alpha_2^j, \cdots\cdots\cdots, \alpha_N^j]'$$

である。

従って，定数倍を除いて一意な，半正値解を$W^j \cdot A^j = O$はもつ。いま，

$$\sum_{i=1}^{N} \hat{\alpha}_i^j = 1$$

と基準化すれば，[9] (3.14) からただちに，

$$\hat{\alpha}_i^j = w_i^j$$

を求めることができる。

従って，このようにして推定した $\hat{\alpha}_i^j$ を用いれば，E^j は，

$$E^j = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i}{p_i^j}\right)^{w_i^j}, \qquad \left(\sum_{i=1}^{N} \hat{\alpha}_i^j = 1 \text{の場合}\right)$$

または，

$$E^j = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i}{p_i^j}\right)^{\left(\frac{\hat{\alpha}_i^j}{\sum_{k=1}^{N} \hat{\alpha}_k^j}\right)} \qquad \left(\sum_{k=1}^{N} \hat{\alpha}_k^j = c^j \text{の場合}\right)$$

と表わすことができる。

(iv) 効用関数 $u^j(q)$ が Minkowski— Hölder 型のときの E^j の決定

いま効用函数 $u^j(q)$ が

$$u^j(q) = \left[\sum_{i=1}^{N} (q_i)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

但し，$\alpha \neq 0$，$1 > \alpha$と表わされるとき，この効用函数は Minkowski — Hölder 型であると言う。

このときも簡単な計算によって，まず μ^j を求めることができる。すなわち，

$$\mu^j = \left[\sum_{i=1}^{N} (p_i)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

である。λ^j についても同様である。

$$\lambda^j = \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^{N} (p_i^j)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}$$

故に，(3.*)により，

$$E^j = \lambda^j \mu^j = \left\{ \frac{[\sum_{i=1}^{N} (p_i)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}]}{[\sum_{i=1}^{N} (p_i^j)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}]} \right\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$ [10)]

さて，現実の価格および数量データから，αは次のようにして求められる。

λ^j の誘導の過程において，

$$u^j(q^j) \frac{(q_i^j)^{\alpha}}{[\sum_{i=1}^{N} (q_i^j)^{\alpha}]} = \lambda^j \ p_i^j \ q_i^j$$

および，

$$u^j(q^j) = \lambda^j \sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j$$

が得られる。従って，

$$\frac{(q_i^j)^{\alpha}}{[\sum_{i=1}^{N} (q_i^j)^{\alpha}]} = \frac{p_i^j \ q_i^j}{\sum_{i=1}^{N} p_i^j \ q_i^j} \equiv w_i^j \tag{3.15}$$

となる。ここで，w_i^j は，支出のShare weightである。

前の議論と同様に，(3.15)は，

$$W^j \ . \ Z^j = O$$

と表わされる。但し，W^jは，各列和がすべてゼロで，対角要素がすべて正，かつ，非対角要素が負である$N \times N$行列である。また，

$$Z^j = [\ z_1^j, \ z_2^j, \ \cdots\cdots\cdots\cdots, \ z_N^j \ ]'$$
$$O = [\ 0, \ 0, \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \ 0 \ ]'$$

で，$z_i^j \equiv (q_i^j)^{\alpha}$ である。

従って，(3.15)は，定数倍を除いて一意の半正値解$(z_i^j)^*$をもつ。いま，

$$\sum_{i=1}^{N} (z_i^j)^* = \sum_{i=1}^{N} (q_i^j)^{\hat{\alpha}} = 1$$

と基準化すれば，

$$(q_i^j)^{\hat{\alpha}} = w_i^j \qquad (\ i = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, \ N\ )$$

が得られる。これから$\hat{\alpha}$が求まる。即ち，

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{\log w_i^j}{\log q_i^j} \right] \qquad (\ i = 1, 2, \ \cdots\cdots\cdots\cdots, \ N\ )$$

従って，

$$E^j = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (p_i)^{\frac{\hat{a}}{\hat{a}-1}}}{\sum_{i=1}^{N} (p_i^j)^{\frac{\hat{a}}{\hat{a}-1}}} \right]^{\frac{\hat{a}-1}{\hat{a}}}$$

(V)　効用関数 $u^j(q)$ がACMSU型のときの E^j の決定

ACMSU 型の効用函数は,

$$u^j(q) = \prod_{s=1}^{S} [\, u^{j(s)}(q^{(s)}) \,]^{\rho_s^j}$$ [11]

ここで，

$$u^{j(s)}(q^{(s)}) = [\sum_{i \in N_s} \alpha_i^j \,(q_i)^{-\beta_s^j}\,]^{-\frac{1}{\beta_s^j}}$$

$$\alpha_i^j > 0,\ \ \rho_s^j > 0,\ \ \sum_{s=1}^{S} \rho_s^j = 1$$

$$-1 < \beta_s^j < \infty,\ \beta_s^j \neq 0$$

のように書くことができる。あるいは対数型で，

$$\log\, u^j(q) = \sum_{s=1}^{S} \rho_s^j \ \log\, u^{j(s)}(q^{(s)})$$

とも書く。まず μ^j を求める。若干の計算によって，

$$\mu^j = \frac{1}{\rho_s^j} \prod_{s=1}^{S} \left[\left\{ \sum_{i \in N_s} (\alpha_i^j)^{\sigma_s^j} (p_i)^{1-\sigma_s^j} \right\}^{\frac{1}{1-\sigma_s^j}} \right]^{\rho_s^j} \tag{3.16}$$

が得られる。

一方，同様の議論により，λ^j を求めるための計算をくり返すと，

$$\lambda^j = \frac{\rho_s^j}{\prod_{s=1}^{S} \left[\left\{ \sum_{i \in N_s} (\alpha_i^j)^{\sigma_s^j} (p_i^j)^{1-\sigma_s^j} \right\}^{\frac{1}{1-\sigma_s^j}} \right]^{\rho_s^j}} \tag{3.17}$$

が得られる。

(3.16), (3.17) を用い (3.*) を考慮すれば，

$$E^j = \lambda^j \mu^j = \frac{\prod_{s=1}^{S} \left[\left\{ \sum_{i \in N_s} (\alpha_i^j)^{\sigma_s^j} (p_i)^{1-\sigma_s^j} \right\}^{\frac{1}{1-\sigma_s^j}} \right]^{\rho_s^j}}{\prod_{s=1}^{S} \left[\left\{ \sum_{i \in N_s} (\alpha_i^j)^{\sigma_s^j} (p_i^j)^{1-\sigma_s^j} \right\}^{\frac{1}{1-\sigma_s^j}} \right]^{\rho_s^j}}$$

となる。

さて，現実の価格および数量データから，

$$\alpha_i^j,\ \beta_s^j\ (\equiv\frac{1}{\sigma_s^j}-1),\ \rho_s^j$$

を求める手続は次のようである。

(3.16′) より,

$$u^j(q^j)\rho_s^j\ [u^{j(s)}(q^{j(s)})]^{\beta_s^j}\alpha_i^j\ q_i^{j-\beta_s^j}=\lambda^j\ p_i^j\ q_i^j$$

および,

$$u^j(q^j)\rho_s^j\ [u^{j(s)}(q^{j(s)})]^{\beta_s^j}\sum_{i\in N_s}\alpha_i^j(q_i^j)^{-\beta_s^j}=\lambda^j\sum_{i\in N_s}p_i^j\ q_i^j$$

が得られる. 従って,

$$\frac{\alpha_i(q_i^j)^{-\beta_s^j}}{\sum_{i\in N_s}\alpha_i^j(q_i^j)^{-\beta_s^j}}=\frac{p_i^j\ q_i^j}{\sum_{i\in N_s}p_i^j\ q_i^j}\equiv w_{i,s}^j \tag{3.18}$$

ここで, $w_{i,s}^j$ は, 第 S グループの支出の share weight である。即ち,

$$\sum_{i\in N_s}w_{i,s}^j=1\quad \text{for all}\quad s=1,2,\cdots\cdots,\ S \tag{3.19}$$

いま, $z_{i,s}^j\equiv\alpha_i^j(q_i^j)^{-\beta_s^j}$ とおけば, (3.18) は行列の形式で,

$$W_s^j\cdot Z_s^j=O \tag{3.20}$$

となる。ただし, W_s^j は, すべての列和がゼロで, 対角要素がすべて正, かつ, 非対角要素がすべて負である正方行列であるから, 定数倍を除き, (3.20) は一意の半正値解をもつ。その解を $z_{i,s}^{j*}$ とし, いま,

$$\sum_{i\in N_s}z_{i,s}^{j*}=1\quad(\text{for all}\quad s=1,2,\cdots\cdots,\ S) \tag{3.21}$$

と基準化すれば, (3.38) から明らかなように,

$$z_{i,s}^{j*}\equiv\hat{\alpha}_i^j(q_i^j)^{-\hat{\beta}_s^j}=w_{i,s}^j$$

となる。

いま,

$$\sum_{i\in N_s}\alpha_i^j=C_s^j\quad(\text{コンスタント}) \tag{3.22}$$

と仮定すれば, [12]

$$\hat{\alpha}_i^j \;=\; w_{i,s}^j\,(q_i^j)^{\hat{\beta}_s^j}$$

から，$\hat{\beta}_s^j$が求まり，さらに，$\hat{\alpha}_i^j$も求まる。

一方，(3.41) の基準化により，

$$u^{j(s)}\,(q^{j(s)}) = 1$$

および，

$$u^j(q^j) = \;1$$

となるから，(3.16) より，

$$\rho_s^j\left\{\hat{\alpha}_i^j(q_i^j)^{-\hat{\beta}_s^j}\right\} = \lambda^j\, p_i^j\; q_i^j \tag{3.23}$$

が求まる。

$$\hat{\alpha}_i^j(q_i^j)^{-\hat{\beta}_s^j} \;=\; w_{i,\,s}^j \quad \equiv \frac{p_i^j\; q_i^j}{\sum\limits_{i\in N_s} p_i^j\; q_i^j}$$

を考慮すると，(3.23) は，

$$\hat{\rho}_s^j = \lambda^j\;\left\{\sum_{i\in N_s} p_i^j\; q_i^j\right\} \tag{3.24}$$

ところが，

$$\sum_{s=1}^{S}\;\hat{\rho}_s^j \;=\; 1$$

であるから，(3.24) より，

$$1 = \sum_{s=1}^{S}\hat{\rho}_s^j = \lambda^j\;\left\{\sum_{s=1}^{S}\;\sum_{i\in N_s} p_i^j\; q_i^j\right\}$$

従って，λ^jが求まる。この結果を (3.24) に代入すれば，

$$\hat{\rho}_s^j = \frac{\left\{\sum\limits_{i\in N_s} p_i^j\;\; q_i^j\right\}}{\sum\limits_{s=1}^{S}\left\{\sum\limits_{i\in N_s} p_i^j\;\; q_i^j\right\}} \tag{3.25}$$

となって，$\hat{\rho}_s^j$ が求まる。$\hat{\rho}_s^j$ は，全消費支出のうち，第 Sー商品群の支出の割合を示している。[13]
従って，これらの方法によって求めた $\hat{\alpha}_i^j$，$\hat{\beta}_s^j$，$\hat{\rho}_s^j$ を用いて，E^j を表現できる。換言すれば，[14)]

$$E^j \;=\; \prod_{s=1}^{S}\left\{\left[\frac{\sum\limits_{i\in N_s}(\alpha_i^j)^{\hat{\sigma}_s^j}\,(p_i)^{1-\hat{\sigma}_s^j}}{\sum\limits_{i\in N_s}(\hat{\alpha}_i^j)^{\hat{\sigma}_s^j}\,(p_i^j)^{1-\hat{\sigma}_s^j}}\right]^{\frac{1}{1-\hat{\sigma}_s^j}}\right\}^{\hat{\rho}_s^j}$$

(vi) 効用函数 $u^j(q)$ がKlein-Rubin型のときのE^jの決定

Klein-Rubin型の効用函数は,

$$u^j(q) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_i^j \log(q_i - s_i^j)$$

と書ける。ここで,

$$\alpha_i^j > 0, \; s_i^j \; (<0)$$ [15)]

は subsistence level における i 財の消費量を表わす。

計算によって,

$$\lambda^j \mu^j = \prod_{i=1}^{N} (p_i / p_i^j)^{(\alpha_i^j / \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j)}$$

が得られる。一方,

$$E^j = \operatorname{Min} \left\{ \sum_{i=1}^{N} p_i q_i \;\middle|\; u^j(q) = u^j(q^j) \right\} / \sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j$$

であることに注意するならば,

$$E^j = \left[\sum_{i=1}^{N} p_i s_i^j + \mu^j \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j \right] / \left[\sum_{i=1}^{N} p_i^j s_i^j + (1/\lambda^j) \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j \right]$$

となる。これを変形して,

$$E^j = \left[\lambda^j \sum_{i=1}^{N} p_i s_i^j + \lambda^j \mu^j \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j \right] / \left[\lambda^j \sum_{i=1}^{N} p_i^j s_i^j + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j \right]$$

$$E^j = \left[\sum_{i=1}^{N} p_i s_i^j / \sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j \right] + \left\{ \prod_{i=1}^{N} (p_i / p_i^j)^{z_i^j} \right\} \cdot \left\{ 1 - \left(\sum_{i=1}^{N} p_i^j s_i^j / \sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j \right) \right\}$$

となり, さらに整理すれば,

$$E^j = \left[\left(\sum_{i=1}^{N} p_i s_i^j \right) + \left\{ \prod_{i=1}^{N} (p_i / p_i^j)^{z_i^j} \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{N} p_i^j (q_i^j - s_i^j) \right\} \right] / \sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j$$

が求められる。ただし,

$$z_i^j = \left\{ p_i^j (q_i^j - s_i^j) \right\} / \sum_{i=1}^{N} p_i^j (p_i^j - s_i^j)$$

である。ここで,

$$s_i^j = 0 \quad (\text{for all } i)$$

のとき, E^j は効用函数が Cobb-Douglas 型である場合の E^j と一致する。

(vii) 効用函数 $u^j(q)$ が Addi－log型のときの E^j の決定

Addi－ log型の間接効用函数は,

$$u_I^j\ (m,\ p\ )=\ -\sum_{i=1}^{N}A_i^j\ (p_i/m)^{\alpha_i^j}$$

と書ける。間接効用函数に関する Roy の定理を用いると,

$$q_i^j=[\ A_i^j\alpha_i^j\ (\ p_i^j\ /\ m^j)^{\alpha_i^j-1}]/\ [\ \sum_{i=1}^{N}A_i^j\ \alpha_i^j(p_i^j/m^j)^{\alpha_i^j}\ \ ]$$

$$q_i\ =[\ A_i^j\alpha_i^j\ (p_i/\ m)^{\alpha_i^j-1}]\ /\ [\ \sum_{i=1}^{N}A_i^j\ \alpha_i^j(p_i/m)^{\alpha_i^j}]$$

である。いま,

$$\sum_{i=1}^{N}A_i^j\ \alpha_i^j\ (p_i^j\ /\ m^j)^{\alpha_i^j}\ =\ 1$$

と基準化して,

$$w_i^j\ =\ (\ p_i^j\ q_i^j)/(\ \sum_{i=1}^{N}p_i^j\ q_i^j\ )$$

に注意するならば,

$$w_i^j\ =\ A_i^j\ \alpha_i^j\ \ (\ p_i^j\ /\ m^j)^{\alpha_i^j}$$

が得られる。一方,

$$u_I^j\ \ (\ m\ ,p\ )=\ u_I^j\ (\ m^j,\ p^j)$$

から,

$$-\sum_{i=1}^{N}\ A_i^j\ (\ p_i/m\ )^{\alpha_i^j}\ =\ -\sum_{i=1}^{N}\ A_i^j\ (\ p_i^j/\ m^j\ )^{\alpha_i^j}$$

である。これを用いて m を m^j, p_i^j, p_i に関して解き，その値を $\hat{m}$ と表わすならば,

$$E^j\ =\ \hat{m}\ /\ m^j$$

となる。

Ⅳ　要約と今後の問題

前節では相似拡大的な効用函数のクラスの中から若干のなじみ深い函数型をえらび出して，E^j の決定とそのスペシフィケイションを議論した。第２節の議論に立戻って考えると，われわれは以下の問題に直面していることになる。まず(1.2)によって，i 商品の価格が,

$$\mathrm{P}_i = (\sum_j E^j\ p_i^j\ q_i^j)/\sum_j q_i^j, \quad i=1, \cdots\cdots\cdots, N$$

と与えられる。これに対して，第3節の議論によって E^j は次のように効用函数のクラス相違に従って特定化される。

(4.1) Cobb − Douglas函数

$$E^j = \prod_i (p_i/p_i^j)^{w_i^j}, \qquad w_i^j = p_i^j q_i^j / \sum_i p_i^j\ q_i^j$$

(4.2) CES函数

$$E^j = \left[\left(\sum_i (\hat{\alpha}_i^j)^{1/1+\hat{\beta}^j} (p_i)^{\hat{\beta}^j/1+\hat{\beta}^j}\right) / \left(\sum_i (\hat{\alpha}_i^j)^{1/1+\hat{\beta}^j} (p_i^j)^{\hat{\beta}^j/1+\hat{\beta}^j}\right)\right]^{\hat{\beta}^j/1+\hat{\beta}^j}$$

(4.3) Bergson函数

$$E^j = \left[\left(\sum_i (\hat{\alpha}_i^j)^{-(1/\hat{b}^j-1)} (p_i)^{\hat{b}^j/\hat{b}^j-1}\right) / \left(\sum_i (\hat{\alpha}_i^j)^{-(1/\hat{b}^j-1)} (p_i^j)^{\hat{b}^j/\hat{b}^j-1}\right)\right]^{\hat{b}^j/\hat{b}^j-1}$$

もしくは，

$$E^j = \prod_i (p_i/p_i^j)^{\hat{\alpha}_i/\sum_k \hat{\alpha}_k^j}$$

(4.4) Minkowski − Hölder 函数

$$E^j = \left[\left(\sum_i (p_i)^{\hat{\alpha}/\hat{\alpha}-1}\right) / \left(\sum_i (p_i^j)^{\hat{\alpha}/\hat{\alpha}-1}\right)\right]^{\hat{\alpha}/\hat{\alpha}-1}$$

$$\hat{\alpha} = \log\ w_i^j / \log\ q_i^j$$

(4.5) ACMUS 函数

$$E^j = \prod_s \left\{ \left[\left(\sum_{i\in N_s} (\hat{\alpha}_i^j)^{\hat{\alpha}_s^j} (p_i)^{1-\hat{\alpha}_s^j}\right) / \left(\sum_{i\in N_s} (\hat{\alpha}_i^j)^{\hat{\alpha}_s^j} (p_i^j)^{1-\hat{\alpha}_s^j}\right)\right]^{1/1-\hat{\alpha}_s^j} \right\}^{\hat{\rho}_s^j}$$

$$\hat{\alpha}_s^j = 1/1+\hat{\beta}_s^j, \quad \hat{\rho}_s^j = \sum_{i\in N_s} p_i^j\ q_i^j / \sum_s \left(\sum_{i\in N_s} p_i^j\ q_i^j\right)$$

(4.6) Klein − Rubin函数

$$E^j = \left[\left(\sum_i p_i s_i^j\right) + \left\{ \prod_i (p_i/p_i^j)^{z_i^j} \right\} \left\{ \sum_i p_i (q_i^j - s_i^j)\right\}\right] / \sum_i p_i^j\ q_i^j$$

$$z_i^j = \left\{ p_i^j (q_i^j - s_i^j)\right\} / \sum_i p_i^j\ (q_i^j - s_i^j)$$

(4.7)　Addi－ log函数

$$E^j = \hat{m} \;/\; m^j$$

これらの特定化において，各所得階層の商品別支出シェアの一定（ACMUS型の場合は，さらに商品群別の支出シェアの一定）が前提されていることを注意すべきであろう。

また，前節で示したように(4.1)－(4.5)のように特定化される E^j はいずれも第1節のデータ行列によって与えられる価格＝数量データによって決定することが可能である。

(1.2)と(4.1)－(4.5)のいずれか1つを連立させることによって，同じく価格＝数量データから p_i と E^j を計算することができる。この計算の可能性をさらに詳しく検討することは，もっぱらコムピューターのアルゴリズムの問題である。しかし第2節でも言及したように，もともと p_i と E^j を決定するアルゴリズムは(1.4)ないし(1.5)の形式に表現する不動点の存在の計算アルゴリズムを開発することに他ならない。この側面の分析との関連もさらに今後検討を必要とする話題であろう。

注

＊) この研究は筆者と鵜沢秀氏（一橋大学助手）との協同研究の成果である。とくに第3節の計算においては同氏の援助に負うところが多大であった。記して感謝の意を表する。なお本論文を引用せられる場合には筆者と同氏の連名で引用されることを希望する。

1) $\beta^j \to 0$ のとき $\alpha_i^j \to \dfrac{p_i^j q_i^j}{\sum_{i=1}^{N} p_i^j q_i^j}$ となる。

Cobb－Douglas型効用関数の項を参照。

2) その詳しい手続は，Appendix参照。

3) プライム(′)は，ベクトルの転置を示す。

4) Karlin〔1958〕, Mckenzie〔1959〕参照。

5) 特に，$\hat{\beta}^j \to 0$ に対して，$\hat{\alpha}_i^j \to w_i^j$ となり，極限のCobb－Douglas型の結果に対応している。

6) これは，Cobb－Douglas型の効用関数の場合に帰着することが示される。

7) Karlin〔1958〕, Mckenzie〔1959〕参照。

8) $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^j = c^j$（コンスタント）と仮定してもよい。

9) $\sum_{i=1}^{N} \hat{\alpha}_i^j = c^j$（コンスタント）としてもよい。

10) これは，CES 型において，$a_i^j \equiv \frac{1}{N}$，$-\beta^j = a$ とおいたものに等しい。

11) H.Uzawa〔1962〕, pp.295 − 296. Theorem 1, Shephard〔1970〕, pp.131 − 139 参照。
ACMSUは，Arrow − Chenery − Minhas − Solow − Uzawa の頭文字である。

12) $\sum_{i \in N_s} a_i^j = 1$ と仮定すると簡単である。

13) N_S がそれぞれ唯一の要素からなる集合のときは，CES型の結果に帰着する。

14) $\hat{\sigma}_s^j \equiv \frac{1}{1+\hat{\beta}_s^j}$ 。

15) s_i^j の符号は任意であっても以下の議論に変更はない。

参 考 文 献

R. C. Geary, "A Note on the Comparison of Exchange Rates and Purchasing Power between Countries", *Journal of the Royal Statistical Society,* Series A, 1958.

S. H. Khamis, "Properties and Conditions for the Existence of a New Type of Index Numbers", *Sankhya,* 1970.

D. S. Prasada Rao, "Existence and Uniqueness of a System of Consistent Index Numbers", *Keizai Kenkyu,* 1976.

P. A. Samuelson and S. Swamy, "Invariant Economic Index Numbers as Canonical Duality: Survey and Synthesis", *American Economic Review,* 1974.

H. Scarf, *The Computation of Economic Equilibria,* New Haven and London, 1973.

S. Karlin, *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics,* Reading, Mass., 1958.

L. W. Mckenzie, "On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market", *Econometrica,* 1959.

H. Uzawa, "Production Functions with Constant Elasticities of Substitution", *Review of Economic Studies,* 1962.

R. W. Shephard, *Theory of Cost and Production Functions,* Princeton, 1970.

D. W. Katzner, *Static Demand Theory,* London, 1970.