システムと制御, Vol. 29, No. 9, pp. 601～608, 1985

論　文

分権的システムにおける資源配分による統合問題の解析*

奥　田　和　重**

Analysis of Coordination Problem for Decentralization System by Resource Allocation*

by Kazushige OKUDA**

This paper presents a method for resource-allocation coordination problems of linear large-scale systems. The method is based on the subdifferential of an objective function (of the master problem) which is not differentiable at some points. It is shown that the subgradients constituting the subdifferential are equivalent to the negative simplex multipliers for the parametrized resources of the subproblem which is solved by a multiparametric linear programming associated with right-hand side of constraints. This paper makes it clear that the simplex multipliers can be employed to optimize the master problem by using this property. An algorithm is derived based on the method, and its efficiency is demonstrated by a simple numerical example.

1. 緒　言

組織構造が事業部制であるような分権的な生産システムで，各事業部が独自の目的関数と制約条件を用いて最適な生産計画をたて，その生産計画を実行するのに必要な資源の量と，そのときの目的関数値（たとえば，計画利益）を本部に提示する．本部がこれらの情報を用いて企業全体が最適となるような資源の配分を行えば，本部の意思決定に事業部が直接介入することができ，生産計画の最終的な意思決定が事業部においてなされる．これは事業部の自律性をより強くした分権システムであるといえる．分権システムに対する分割原理に基づいたアプローチは，部分問題の最適化がほかの部分問題と独立してなされるので，これが分権システムにおける部分システムの最適化と類似していることから適用されているものである．したがって，分割原理は前述したような分権的な生産システムの意思決定構造を明確に記述し表現しているとはいえない．このようなことから，分権システムの最適化解析へのアプローチを分割原理よりもComposition[1] の概念に基づいて行えば，分権システムの記述や意思決定過程を明確に表わすことができる．この観点からの研究はすでに報告されている[2]が，そこでは部分システムは実行可能なすべての生産計画を作成する必要があり，また上位システムはこれらの情報をもとに，システム全体を最適にする資源の配分を分岐限界法で求めている．したがって，部分システムから上位システムへ送られる情報の量は必要以上に多く，最適な資源の配分を得る効率を悪くしている．

本研究では，部分システムの最適化によって得られた実行可能解を用いて，上位システムがシステム全体を最適にするように資源の配分量を決定し，これを用いて部分システムが実行可能解を改良する逐次的な最適化法を提案する．この方法によって，部分システムはシステム全体の最適化に必要な実行可能解のみを計算することによって，効率よく最適解を得ることができることを示す．

2. 資源配分型統合問題

従来の資源配分型統合問題は，次のような分割可能な問題を対象としている．

$$\max. \sum_{i=1}^{m} f_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{1}$$

$$\text{Sub. to } \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i) \leq \boldsymbol{b}_0 \tag{2}$$

* 原稿受付　1984. 9. 12.
** 小樽商科大学 商学部　Faculty of Commerce Otaru University, : Otaru 047 JAPAN

$$\boldsymbol{x}_i \in X_i,\ i=1,\cdots,m \tag{3}$$

ここで，$X_i=\{\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)\leqq \boldsymbol{d}_i,\ \boldsymbol{x}_i\geqq \boldsymbol{0}\}$，$\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},\cdots,x_{in_i})^T$，$\boldsymbol{b}_0=(b_{01},\cdots,b_{0l})^T$，$\boldsymbol{d}_i=(d_{i1},\cdots,d_{ip_i})^T$，$\boldsymbol{g}_i=(g_{i1},\cdots,g_{il})^T$，$\boldsymbol{h}_i=(h_{i1},\cdots,h_{ip_i})^T$ である．f_i は実数値関数，$\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{h}_i$ はベクトル値関数である．この問題に対して次の仮定が成り立つものとする[3]．

(A.1) X_i は空でないコンパクト凸集合である．

(A.2) $f_i(\boldsymbol{x}_i)$ は凹関数でかつ X_i 上で微分可能である．

(A.3) $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ は X_i 上で凸関数でかつ微分可能である．

(A.4) 原問題（1）〜（3）は実行可能解をもつ．

各部分問題への資源配分量を $\boldsymbol{b}_i=(b_{i1},\cdots,b_{il})^T$ とすると，原問題は次のような m 個の部分問題に分割することができる．

$$\max.\ f_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{4}$$

$$\text{Sub. to } \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)\leqq \boldsymbol{b}_i \tag{5}$$

$$\boldsymbol{x}_i\in X_i \tag{6}$$

ここで，

$$\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_i\leqq \boldsymbol{b}_0 \tag{7}$$

である．主問題は（7）式のもとに（1）式を最大にするような $\boldsymbol{b}_i$ を決定するもので，次のようになる．

$$\max.\ \sum_{i=1}^{m} z_i(\boldsymbol{b}_i) \tag{8}$$

$$\text{Sub. to } \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_i\leqq \boldsymbol{b}_0 \tag{9}$$

$$\boldsymbol{b}_i\in Y_i,\ i=1,\cdots,m \tag{10}$$

ここで，

$$z_i(\boldsymbol{b}_i)=\text{Sup. }\boldsymbol{x}_i\{f_i(\boldsymbol{x}_i)\ \text{Sub.}_{\boldsymbol{x}_i}\ \text{to } \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)\leqq \boldsymbol{b}_i,\ \boldsymbol{x}_i\in X_i\} \tag{11}$$

$$Y_i=\{\boldsymbol{b}_i\in R^l|\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)\leqq \boldsymbol{b}_i,\ \text{ for some }\ \boldsymbol{x}_i\in X_i\} \tag{12}$$

である．この主問題は，次のような特徴をもつことが知られている[3,4]．

(C.1) $f_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ はそれぞれ凹関数と凸関数であるので，$z_i(\boldsymbol{b}_i)$ は Y_i 上で凹，かついたるところで微分不可能な関数である．

(C.2) Y_i は，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ と X_i の凸性から空でない凸集合である．

(C.3) 原問題が実行可能であることから，主問題も実行可能である．

(C.4) $f_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ が連続，X_i がコンパクトであることより，部分問題が実行可能であれば，いつでも最適解をもつ．

部分問題（4）〜（6）は，$\boldsymbol{b}_i$ が与えられれば比較的容易に解くことができるが，主問題（8）〜（9）では $z_i(\boldsymbol{b}_i)$ と Y_i を陽的に得ることが困難であるために，これらを陽的に得ることなしに最適解を得る種々の方法が提案されている．$f_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)$ がともに線形関数である問題に対しては，2レベル法[5]や直接配分法[6]などがある．2レベル法は，配分される資源に双対変数によって価格付けを行い，上位システムと部分システムの間の関係をゲームの問題としてとらえ，これに Robinson の模擬プレイ[7]を適用して解く方法である．直接配分法は，2レベル法の収束性に着目し，有限回のイテレーションで収束するように改良した方法である．

$f_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)$ がともに非線形関数である場合には，許容方向法[3,4]，接線近似法[3]などが提案されている．許容方向法は，ある実行可能な制約条件のもとで（8）式の方向導関数を最大にする方向を探し，資源の配分量を決定する方法である．この方法では，方向導関数を陽的に得ることが困難であるので，部分問題の Lagrange 乗数を用いた方向発見問題に置き換えている．接線近似法は，任意の $\boldsymbol{b}_i$ に対する $z_i(\boldsymbol{b}_i)$ の線形支持関数を用いて $z_i(\boldsymbol{b}_i)$ を近似する方法である．これによって，$z_i(\boldsymbol{b}_i)$ は線形支持関数で構成される連続な区間線形関数で近似できる．他方，Y_i は1，2次元以外の場合に外側線形化と内側線形化によって近似されている．

これらの方法は，いずれも資源を与えられた部分問題を解き，そのときの資源に関する双対変数を計算して，主問題における資源の再配分に用いるものである．ところで，部分システムが必要とする資源の量を計算することができれば，上位システムの資源配分に関する意思決定を制約することができ，前章で述べたように部分システムの自律性をより強く認めたものであるといえる．これを行うために，部分システムを部分問題（4）〜（6）で表わすことができるならば，$\boldsymbol{b}_i$ をパラメータとして取り扱うことによって，部分問題の目的関数と制約領域を $\boldsymbol{b}_i$ で表わすことができる．すなわち，$z_i(\boldsymbol{b}_i)$ と Y_i を $\boldsymbol{b}_i$ に関して陽的に表わすことができ，主問題の（8），(10) 式に部分システムの意思決定を反映することができる．もし $f_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)$ が線形関数であれば，部分問題は Gal[8] によって提案されたマルチパラメトリック線形計画法を用いて容易に解くことができる．したがって，システム全体の最適化を達成するための上位システムの解法が問題となる．

そこで本研究では，上位システムの評価基準の一つとして，部分システムの総和を用いることにする．すなわち，上位システムは（8）〜（9）式の主問題で表わされ

るものと仮定する．もしほかの評価基準を併わせて用いるのであれば，上位システムは多目的となる．また，$f_i(\boldsymbol{x}_i)$, $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$, $\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)$ がそれぞれ次のような線形関数である場合を対象とする．

$$f_i(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{x}_i \quad (13)$$

ここで，$\boldsymbol{c}_i=(c_{i1},\cdots,c_{in_i})^T$, $\boldsymbol{A}_i: l\times n_i$ 行列，$\boldsymbol{H}_i: p_i\times n_i$ 行列である．また，仮定（A.1），（A.4）はこの場合も成り立つものとする．

3. 部分問題

(13) 式で置き換えた部分問題は，次のようになる．

$$\max\ \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}_i \quad (14)$$

$$\text{Sub. to}\ \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i\leqq\boldsymbol{b}_i \quad (15)$$

$$\boldsymbol{x}_i\in X_i=\{\boldsymbol{x}_i\mid\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{x}_i\leqq\boldsymbol{d}_i,\ \boldsymbol{x}_i\geqq\boldsymbol{0}\} \quad (16)$$

これをマルチパラメトリック線形計画法の形に書き換えるために，次のようなベクトルと行列を定義する．

$$\boldsymbol{G}_i=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_i\\ \hline \boldsymbol{H}_i\end{pmatrix},\ \bar{\boldsymbol{d}}_i=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \hline \boldsymbol{d}_i\end{pmatrix},\ \boldsymbol{D}_i=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\ \hline \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

これらを用いて部分問題 (14)～(16) を書き換えると，次のようになる．

$$\max\ \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}_i \quad (17)$$

$$\text{Sub. to}\ \boldsymbol{G}_i\boldsymbol{x}_i\leqq\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i \quad (18)$$

$$\boldsymbol{x}_i\geqq\boldsymbol{0} \quad (19)$$

これにマルチパラメトリック線形計画法を適用すれば，ベクトル・パラメータ $\boldsymbol{b}_i$ に関する最適解と目的関数の最適値を得ることができる．そのために $\boldsymbol{b}_i$ を任意の $\hat{\boldsymbol{b}}_i\in R^l$ に固定し，そのときの最適解と最適値を $\hat{\boldsymbol{b}}_i$ について求めると，次のようになる．

$$\boldsymbol{x}_i(\hat{\boldsymbol{b}}_i)=\boldsymbol{B}_i^{-1}(\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{D}_i\hat{\boldsymbol{b}}_i)=\hat{\boldsymbol{d}}_i+\hat{D}_i\hat{\boldsymbol{b}}_i \quad (20)$$

$$z_i(\hat{\boldsymbol{b}}_i)=\boldsymbol{c}_{B_i}^T\boldsymbol{B}_i^{-1}(\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{D}_i\hat{\boldsymbol{b}}_i)=z_{\max i}+\hat{\boldsymbol{c}}_i^T\hat{\boldsymbol{b}}_i \quad (21)$$

ここで，$\boldsymbol{B}_i$ は $\boldsymbol{G}_i$ の最適基底行列，$\hat{\boldsymbol{d}}_i=\boldsymbol{B}_i^{-1}\bar{\boldsymbol{d}}_i$, $\hat{\boldsymbol{D}}_i=\boldsymbol{B}_i^{-1}\boldsymbol{D}_i$, $z_{\max i}=\boldsymbol{c}^T{}_{B_i}\boldsymbol{B}_i^{-1}\bar{\boldsymbol{d}}_i$, $\hat{\boldsymbol{c}}_i^T=\boldsymbol{c}_{B_i}^T\boldsymbol{B}_i^{-1}\boldsymbol{D}_i$ であり，$\boldsymbol{c}_{B_i}$ は $\boldsymbol{B}_i$ に対応する $\boldsymbol{c}_i$ の部分ベクトルである．(20) 式が最適実行可能解であるためには，

$$\hat{\boldsymbol{b}}_i\in Y_i^{(0)}=\{\boldsymbol{b}_i\mid\hat{\boldsymbol{d}}_i+\hat{D}_i\boldsymbol{b}_i\geqq\boldsymbol{0}\} \quad (22)$$

でなければならない．$\hat{\boldsymbol{b}}_i$を$\boldsymbol{b}_i'$ に変化させたとき $\boldsymbol{b}_i'$ が $Y_i^{(0)}$, すなわち不等式 $\hat{\boldsymbol{d}}_i+\hat{D}_i\boldsymbol{b}_i\geqq\boldsymbol{0}$ のいくつかの式が成り立たなくなれば，(20)式で与えられる基底解はもはや実行可能解でなくなる．このとき，最適基底変数の中で負となるものが少なくとも一つ存在し，他方非基底変数の中で正となるものが同じ数だけ存在する．前者が基底から出る変数の候補，後者が基底に入る変数の候補で，適当な規則を用いて候補のうちの一つを選ぶことによって，新しい最適な基底解を得ることができる．このようにして，パラメータ $\boldsymbol{b}_i$ を適当に変化させれば，いくつかの最適解と最適値ならびにこれらが成り立つ $\boldsymbol{b}_i$ の実行可能領域 $Y_i^{(0)}$ を得ることができる．これらが K_i 組存在するものと仮定し，各組を k_i で表わすことにする ($k_i=1,\cdots,K_i$)．第 k_i 番目の最適解，最適値ならびに $\boldsymbol{b}_i$ の実行可能領域を (20)～(22) 式の代わりに k_i を用いて，次のように表わすことにする．

$$\boldsymbol{x}_i^{(k_i)}=\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}(\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i)=\boldsymbol{d}_i^{(k_i)}+\boldsymbol{D}_i^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i \quad (23)$$

$$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)=\boldsymbol{c}_{B_i}^T\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}(\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i)=z_{\max i}^{(k_i)}+\boldsymbol{c}_i^{(k_i)T}\boldsymbol{b}_i \quad (24)$$

$$Y_i^{(k_i)}=\{\boldsymbol{b}_i\mid\boldsymbol{d}_i^{(k_i)}+\boldsymbol{D}_i^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i\geqq\boldsymbol{0}\} \quad (25)$$

ここで，$\boldsymbol{d}_i^{(k_i)}=\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}\bar{\boldsymbol{d}}_i$, $\boldsymbol{D}_i^{(k_i)}=\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}\boldsymbol{D}_i$, $z_{\max i}^{(k_i)}=\boldsymbol{c}_{B_i}^T\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}\bar{\boldsymbol{d}}_i$, $\boldsymbol{c}_i^{(k_i)}=\boldsymbol{c}_{B_i}^T\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}\boldsymbol{D}_i$, $k_i=1,\cdots,K_i$ である．

パラメトリック部分問題 (17)～(19) が最適解をもつ $\boldsymbol{b}_i$ の全領域は，次のようである．

$$M_i=\bigcup_{k_i=1}^{K_i}Y_i^{(k_i)} \quad (26)$$

この M_i 上で定義される $z_i(\boldsymbol{b}_i)$ を，$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ で表わすことにする．このとき，$Y_i^{(k_i)}$, M_i, $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$, $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ に関して，次の定理が知られている．

定理 1 (Gal[8]) $Y_i^{(k_i)}$, M_i はともに閉凸多面体である．∎

定理 2 (Gal[8]) $Y_i^{(k_i)}$ 上の関数 $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ と M_i 上で定義される関数 $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は，$Y_i^{(k_i)}$ 上で線形である．さらに，$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は M_i 上で連続な凹関数である．∎

以上のことから，$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は M_i 上のすべての点で微分可能でない次のような関数であることがわかる．

$$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)=\begin{cases} z_i^{(1_i)}(\boldsymbol{b}_i)=z_{\max i}^{(1_i)}+\boldsymbol{c}_i^{(1_i)T}\boldsymbol{b}_i, & \boldsymbol{b}_i\in Y_i^{(1_i)}\\ z_i^{(2_i)}(\boldsymbol{b}_i)=z_{\max i}^{(2_i)}+\boldsymbol{c}_i^{(2_i)T}\boldsymbol{b}_i, & \boldsymbol{b}_i\in Y_i^{(2_i)}\\ \vdots & \vdots \\ z_i^{(K_i)}(\boldsymbol{b}_i)=z_{\max i}^{(K_i)}+\boldsymbol{c}_i^{(K_i)T}\boldsymbol{b}_i, & \boldsymbol{b}_i\in Y_i^{(K_i)}\end{cases} \quad (27)$$

行列 $\boldsymbol{D}_i$ の要素は，定義により 0 または 1 の非負の値をとるので，これを $\{D_{ijq}\}_{j,q}\geqq 0$, $j=1,\cdots,l+p_i$, $q=1,\cdots,l$と表わせば，$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ と $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ に関して，次の定理が成り立つ．

定理 3 $\{D_{ijq}\}_{j,q}\geqq 0$ のとき，$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ は $\boldsymbol{b}_i$ について増加線形関数，$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は増加凹関数である．

証明 (24)式より

$$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)=\boldsymbol{c}_{B_i}^T\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}(\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i)=\boldsymbol{c}_{B_i}^T\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{c}_{B_i}^T\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i$$

ここで，$\boldsymbol{c}_{B_i}^T\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}\bar{\boldsymbol{d}}_i=z_{\max i}^{(k_i)}$, $\boldsymbol{c}_{B_i}^T\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}=\boldsymbol{u}_i^{(k_i)}$ とすると上式は，

$$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)=z_{\max i}^{(k_i)}+\boldsymbol{u}_i^{(k_i)T}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i$$

となる．ところで，$\boldsymbol{u}_i^{(k_i)}$ は $\boldsymbol{b}_i \in Y_i^{(k_i)}$ に対する部分問題 (17)～(19) の双対変数である．したがって，最適解においては $\boldsymbol{u}_i^{(k_i)} \geqq \boldsymbol{0}$ であり，また $z_{\max i}^{(k_i)}$ は定数項であるので，$\{D_{ijq}\}_{j,q} \geqq 0$ であれば $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ は増加線形関数である．このことと定理2より，$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は増加凹関数である． ∎

$\boldsymbol{B}_i^{(k_i)}$ と $Y_i^{(k_i)}$ に関して，以下のような定義をする．

定義1　部分問題 (17)～(19) において，二つの基底行列 $\boldsymbol{B}_i^{(1_i)}$ と $\boldsymbol{B}_i^{(2_i)}$ を考える．

(i) $\boldsymbol{B}_i^{(1_i)}$ と $\boldsymbol{B}_i^{(2_i)}$ を同時に最適とするような $\bar{\boldsymbol{b}}_i \in M_i$ が存在する．

(ii) $\boldsymbol{B}_i^{(1_i)}$ から $\boldsymbol{B}_i^{(2_i)}$ (または $\boldsymbol{B}_i^{(2_i)}$ から $\boldsymbol{B}_i^{(1_i)}$) へ1回の双対ピボット操作で基底変換できる．

$\boldsymbol{B}_i^{(1_i)}$ と $\boldsymbol{B}_i^{(2_i)}$ が上の条件 (i)，(ii) を満たすならば，$\boldsymbol{B}_i^{(1_i)}$ と $\boldsymbol{B}_i^{(2_i)}$ は隣接しているという．

定義2　$\boldsymbol{B}_i^{(1_i)}$ と $\boldsymbol{B}_i^{(2_i)}$ が隣接した基底行列であれば，それぞれに対応する $Y_i^{(1_i)}$ と $Y_i^{(2_i)}$ を隣接領域と呼ぶ．

4. 主　問　題

4.1 主問題の定式化

前章の展開により主問題 (8)～(10) は，次のようになる．

$$\max \sum_{i=1}^{m} z_i^0(\boldsymbol{b}_i) \tag{28}$$

$$\text{Sub. to } \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{b}_0 \tag{29}$$

$$\boldsymbol{b}_i \in M_i,\ i=1,\cdots,m \tag{30}$$

目的関数(28)を $Z^0(\boldsymbol{b})(=\sum_{i=1}^{m} z_i(\boldsymbol{b}_i))$，$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1^T,\cdots,\boldsymbol{b}_m^T)^T$ とし，制約条件 (29)，(30) を次のように定義する．

$$\Omega=\{\boldsymbol{b} \mid \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{b}_0,\ \boldsymbol{b}_i \in M_i,\ i=1,\cdots,m\} \tag{31}$$

このとき，$Z^0(\boldsymbol{b})$ と Ω に関して次の定理が成り立つ．

定理4　Ω は閉凸多面体である．また，$Z^0(\boldsymbol{b})$ は Ω 上で連続な増加凹関数である．

証明　定理1より，M_i は閉凸多面体であるので，Ω の定義式(31)から Ω は閉凸多面体である．次に定理2と3より，$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は連続な増加凹関数である．したがって，$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ の総和である $Z^0(\boldsymbol{b})$ もまた連続な増加凹関数となる． ∎

各部分問題の実行可能領域 $Y_i^{(k_i)}$ の中から，$\bigcap_{i=1}^{m} Y_i^{(k_i)} \neq \phi$ となるような任意の領域を選び，それを $Y_i^{(k_i)}$ とする．(29)式と $\boldsymbol{b}_i$ の非負条件を満たすようなすべての領域の組み合わせが J 組存在するものとし，各組を ω_ζ，$\zeta=1,\cdots,J$，$(1 \leqq J \leqq \prod_{i=1}^{m} K_i)$ で表わし，ω_ζ を構成する領域の添字集合を Γ_ζ とする．すなわち，

$$\omega_\zeta=\bigcap_{i=1}^{m} Y_i^{(k_i)} \cap \{\boldsymbol{b}_i \mid \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{b}_0,\ \boldsymbol{b}_i \geqq \boldsymbol{0}\},$$
$$\hat{k}_i \in \Gamma_\zeta,\ \zeta=1,\cdots,J \tag{32}$$

明らかに，

$$\bigcup_{\zeta=1}^{J} \omega_\zeta=\Omega \tag{33}$$

である．ω_ζ 上で定義される主問題の目的関数を $Z_\zeta(\boldsymbol{b})$ とすれば，これは次のようになる．

$$\begin{aligned} Z_\zeta(\boldsymbol{b}) &= \sum_{i=1}^{m} z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (z_{\max_i}^{(k_i)} + \boldsymbol{c}_i^{(k_i)T} \boldsymbol{b}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} z_{\max_i}^{(k_i)} + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{c}_i^{(k_i)T} \boldsymbol{b}_i \\ &= Z_{\max}^{(\zeta)} + \boldsymbol{C}^{(\zeta)T} \boldsymbol{b},\ \hat{k}_i \in \Gamma_\zeta \end{aligned} \tag{34}$$

ここで，$Z_{\max}^{(\zeta)}=\sum_{i=1}^{m} z_{\max_i}^{(k_i)}$，$\boldsymbol{C}^{(\zeta)}=(\boldsymbol{c}_1^{(k_1)T},\cdots,\boldsymbol{c}_m^{(k_m)T})^T$，$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1^T,\cdots,\boldsymbol{b}_m^T)^T$ である．

ω_ζ と Z_ζ に関して，次の定理が成り立つ．

定理5　ω_ζ は閉凸多面体である．また，$Z_\zeta(\boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{b}_i \in \omega_\zeta$ 上で増加線形関数である．

証明　定理1より $Y_i^{(k_i)}$ は閉凸多面体であるので，$\hat{k}_i \in \Gamma_\zeta$ なる m 個の $Y_i^{(k_i)}$ の共通部分も閉凸多面体となる．したがって，(32)式で定義される ω_ζ は閉凸多面体となる．次に，定理3より $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ が増加線形関数であるので，(34)式より $Z_\zeta(\boldsymbol{b})$ は ω_ζ 上で増加線形関数となる． ∎

Ω 上で定義される $Z_\zeta(\boldsymbol{b})$ を $Z^0(\boldsymbol{b})$ とすれば，定理4，5からこれは Ω 上のすべての点で微分可能でない関数であることがわかる．すなわち，

$$Z^0(\boldsymbol{b})=\begin{cases} Z_1(\boldsymbol{b})=Z_{\max}^{(1)}+\boldsymbol{C}^{(1)T}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\in\omega_1 \\ Z_2(\boldsymbol{b})=Z_{\max}^{(2)}+\boldsymbol{C}^{(2)T}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\in\omega_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ Z_J(\boldsymbol{b})=Z_{\max}^{(J)}+\boldsymbol{C}^{(J)T}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\in\omega_J \end{cases} \tag{35}$$

ω_ζ について次の定義を置く．

定義3　$Y_i^{(1_i)}$，$1_i \in \Gamma_{\zeta_1}$ と $Y_i^{(2_i)}$，$2_i \in \Gamma_{\zeta_2}$ をそれぞれ要素とする ω_{ζ_1} と ω_{ζ_2} を考える．もし $Y_i^{(1_i)}$ と $Y_i^{(2_i)}$ が隣接領域であれば，ω_{ζ_1} と ω_{ζ_2} も隣接領域と呼ぶ．

4.2 主問題の最適化

前節の展開より主問題 (28)～(30) は，次のようになる．

$$\max.\ Z^0(\boldsymbol{b}) \tag{36}$$

$$\text{Sub. to } \boldsymbol{b}_i \in \Omega,\ i=1,\cdots,m \tag{37}$$

ところで，$Z^0(\boldsymbol{b})$ と $z_i^0(\boldsymbol{b})$ をそれぞれ

$$Z^0(\boldsymbol{b})=-\infty,\quad \text{if } \boldsymbol{b}_i\notin\Omega \tag{38}$$

$$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)=-\infty,\ \text{if } \boldsymbol{b}_i\notin M_i,\ i=1,\cdots,m \tag{39}$$

として，目的関数の定義域をR^l全体に広げる．これは，

$$\text{dom } Z^0(\boldsymbol{b})=\Omega$$

$$\text{dom } z_i^0(\boldsymbol{b}_i)=M_i,\ i=1,\cdots,m$$

を意味する．このようにすることによって，$Z^0(\boldsymbol{b})$ は(35)式を考慮して次のような min 関数に置き換えることができる．

$$Z^+(\boldsymbol{b})=\min_\zeta Z_\zeta(\boldsymbol{b}) \tag{40}$$

これを用いて主問題 (36)，(37) を書き換えると次のようになる．

$$\max Z^+(\boldsymbol{b})=\min_\zeta Z_\zeta(\boldsymbol{b}) \tag{41}$$

$$\text{Sub. to } \sum_{i=1}^m \boldsymbol{b}_i\leqq\boldsymbol{b}_0 \tag{42}$$

$$\boldsymbol{b}_i\geqq\boldsymbol{0} \tag{43}$$

この主問題の最適解を得るために，次のような Lagrange 関数を定義する．

$$L_0(\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}_0)\triangleq Z^+(\boldsymbol{b})+\boldsymbol{u}_0^T(\sum_{i=1}^m\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{b}_0) \tag{44}$$

ここで，$\boldsymbol{u}_0=(u_{01},\cdots,u_{0l})^T$ である．最適性の必要条件は，微分可能関数に関する Kuhn-Tucker 条件に対応する次の定理によって与えることができる．

定理 6（福島[9]） Slater の制約想定を満たす $\boldsymbol{b}_i$，$i=1,\cdots,m$ が存在すると仮定する．そのとき，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$ が主問題 (41)～(43) の大域的最適解であるための必要十分条件は，

$$\partial L_0(\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{u}}_0)=\partial Z^+(\bar{\boldsymbol{b}})+\boldsymbol{E}^T\bar{\boldsymbol{u}}_0\ni 0 \tag{45}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}_0\geqq\boldsymbol{0} \tag{46}$$

$$\sum_{i=1}^m\boldsymbol{b}_i\leqq\boldsymbol{b}_0 \tag{47}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}_0^T(\sum_{i=1}^m\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{b}_0)=0 \tag{48}$$

を満たす Lagrange 乗数 $\bar{\boldsymbol{u}}_0\in R^l$ が存在することである．ここで，∂L_0，∂Z^+ は劣微分，$\boldsymbol{E}$は(42)式のΣに対応する行列である．∎

$Z^+(\boldsymbol{b})$ が連続な微分可能関数であれば，上の定理は明らかに Kuhn-Tucker 条件と一致する．

必要条件 (45)～(48) を用いて最適解を求めるには，Z^+ の劣微分を知る必要がある．(40)式で定義した min 関数の劣微分に関して，次の定理がある．

定理 7（福島[9]） (40)式で定義された凹関数について，intdom $Z^+(\boldsymbol{b})\neq\phi$ とすれば，$\boldsymbol{b}\in$intdom $Z^+(\boldsymbol{b})$ に対して，

$$\partial Z^+(\boldsymbol{b})\subset\text{Co}\{\partial Z_\zeta(\boldsymbol{b})\,|\,\zeta\in I(\boldsymbol{b})\} \tag{49}$$

が成り立つ．ここで，$I(\boldsymbol{b})=\{\zeta\,|\,Z^+(\boldsymbol{b})=Z_\zeta(\boldsymbol{b}),\ \zeta=1,\cdots,J\}$ である．∎

したがって，(34)式より

$$\partial Z_\zeta(\boldsymbol{b})=\text{Co}\{\partial z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i),\ \hat{k}_i\in\Gamma_\zeta\} \tag{50}$$

であるので，$\boldsymbol{b}_i\in\omega_\zeta$ に関する $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ の劣微分がわかれば，$\partial Z^+(\boldsymbol{b})$ を求めることができる．そのために，$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ の劣勾配を求める必要がある．点 $\boldsymbol{b}_i^1\in\omega_\zeta$ における $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ の劣勾配は，任意の $\boldsymbol{b}_i^2\in\omega_\zeta$ に対して，

$$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i^2)-z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i^1)\leqq\boldsymbol{\xi}_i(\boldsymbol{b}_i^2-\boldsymbol{b}_i^1) \tag{51}$$

を満たす $\boldsymbol{\xi}_i\in R^l$ である．点 $\boldsymbol{b}_i^1$ において，上式を満足する $\boldsymbol{\xi}_i$ 全体の集合が $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ の劣微分 $\partial z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ である．

劣勾配 $\boldsymbol{\xi}_i$ と部分問題 (17)～(19) の双対変数 $\boldsymbol{u}_i$ との間には，次のような関係が存在する．

定理 8 部分問題 (17)～(19) の Lagrange 関数を

$$L_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{u}_i)=\boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{u}_i^T[\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{x}_i-(\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i)] \tag{52}$$

とする．$\boldsymbol{x}_i^*$ を部分問題の解とすると，$-\boldsymbol{u}_i^{*T}\boldsymbol{D}_i$ が $\boldsymbol{b}_i$ における劣勾配，すなわち $-\boldsymbol{u}_i^{*T}\boldsymbol{D}_i\in\partial z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ であるための必要十分条件は，$(\boldsymbol{x}_i^*,\ \boldsymbol{u}_i^*)$ が L_i の鞍点条件

$$L_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{u}_i^*)\leqq L_i(\boldsymbol{x}_i^*,\boldsymbol{u}_i^*)\leqq L_i(\boldsymbol{x}_i^*,\boldsymbol{u}_i),$$
$$\boldsymbol{x}_i\in R^{n_i},\ \boldsymbol{u}_i\geqq\boldsymbol{0} \tag{53}$$

を満たすことである．

証明 $\bar{\boldsymbol{d}}_i=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{D}_i=\boldsymbol{I}$ のとき，$-\boldsymbol{u}_i^*$が$\boldsymbol{b}_i$ における劣勾配となることが Lasdon[10] によって証明されている．この定理の場合についても同様の方法で証明できる．以下の証明で添字 i，k_i は省略する．

⇐ (53)式より

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{*T}(\boldsymbol{Gx}-\bar{\boldsymbol{d}}-\boldsymbol{Db})\leqq\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$$
$$+\boldsymbol{u}^{*T}(\boldsymbol{Gx}^*-\bar{\boldsymbol{d}}-\boldsymbol{Db})$$

$\boldsymbol{x}^*$ が部分問題の解であれば，(23)式より $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{B}^{-1}(\bar{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{Db})$ で $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*=z(\boldsymbol{b})$，そのとき Kuhn-Tucker 条件より $\boldsymbol{u}^{*T}(\boldsymbol{Gx}^*-\bar{\boldsymbol{d}}-\boldsymbol{Db})=0$．したがって上式は次のようになる．

$$z(\boldsymbol{b})\geqq\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{*T}(\boldsymbol{Gx}-\bar{\boldsymbol{d}}-\boldsymbol{Db})$$

$\boldsymbol{Gx}\leqq\boldsymbol{\beta}=\bar{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{Db}'$ となるような $\boldsymbol{b}'\in R^l$ を選ぶ．この制約条件を満たす$\boldsymbol{x}$に対して，上式の $\boldsymbol{Gx}$ を$\boldsymbol{\beta}$で置き換えることができ，次のようになる．

$$z(\boldsymbol{b})\geqq\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{*T}(\boldsymbol{\beta}-\bar{\boldsymbol{d}}-\boldsymbol{Db})$$

$\boldsymbol{\beta}=\bar{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{Db}'$ であるから上式は，

$$z(\boldsymbol{b})\geqq\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{*T}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{b})$$

となる．$\boldsymbol{Gx}\leqq\boldsymbol{\beta}$ なる$\boldsymbol{x}$に関して上式の Sup をとれば，次のようになる．

$$z(\boldsymbol{b})\geqq z(\boldsymbol{b}')+\boldsymbol{u}^{*T}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{b})$$

$$z(\boldsymbol{b}')-z(\boldsymbol{b})\leqq-\boldsymbol{u}^{*T}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{b}) \tag{54}$$

$\boldsymbol{Gx} \leqq \boldsymbol{\beta}$ となるような $\boldsymbol{x}$ が存在しなければ $z(\boldsymbol{b}')=-\infty$ であるので，(54)式はすべての $\boldsymbol{b}' \in R^l$ に対して成り立つ．これは $-\boldsymbol{u}^{*T}\boldsymbol{D}$ が $\partial z(\boldsymbol{b})$ の要素であるための定義式である．

⇒　すべての $\boldsymbol{b}' \in R^l$ に対して(54)式が成り立つと仮定する．$\boldsymbol{b}'$ を

$$\bar{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{Db}'=\boldsymbol{Gx}^* \tag{55}$$

となるように選べば，これは

$$z(\boldsymbol{b}')=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*=z(\boldsymbol{b}) \tag{56}$$

を意味する．(55)，(56)式を(54)式に代入すれば，

$$\boldsymbol{u}^{*T}(\boldsymbol{Db}'-\boldsymbol{Db})$$
$$=\boldsymbol{u}^{*T}(\boldsymbol{Gx}^*-\bar{\boldsymbol{d}}-\boldsymbol{Db}) \leqq 0$$

を得る．$\boldsymbol{u}^* \geqq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{Gx}^*-\bar{\boldsymbol{d}}-\boldsymbol{Db} \leqq \boldsymbol{0}$ であるので，

$$\boldsymbol{u}^{*T}(\boldsymbol{Gx}^*-\bar{\boldsymbol{d}}-\boldsymbol{Db})=0 \tag{57}$$

および

$$\boldsymbol{Gx}^* \leqq \bar{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{Db}$$

となる．これらは $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ が L の鞍点であるための必要十分条件のうちの二つである．残りの一つを示すために，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*=z(\boldsymbol{b})$ と (57) 式を (54) 式に代入すると，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{u}^{*T}(\boldsymbol{Gx}^*-\bar{\boldsymbol{d}}-\boldsymbol{Db}) \geqq z(\boldsymbol{b}')$$
$$+\boldsymbol{u}^{*T}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{b}) \tag{58}$$

を得る．任意の $\boldsymbol{x} \in R^n$ を選んで，

$$\bar{\boldsymbol{d}}+\boldsymbol{Db}'=\boldsymbol{Gx} \tag{59}$$

とすると，$\boldsymbol{x}$ はこのときの部分問題に対して実行可能であるので，

$$z(\boldsymbol{b}') \geqq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \tag{60}$$

である．(58) 式に (59)，(60) 式を代入すると，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{u}^{*T}(\boldsymbol{Gx}^*-\bar{\boldsymbol{d}}-\boldsymbol{Db}) \geqq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$+\boldsymbol{u}^{*T}(\boldsymbol{Gx}-\bar{\boldsymbol{d}}-\boldsymbol{Db})$$

となる．$\boldsymbol{x}$ は任意であるので，上式は $L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) \geqq L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*)$ を意味する．　■

$\bar{\boldsymbol{b}}_i \in bdY_i^{(\hat{k}_i)}$，$\hat{k}_i \in \Gamma_\zeta$ に対して，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$ でアクティブになる制約式の添字集合を，

$$S_i^{(k_i)}=\{j \mid d_{ij}^{(k_i)}+\sum_{p=1}^{l} D_{ijq}^{(k_i)}\bar{b}_{iq}=0,$$
$$j=1,\cdots,l+p_i\} \tag{61}$$

とすると，$-\sum_{p=1}^{l} D_{ijq}^{(k_i)}b_{iq}=d_{ij}^{(k_i)}$，$j \in S_i^{(k_i)}$ を境界とするすべての隣接領域に関する双対変数のベクトルで構成される凸多面錐が，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$ における劣勾配の集合，すなわち劣微分となる．

以上の展開から，主問題 (41)～(43) を最適にするためには，部分問題 (17)～(19) の双対変数を求めればよいことがわかった．部分問題の双対変数 $\boldsymbol{u}_i$ と $\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{D}_i$ は，部分問題を解く際に用いるシンプレックス・タブロ内にシンプレックス乗数として現われる．すなわち，$\hat{k}_i$ 番目のタブロは次のようになる．

$\boldsymbol{B}_i^{(k_i)}$	$\boldsymbol{N}_i^{(k_i)}$	$\boldsymbol{d}_i^{(k_i)}$	$\boldsymbol{D}_i^{(k_i)}$
$\boldsymbol{c}_{B_i}{}^T\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}$	$\boldsymbol{0}$	$z_{\max i}{}^{(k_i)}$	$\boldsymbol{c}_{B_i}{}^T\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}\boldsymbol{D}_i$ $(=\boldsymbol{u}_i^{(k_i)T}\boldsymbol{D}_i)$

(62)

ここで，$\boldsymbol{N}_i^{(k_i)}$ は非基底行列である．もし主問題(41)～(43)の解 $\bar{\boldsymbol{b}}_i$ が制約条件の内点であれば，$\bar{\boldsymbol{u}}_0=\boldsymbol{0}$ で最適条件式 (45) は $\partial Z^+(\bar{\boldsymbol{b}}) \ni 0$ となり，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$ がこの条件を満たせば最適解である．これはシンプレックス・タブロ(62)の中のパラメータ $\boldsymbol{b}_i$ に関するシンプレックス乗数 $\boldsymbol{c}_{B_i}{}^T\boldsymbol{B}_i^{(k_i)-1}\boldsymbol{D}_i$ が0に等しくなったときに満たされる．

5. アルゴリズム

以上の展開から，最適解を得るためのアルゴリズムは，次のようになる．

ステップ1　任意の $\hat{\boldsymbol{b}}_i(\sum_{i=1}^{m}\hat{\boldsymbol{b}}_i \leqq \boldsymbol{b}_0,\ \hat{\boldsymbol{b}}_i \geqq \boldsymbol{0})$ を用いて各部分問題 (17)～(19) を解く．このときの実行可能領域 $Y_i^{(k_i)}$ を求める．$k_i=1_i$，$i=1,\cdots,m$，$\zeta=1$ とする．

ステップ2　ω_ζ，$Z_\zeta(\boldsymbol{b})$ を求め，主問題を解く．得られた最適解を $\bar{\boldsymbol{b}}_i$ とする．

ステップ3　$\bar{\boldsymbol{b}}_i \in bd\omega_\zeta$ となる部分問題について，$S_i^{(k_i)}$，$k_i \in \Gamma_\zeta$ を求め，$Y_i^{(k_i)} \ni \bar{\boldsymbol{b}}_i$ の隣接領域を求める．すべての隣接領域について，$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ の劣勾配を計算する．もし $\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{0}$，$i=1,\cdots,m$ であれば最適解が得られており，計算を終了する．そうでなければステップ4へいく．

ステップ4　$\boldsymbol{\xi}_i$ の最も大きな隣接領域を $Y_i^{(k_i+1)}$ とし，$\omega_{\zeta+1}$，$Z_{\zeta+1}(\boldsymbol{b})$ を求める．主問題の制約条件に $-\boldsymbol{D}_i^{(k_i+1)}\boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{d}_i^{(k_i+1)}$，$k_i \in \Gamma_{\zeta+1}$ を加え，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$ が解となるようにタブロを変換する．$\zeta \leftarrow \zeta+1$，$k_i \leftarrow k_i+1$ としてステップ2へ戻る．

Note：

(1)　$Z^0(\boldsymbol{b})$ は連続な増加凹関数であるので，$Z^0(\boldsymbol{b})$ の増加方向に部分領域をたどっていけば，必ず最適解に達する．

(2)　ステップ2の主問題は，ω_ζ について解けばよいので次のようになる．

$$\text{max.}\ Z_\zeta(\boldsymbol{b})$$

$$\text{Sub. to}\ \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{b}_0$$
$$-\boldsymbol{D}_i^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{d}_i^{(k_i)},\ k_i \in \Gamma_\zeta,\ i=1,\cdots,m$$
$$\boldsymbol{b}_i \geqq \boldsymbol{0}$$

この制約条件は，(32)式より $\boldsymbol{b}_i \in \omega_\zeta$ と等価である．

（3） ステップ3における計算の停止基準は，$\boldsymbol{\xi}_i=\mathbf{0}$ かあるいは隣接領域が存在しないことである．また，隣接領域の $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ の劣勾配は，一回の双対ピボット操作によってシンプレックス乗数を計算すればよいので，新たに $Y_i^{(k_i)}$ を求める必要はない．

（4） ステップ4で新しい制約式 $-\boldsymbol{D}_i^{(k_i+1)}\boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{d}_i^{(k_i+1)}$ を追加し，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$ が解となるように掃出し法でタブロを変換すると，ω_ζ を構成している $-\boldsymbol{D}_i^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{d}_i^{(k_i)}$ は冗長制約としてタブロ上に現れるので容易に除くことができる．また，境界となる制約式は不等号の向きを逆にすればよい．

（5） 部分問題は，一度最適解が求まると一回の双対ピボット操作によって次々と新しい隣接領域を求めることができる．しかしながら，主問題はイテレーションのたびごとに新しい線形計画問題を解く必要があるために，ω_ζ の最適解を $\omega_{\zeta+1}$ の初期実行可能解として利用すれば，計算量を節約することができる．

6. 数値計算例

計算例として，次のような例題を考える．

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & 4x_{11}+3x_{12}+5x_{21}+8x_{22} \\
\text{Sub. to } & 2x_{11}+x_{12}+x_{21}+3x_{22} \leqq 96 \\
& x_{11}+x_{12}+x_{21}+2x_{22} \leqq 58 \\
& 2x_{11}+3x_{12} \leqq 36 \\
& 3x_{21}+4x_{22} \leqq 48 \\
& x_{11},\ x_{12},\ x_{21},\ x_{22} \geqq 0
\end{aligned}
$$

部分問題と主問題の資源配分の制約条件は，次のようになる．

部分問題1：

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & 4x_{11}+3x_{12} \\
\text{Sub. to } & 2x_{11}+x_{12} \leqq b_{11} \\
& x_{11}+x_{12} \leqq b_{12} \\
& 2x_{11}+3x_{12} \leqq 36 \\
& x_{11},\ x_{12} \geqq 0
\end{aligned}
$$

部分問題2：

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & 5x_{21}+8x_{22} \\
\text{Sub. to } & x_{21}+3x_{22} \leqq b_{21} \\
& x_{21}+2x_{22} \leqq b_{22} \\
& 3x_{21}+4x_{22} \leqq 48 \\
& x_{21},\ x_{22} \geqq 0
\end{aligned}
$$

資源配分制約：

$$
\begin{aligned}
b_{11} + b_{21} & \leqq 96 \\
b_{12} + b_{22} & \leqq 58
\end{aligned}
$$

資源の初期配分量を $\hat{b}_{11}=20$，$\hat{b}_{12}=13$，$\hat{b}_{21}=24$，$\hat{b}_{22}=18$とすると，部分問題1と部分問題2のシンプレックス・タブロは，Table 1 のようになる．Table 1 でタブロ

Table 1 Simplex tableau

Tableau No.	Subproblem 1									Subproblem 2								
	Basic Variables	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	d_1	b_{11}	b_{12}	Basic Variables	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	d_2	b_{21}	b_{22}
I	3	2	1	1	0	0	20	1	0	3	1	3	1	0	0	24	1	0
	4	1	1	0	1	0	13	0	1	4	1	2	0	1	0	18	0	1
	5	2	3	0	0	1	36	0	0	5	3	4	0	0	1	48	0	0
		−4	−3	0	0	0	0	0	0		−5	−8	0	0	0	0	0	0
II	1	1	0	1	−1	0	7	1	−1	2	0	1	0	3/2	−1/2	3	0	3/2
	2	0	1	〔−1〕	2	0	6	−1	2	1	1	0	0	〔−2〕	1	12	0	−2
	5	0	0	1	〔−4〕	1	4	1	−4	3	0	0	1	〔−5/2〕	1/2	3	1	−5/2
		0	0	1	2	0	46	1	2		0	0	0	2	1	84	0	2
III	1	1	1	0	1	0	13	0	1	2	3/4	1	0	0	1/4	12	0	0
	3	0	−1	1	〔−2〕	0	−6	1	−2	4	−1/2	0	0	1	−1/2	−6	0	1
	5	0	1	0	−2	1	10	0	−2	3	−5/4	0	1	0	−3/4	−12	1	0
		0	1	0	4	0	52	0	4		1	0	0	0	2	96	0	0
IV	1	1	0	3/4	0	−1/4	6	3/4	0	2	0	1	3/5	0	−1/5	24/5	3/5	0
	2	0	1	〔−1/2〕	0	1/2	8	−1/2	0	1	1	0	−4/5	0	3/5	48/5	−4/5	0
	4	0	0	−1/4	1	−1/4	−1	−1/4	1	4	0	0	−2/5	1	−1/5	−6/5	−2/5	1
		0	0	3/2	0	1/2	48	3/2	0		0	0	4/5	0	7/5	432/5	4/5	0
V	1	1	3/2	0	0	−1/2	18	0	0									
	3	0	−2	1	0	0	−16	1	0									
	4	0	−1/2	0	1	1/2	−5	0	1									
		0	3	0	0	2	72	0	0									

Iは初期タブロで，タブロIIは $k_i=1,\ i=1,2$ の初期最適解のタブロである．このときの最適解と最適値および $\boldsymbol{b}_i$ の実行可能領域は，次のようになる．

最適解：$\boldsymbol{x}_1^{(1_1)}=\begin{pmatrix}7+b_{11}-b_{12}\\6-b_{11}+2b_{12}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2^{(1_2)}=\begin{pmatrix}12-2b_{22}\\3+3/2b_{22}\end{pmatrix}$

最適値：$z_1^{(1_1)}=46+b_{11}+2b_{12},\ z_2^{(1_2)}=84+2b_{22}$

実行可能領域：

$$Y_1^{(1_1)}=\{(b_{11},b_{12})\,|-b_{11}+b_{12}\leqq 7,\ b_{11}-2b_{12}\leqq 6,\ -b_{11}+4b_{12}\leqq 4\}$$

$$Y_2^{(1_2)}=\{(b_{21},b_{22})\,|\,6\geqq b_{22}\geqq -2,\ -2b_{21}+5b_{22}\leqq 6\}$$

このときの劣勾配は，$-\boldsymbol{u}_1^{(1_1)T}\boldsymbol{D}_1=(-1,\ -2)^T$，$-\boldsymbol{u}_2^{(1_2)T}\boldsymbol{D}_2=(0,\ -2)^T$ である．資源の残余配分可能量は，資源1について52(=96−20−24)，資源2について27(=58−13−18)であるので，主問題は次のようになる．

$$\begin{aligned}\max.\ & b_{11}+2b_{12}\qquad +2b_{22}+130\\ \text{Sub. to}\ & b_{11}\qquad +b_{21}\qquad \leqq 52\\ & b_{12}\qquad +b_{22}\qquad \leqq 27\\ & (b_{11},\ b_{12})\in Y_1^{(1_1)},\ (b_{21},\ b_{22})\in Y_2^{(1_2)}\\ & b_{11},\ b_{12}\geqq 0,\ b_{21},\ b_{22}\geqq 0\end{aligned}$$

これを解くと，$\bar{\boldsymbol{b}}_1=(16,\ 5)^T$，$\bar{\boldsymbol{b}}_2=(12,\ 6)^T$，$Z_1=168$ となる．

$\bar{\boldsymbol{b}}_1$は，$Y_1^{(1_1)}$ を構成する $-b_{11}+4b_{12}=4$ と $b_{11}-2b_{12}=6$ の交点である．したがって，$Y_1^{(1_1)}$ の隣接領域は $-b_{11}+4b_{12}=4$ を境界とするものと，$b_{11}-2b_{12}=6$ を境界とするものがある．前者については，基底変数 x_{12} と非基底変数 x_{13} が入れ替わる（タブロIII）．後者については，x_{15} と x_{14} が入れ替わる（タブロIV）．$\bar{\boldsymbol{b}}_2$ については，$Y_2^{(1_2)}$ を構成する $-2b_{21}+5b_{22}=6$ と $b_{22}=6$ の交点に $\bar{\boldsymbol{b}}_2$ が存在し，それぞれを境界とする隣接領域が存在する．前者では x_{21} が，後者では x_{23} が基底から出る変数となり，両者とも x_{24} が基底に入る変数となる（タブロIII，IV）．このときの劣勾配は，それぞれ $z_1^{(2_1)}$ に関して $(-3/2,\ 0)^T$ および $(0,\ -4)^T$ であり，$z_2^{(2_2)}$ については $(0,\ 0)^T$，$(-4/5,\ 0)^T$ である．したがって，部分問題1では $-b_{11}+4b_{12}=4$ に関する隣接領域を採用し，部分問題2では $-2b_{21}+5b_{22}=6$ に関する隣接領域を採用する．その結果，主問題に追加する制約式は次のようになる．

部分問題1：$-8\leqq b_{11}\leqq 16,\ -b_{11}+4b_{12}\geqq 4$

部分問題2：$b_{21}\geqq 12,\ b_{22}\geqq 6$

主問題の目的関数は $Z_2=3/2b_{11}+144$ で，最適解は $\bar{\boldsymbol{b}}_1=(16,\ 5)^T$，$\bar{\boldsymbol{b}}_2=(12,\ 6)^T$，$Z_2=168$ となる．

部分問題2はすでに劣勾配が0となっているが，部分問題1はまだ0になっていない．そこで，$b_{11}=16$ に関する隣接領域について基底変換すると，タブロVのようになり，劣勾配は0となる．したがって，最終的な最適解は次のようになる．

$$\boldsymbol{x}_1^*=(18,\ 0)^T,\ \boldsymbol{x}_2^*=(0,\ 12)^T$$

$$\boldsymbol{b}_1^*=(16,\ 5)^T,\ \boldsymbol{b}_2^*=(12,\ 6)^T$$

$$Z^*=168$$

7. 結　　言

本研究では，分権的システムの資源配分による統合問題に対する Composition の概念に基づいた解法を提案した．部分問題にマルチパラメトリック線形計画法を適用することによって，目的関数と実行可能領域を資源の配分量に関して陽的に得ることができることを示した．上位システムにおけるシステム全体の最適化のために，部分問題のシンプレックス・タブロ内に現れる双対変数の値が利用できることを明らかにした．これらのことに基づいた最適化アルゴリズムを提案し，その有効性を計算例を用いて例示した．

参 考 文 献

1) D.J. Sweeney, E.P. Winkofsky, P. Roy & N.R. Baker : Composition vs. Decomposition ; Two Approaches to Modeling Organizational Decision Processes, Management Science, Vol. 24, No. 14, pp. 1491～1499 (1978)
2) 奥田，人見：資源配分型2階層分権的システムの解析；日本経営工学会誌，32巻，5号，pp. 365～371（昭.56）
3) A.M. Geoffrion : Primal Resource-Directive Approaches for Optimizing Nonlinear Decomposable Systems ; Operations Research, Vol. 18, No. 3, pp. 375～403 (1970)
4) G.J. Silverman : Primal Decomposition of Mathematical Programs by Resource Allocation ; I-Basic Theory and a Direction-Finding Procedure, Operations Research, Vol. 20, No. 1, pp. 58～74 (1972)
5) J. Kornai & T. Lipták : Two-Level Planning ; Econometrica, Vol. 33, No. 1, pp. 141～169 (1965)
6) A. Ten Kate: Decomposition of Linear Programs by Direct Distribution ; Econometrica, Vol. 40, No. 5, pp. 883～898 (1972)
7) J. Robinson : An Iterative Method of Solving a Game ; Annals of Mathematics, Vol. 54, No. 2, pp. 296～301 (1951)
8) T. Gal : Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics ; McGraw-Hill, pp. 76～171 (1979)
9) 福島：非線形最適化の理論，産業図書，pp. 139～152（昭.55）
10) L.S. Lasdon（志水訳）：大規模システムの最適化理論，日刊工業新聞社，pp. 476～477（昭.48）