MATHEMATICA の経済学への応用 (1)

―― コブ＝ダグラス型効用関数の場合の消費者均衡理論 ――

小樽商科大学商学部経済学科　鵜　沢　　　秀

0．はじめに

科学・技術ソフトウエアシステム MATHEMATICA[1]には非常に多くの組み込み関数があり[2]，また標準パッケージを用いることができる。数値計算だけでなく，数式処理が簡単にできる特徴を持つ。たとえば，記号を含んだ式の形を保ったままで関数を微分したり，積分したりすることが容易にできる。また，２次元グラフはもちろん，３次元画像を比較的簡単に作成，かつ表示できる。しかも後から任意の範囲，見る角度などを変えたいときは，適切なパラメータを若干変えることで実現できる。

筆者はこれまで MATHEMATICA の持つ，このような技法を用いて，産業組織論で扱われる，クールノー均衡やシュタッケルベルク均衡を３次元画像のアニメーションとして表示する試みを続けてきた[3]。

この小論では，ミクロ経済学の１分野である，消費者均衡理論を取り上げる。本論は次のような構成からなる。まず，第１節では消費者均衡の問題を定式化

1）MATHEMATICA は Stephen Wolfram により，最初は科学計算を目的に開発され，1988年にリリースされた。現在では Stephen Wolfram に指導された，Wolfram Research, Inc. により開発が進められ，金融工学を含む多方面への応用が可能な数式処理システムとなっている。現時点（2006年１月）での最新版は2005年７月にリリースされた Version 5.2である。詳しくは，http://www.wolfram.com/ を参照せよ。

2）組み込み関数の数は，筆者の利用している Version 5.0では1226，また Version 5.1では1270もある。

3）uzawa［2001］，鵜沢［2000a，2000b，2001，2002，2005］を参照せよ。

する。コブ＝ダグラス型効用関数のときの，消費者均衡点をMATHEMATICAの数式処理計算で求める。第2節では，コブ＝ダグラス型効用関数のパラメータを指定して，3次元空間における効用曲面を描く。次に，効用曲面の特徴を調べる。また，3次元空間における所得制約平面を求める。この2つの図形を利用して，消費者均衡点を表示する。第3節では，消費者均衡点の特徴を複数の方法で図形的に明らかにする。第4節では，第1財の価格変化による比較静学をアニメーションで表示し，価格消費曲線を求める。次に，所得変化による比較静学をアニメーションで表示し，所得消費曲線を求める。第5節では，コブ＝ダグラス型効用関数の場合，嗜好の程度を示すパラメータを変化させたときの，効用曲面の変化をアニメーションで示す。次に，嗜好の程度を示すパラメータを変化させたときの，消費者均衡点の移動および効用水準の変化をアニメーションで表示する[4)]。最後の第6節では，今後の課題について簡単に述べる。

1．消費者行動問題の設定とMATHEMATICAによる解法

議論を簡単にするために，2財を消費する，消費者行動を次のように定式化する。

消費者は与えられた予算制約のもとで，効用を最大化する。

ここで，財1の価格，財2の価格をそれぞれp_1，p_2とし，消費者の所得をmとすると，予算制約式は

(1) $p_1x_1+p_2x_2=m$

となる。

4）コブ＝ダグラス型効用関数の場合，式(2)におけるパラメータβの値は消費者の嗜好を反映している。このような3次元画像を用いたアニメーションの試みは，筆者の知る限り初めてである。

また，消費者の効用関数を次の形で示すような，コブ＝ダグラス型効用関数とする[5)]。

(2) $U(x_1, x_2) = \alpha x_1^{\beta} x_2^{(1-\beta)}$

したがって，消費者の最適問題は次のように定式化できる[6)]。

(3) $\max_{\{x_1, x_2\}} \; U(x_1, x_2) = \alpha x_1^{\beta} x_2^{(1-\beta)}$

subject to $p_1x_1 + p_2x_2 = m$

さて， MATHEMATICAの数式処理を利用して消費者均衡点を求めよう。

コブ＝ダグラス型効用関数をMATHEMATICAの書式に従い，式(4)のように定義する。

(4) u [x1_, x2_, aa _, bb _] := aa*x1^bb*x2^ (1−bb)

ここで， x1と x2はそれぞれ x_1と x_2を，また，非負のパラメータ aa と bb はそれぞれ， αとβを示す[7)]。なお，^はベキ乗を示す。

まず，第1財の限界効用 mu1を求めよう。式(5)のように入力すると，その答えが次の行に表示される。

(5) mu1 = D [u [x1, x2, aa, bb], x1]

(6) aa bb $x1^{-1+bb}$ $x2^{1-bb}$

同様にして，第2財の限界効用 mu2を求めよう。

5）別のタイプの効用関数を選ぶこともできる。もちろん，消費者は一般に異なった消費水準で効用を最大にする。

6）パラメータαは正数，βは0以上で1以下の数とする。また，価格p_1，p_2は正数，所得mは非負の数，消費量x_1，x_2は非負の数である。

7）MATHEMATICAではx_1，x_2，α，およびβなどの記号はもちろん入力や出力（表示）でき，そのまま計算もできる。ここでは入力の便宜を優先した。

(7)　mu2＝D [u [x1, x2, aa, bb], x2]

(8)　$aa(1-bb)\,x1^{bb}\,x2^{-bb}$

消費者均衡の点では，限界代替率（すなわち，限界効用の比（mu1/mu2））が価格比（p1/p2）に等しくなっていて，さらに，予算制約式を満たしている[8]。この2つの条件を連立して，x1とx2について解くために，Solve関数を用いる。式(9)のように入力すると，次の行にそれぞれ消費者均衡となる，x1とx2が求められる[9]。

(9)　sol＝Solve [{mu1/mu2－p1/p2==0, p1*x1＋p2*x2－m==0}, {x1, x2}]

(10)　$\left\{\left\{x1 \rightarrow \frac{bb\ m}{p1},\ x2 \rightarrow -\frac{(-1+bb)\ m}{p2}\right\}\right\}$

消費者均衡のときの消費量を需要量と呼ぶ。

第1財の需要量x1optは，式(11)のように入力すると得られる。

(11)　x1opt＝x1/. sol

(12)　$\left\{\frac{bb\ m}{p1}\right\}$

これは，価格p1と所得mの関数となっている。以後，必要に応じて，x1optを第1財の需要関数と呼ぶことにする。

同様に，第2財の需要量x2optは，式(13)のように入力すると得られる。

8）ミクロ経済学の標準的なテキスト，たとえば，武隈［1999］あるいは西村［1990］を参照されたい。

9）パラメータaaとbbの値が数値で与えられているとき（たとえば，aa＝10，bb＝0.25のとき）は，ラグランジュ未定係数法で求めることもできる。また，この解が最大値になっていることを確認するプログラムについても，小林［1996］を参照せよ。パラメータaaとbbの値が記号で与えられているとき，小林のプログラムを用いて求めると，虚数を含む式が解として表示される場合がある。

(13) x2opt＝x2/.sol

(14) $\left\{-\dfrac{(-1+bb)\ m}{p2}\right\}$

これは，価格 p2と所得 m の関数となっている。必要に応じて， x2opt を第 2 財の需要関数と呼ぶことにする。

また，消費者均衡のときの効用の値，すなわち，間接効用は，式(15)のように入力して求めることができる。

(15) u0opt＝u [x1,x2,aa,bb]/.sol

(16) $\left\{aa\left[\dfrac{bb\ m}{p1}\right]^{bb}\left[-\dfrac{(-1+bb)\ m}{p2}\right]^{1-bb}\right\}$

要約すると，コブ＝ダグラス型効用関数の場合，第 1 財の需要関数 x1opt は第 1 財の価格 p1と所得 m （および効用関数のパラメータ bb）のみに依存している。同様に，第 2 財の需要関数 x2opt は第 2 財の価格 p2と所得 m （および効用関数のパラメータ bb）のみに依存している[10)]。また，間接効用は，予想できるように，第 1 財の価格 p1，第 2 財の価格 p2，所得 m （および効用関数のパラメータ aa および bb）に依存して決まる[11)]。

2．コブ＝ダグラス型効用関数の場合の消費者均衡点

2．1　コブ＝ダグラス型効用関数のパラメータを指定して，効用曲面を描く

コブ＝ダグラス型効用関数 u [x1,x2,aa,bb] において，たとえば， aa＝10, bb＝0.3のときを考える。財 1 の消費量が x1，財 2 の消費量が x2のときの効

10) 一般には，第 1 財の需要関数も第 2 財の需要関数も，第 1 財の価格，第 2 財の価格，および所得（および効用関数の特徴を示すパラメータ）の関数となる。

11) 第 2 節から第 4 節までの分析においては，パラメータ aa と bb の値はそれぞれ10と0.3に固定している。第 5 節において，パラメータ bb の変化を考察する。すなわち，嗜好の変化が消費者均衡点にどのように影響を与えるかを考察する。

用水準は式(4)より，u[x1,x2,10,0.3] である。この点 (x1,x2,u[x1,x2,10,3]) を3次元空間にプロットしたものが効用曲面である。

MATHEMATICA で効用曲面を描くには，リスト1のように入力する。すると，図1が得られる。白黒印刷では縞模様に見えるが，効用水準に依存した，カラーの画像（効用水準の低いほうからオレンジ，黄色，黄緑，緑，空色，青，紫，そして赤へとカラー・グラデーションで表示されている）が得られる。効用曲面は原点から右上方に丘のようになっていることが読み取れるであろう。

この図形を再利用するために，MATHEMATICA で，utilSurface11と名づけてある。

```
utilSurface11=Plot3D [
        u [x1,x2,10,0.3], {x1,0,10},
          {x2,0,10},
        PlotPoints→30,
        ColorFunction→Hue,
        AxesLabel→ {"x1","x2","utility"}
]
```

リスト1

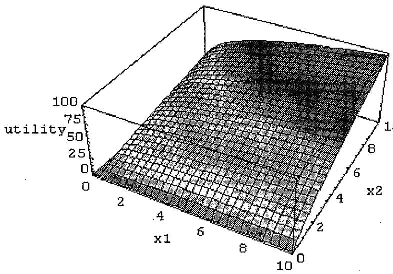

図1　コブ＝ダグラス型効用関数のグラフ

図1をほぼ真上から見るために，リスト2のように入力すると，図2が得られる[12)]。白黒印刷では右下がりの筋が何本も見えるであろう。一つの筋は効用水準が等しい点の集合（無差別曲線）を示している。また，何本もの別の筋はそれぞれ効用水準の異なる点の集合を示しており，左下から右上方に向かって，効用水準が高くなっている。

12) MATHEMATICA では，既に作成した画像を別の角度から見る場合は ViewPoint 関数を用いるとよい。このように，一度画像を作成しておけば，簡単に操作でき，再利用が何度でも可能である。

```
Show [
  utilSurface11,
  ViewPoint → {0,0,5}
]
```

リスト 2

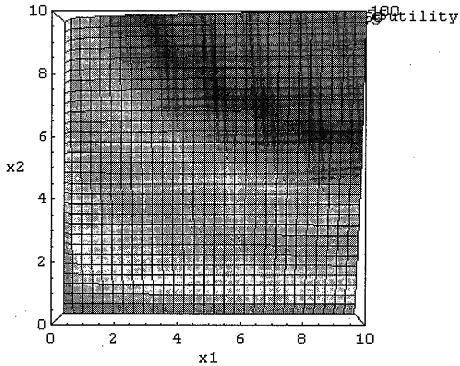

図 2　図 1 をほぼ真上から見た場合

2．2　効用曲面の特徴をあらわす無差別曲線

等しい効用水準をもたらす消費量 x1と x2の組み合わせの点の集合を x1－x2平面に射影した（描いた）ものを無差別曲線という。無差別曲線図（図 3）を得るためには，MATHEMATICA の関数 ContourPlot を用いて，リスト 3 のように入力してもよい。描かれる無差別曲線の数はパラメータ Contours の数値を変更すればよい。

```
aa=10;bb=0.3;
ContourPlot [
  u [x1,x2,aa,bb],
  {x1,0,10}, {x2,0,10},
  ColorFunction→Hue,
  Axes→True,
  FrameLabel→ {"x1","x2"},
  Contours→30
]
```

リスト 3

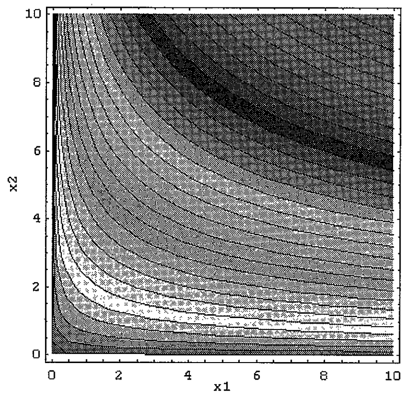

図 3　無差別曲線図

図 4 は，図 3 の色づけした部分（白黒印刷では影になっている）を取り除き，

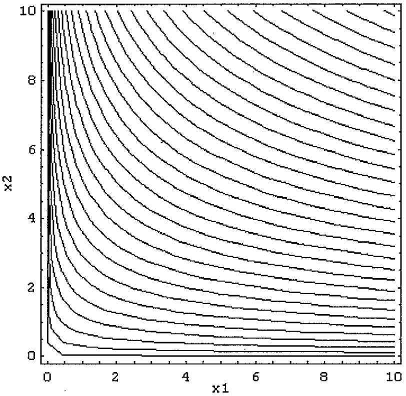

図4　図3の影を除いた無差別曲線図

パラメータ Contours の数値（30）で示される本数からなる，無差別曲線群を表示したものである。

2．3　3次元空間における無差別曲線を描く

3次元空間における無差別曲線を描いてみよう。まず，効用曲面を効用水準に対応した（x1－x2平面に平行な）平面で切断した図5，および，その切り口（図6）を示す。切り口の縁の部分が効用水準16に対応した無差別曲線を示

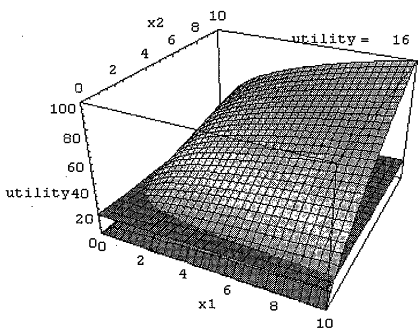

図5　効用水準16で効用曲面を切断する

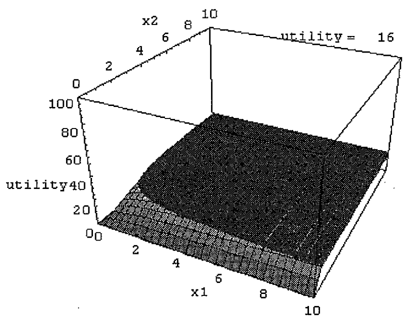

図6　切り口の縁の部分が，効用水準16を示す

している。

図 7 と図 8 は効用水準40の場合を示している。効用水準が高くなるにしたがって，切り口の大きさが小さくなるのが見て取れる。すなわち，図示された画像の範囲（x1および x2が10以下の非負数）では高い効用水準を達成する消費量の組み合わせ（x1, x2）の領域が小さくなることを示している。

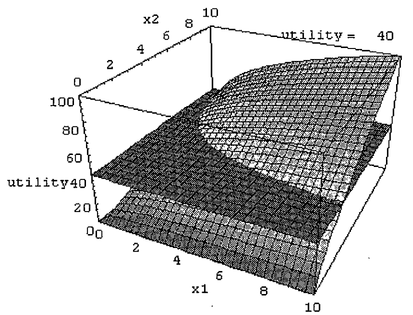

図 7　効用水準40で効用曲面を切断する

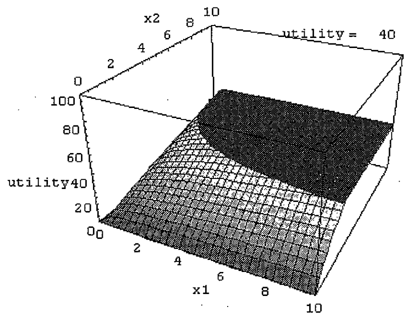

図 8　切り口の縁の部分が，効用水準40を示す

図 9 と図10に，効用水準16と40に対応する（3 次元空間における）無差別曲線がそれぞれ描かれている。真上から x1－x2平面に射影した場合が，教科書に描かれている無差別曲線である。

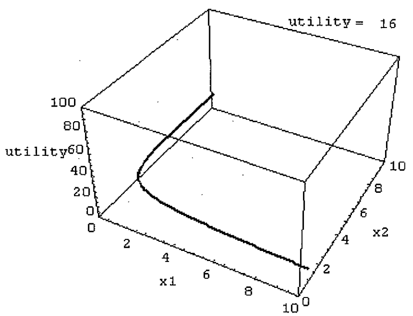

図 9　図 6 の縁部分（無差別曲線）

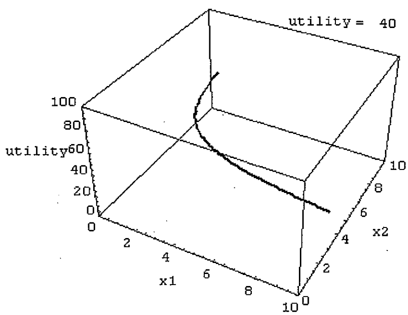

図10　図 8 の縁部分（無差別曲線）

さて，効用水準が0より16まで4刻みで描いた無差別曲線を一つの画像に表示したものが図11である。同様に，効用水準40までの無差別曲線群を表示したものが図12，効用水準64までの無差別曲線群を表示したものが図13，および効用水準100までの無差別曲線群を表示したものが図14に描かれている。

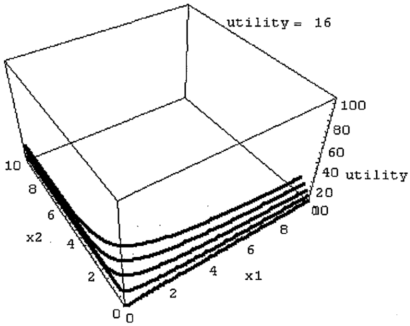

図11　効用水準16までの無差別曲線群

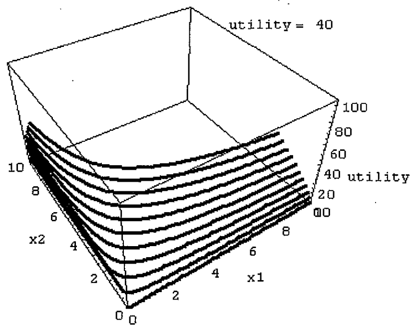

図12　効用水準40までの無差別曲線群

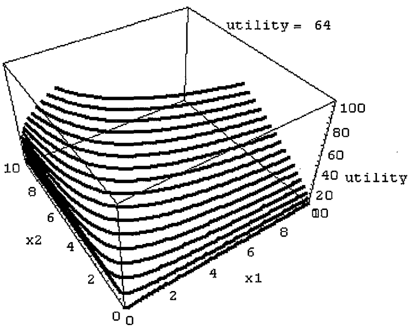

図13　効用水準64までの無差別曲線群

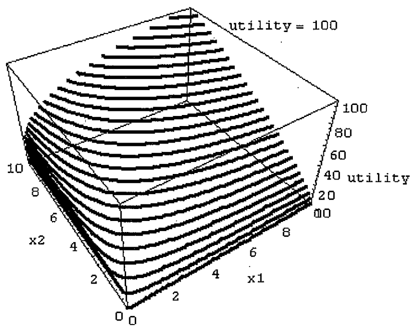

図14　効用水準100までの無差別曲線群

2．4　3次元空間に予算制約平面を描く

3次元空間における，予算制約式を示す（x1－x2平面に垂直な）平面を次に表示しよう。図15は第1財の価格が100，第2財の価格が200，所得が1000の場合が示されている。与えられた価格と所得のもとで購入可能な財の組み合わせは予算制約平面の原点側の領域（三角柱）にあり，予算をちょうど使い切っ

ている場合が（x1－x2平面に垂直な）平面そのもので表されている。

第1財の価格だけが120に変化したときの予算制約平面を図15に追加した場合が図16である（図の左側）。この平面の高さは，図示するときに必要な高さを選ぶことができる。

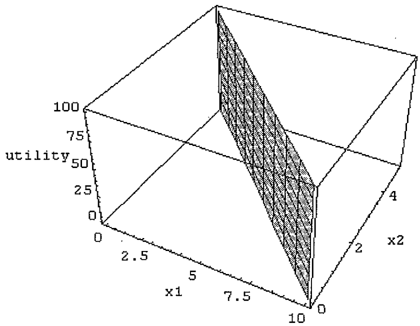

図15　p1＝100，p2＝200，m＝1000のときの予算制約平面

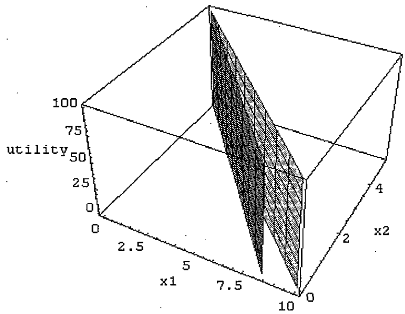

図16　左側の平面が p1＝120, p2＝200, m＝1000のときの予算制約平面

2．5　3次元空間に消費者均衡点を表示する

効用曲面と予算制約平面が得られたので，消費者の最適問題をグラフ的に解くことができる。すなわち，効用曲面を予算制約平面で切断した切り口の中で最大の高さ（これは効用水準を示している）をもたらす点が消費者均衡点である。第1節で求めたように，この点の座標が（x1opt,x2opt,u0opt）を示している。

p1＝100，p2＝200，m＝1000のときの消費者均衡を示す図17を見てみよう。図には消費者均衡点が黒丸印（●）で示されている。価格と所得のデータに加えて，第1財の需要量（x1）は3，第2財の需要量（x2）は3.5，最大効用の値（図では utility＝のほぼ真下に記載）は（約）33.4と表示されている[13)]。

13）画像内のスペースの関係で，第1財の需要量は x1opt ではなく x1，第2財の需要量は x2opt ではなく x2，最大効用の値は u0opt ではなく utility と表示している。

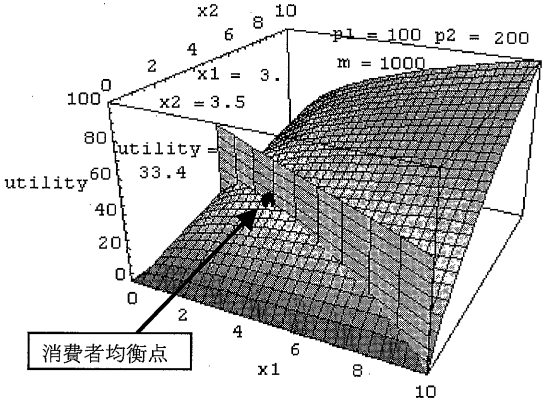

図17 コブ＝ダグラス型効用関数で aa＝10, bb＝0.3のときの消費者均衡点（●）

3．消費者均衡点の特徴

3．1 効用水準の高さを動かして予算制約内の最大効用点を見つける（その1）

p1＝100, p2＝200, m＝1000のときの消費者均衡点の特徴をグラフで確認しよう。効用水準が33より小さいとき，効用曲面上の黒丸印（●）は効用水準を示す（x1－x2平面に平行な）平面より上にあるので，見えている（図18か

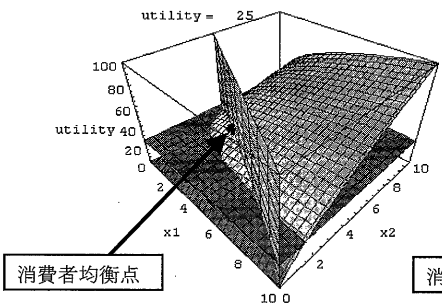

図18 効用水準＝25のとき

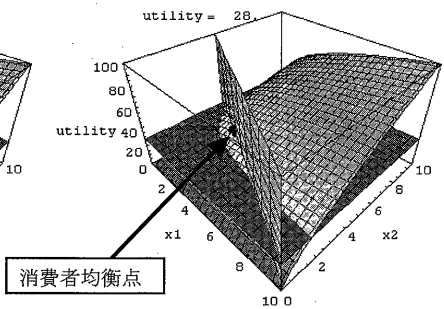

図19 効用水準＝28のとき

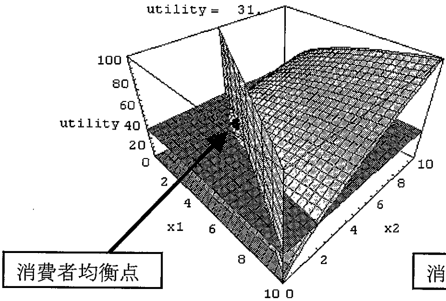

図20　効用水準＝31のとき

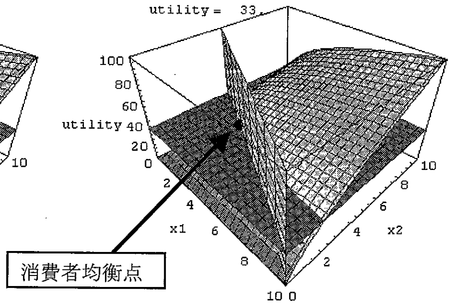

図21　効用水準＝33のとき

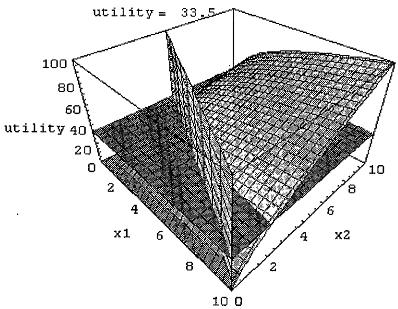

図22　効用水準＝33.5のとき

ら図21)。しかし，図22よりわかるように，効用水準が33.5の場合は，もはや消費者均衡点（●）は見えない。すなわち，消費者均衡点の効用水準は33.5より小さいことがわかる。

3．2　効用水準の高さを動かして予算制約内の最大効用点を見つける（その２）

別の角度から見てみよう。図23から図26には消費者均衡点が見えている。しかし，効用水準が33.5より大きくなると，その効用水準を達成するには効用曲面が予算制約平面の右側（原点の反対側）に出てきている。すなわち，予算の範囲内では購入不可能であることが見て取れる。図27および図28を参照せよ。

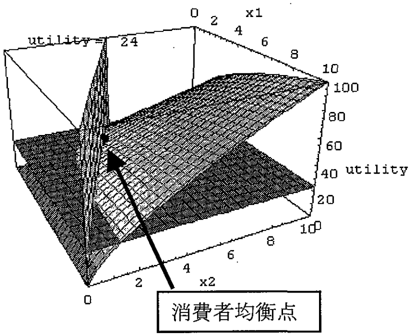

図23　効用水準＝24のとき

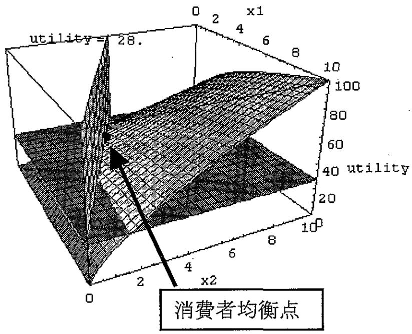

図24　効用水準＝28のとき

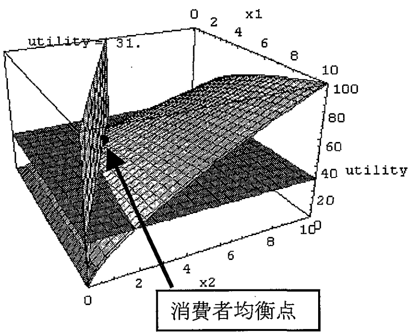

図25　効用水準＝31のとき

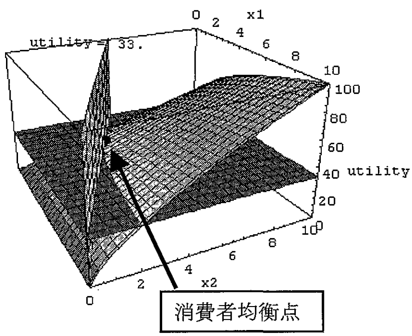

図26　効用水準＝33のとき

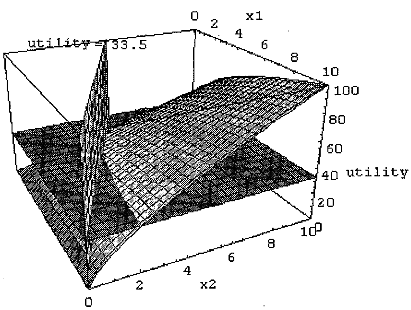

図27　効用水準＝33.5のとき

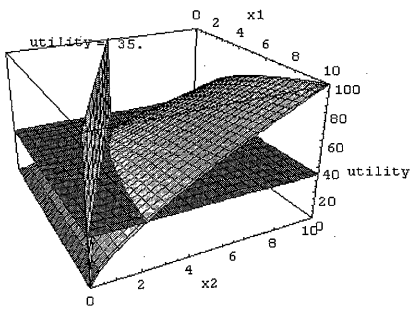

図28　効用水準＝35のとき

3．3　効用水準の高さを動かして予算制約内の最大効用点を見つける（その3）

第1節の分析より，p1＝100，p2＝200，m＝1000のときの消費者均衡点における効用水準 u0opt は aa＝10，bb＝0.3を代入し，計算すると約33.4183である。効用水準33.4前後をより詳しく観察しよう[14)]。

右下がりの幅を持った線が予算制約平面を示している。また，効用水準を示す平面によって切断された効用曲面が右上方に描かれている。図29と図30より，消費者均衡点（黒丸印）が表示されているが，図31と図32に示されているように，効用水準が33.45以上のときは予算制約の範囲外になっていることが読み取れる（予算平面の原点側には効用曲面はなく，予算平面の原点の反対側に効用曲面が現れている)。

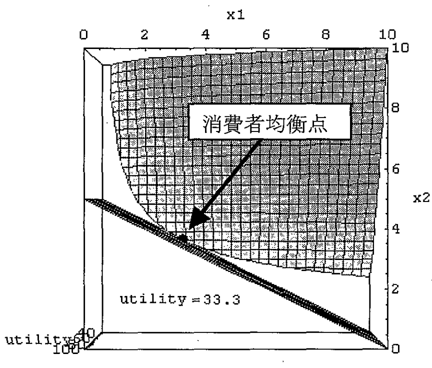

図29　効用水準＝33.3のとき

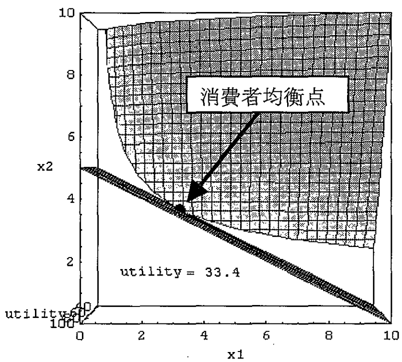

図30　効用水準＝33.4のとき

14）図26および図27の画像をほぼ真上から見た場合である。ただし，効用水準の高さが異なることに注意しよう。

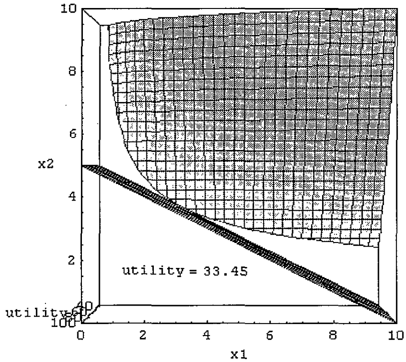

図31　効用水準＝33.45のとき

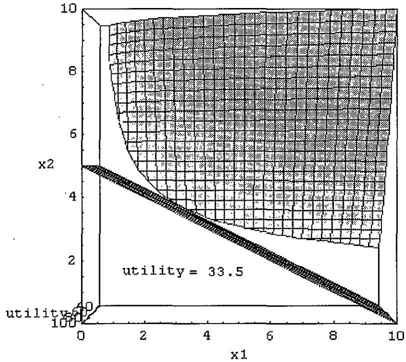

図32　効用水準＝33.5のとき

3．4　効用水準の高さを動かして予算制約内の最大効用点を見つける（その4）

図33から図38までには，効用曲面のうち，予算制約の範囲内だけを表示する領域が示されている。その領域を，効用水準を示す（x1－x2平面に平行な）平面で切断する場合が示されている。効用水準が33.4以下の場合は，効用曲面と消費者均衡点（●）が見えているが，効用水準が33.5になると効用曲面も消費者均衡点も見えなくなっている。したがって，消費者均衡のときの効用水準が33.4より大きく33.5より小さいことがわかる（図37および図38を参照せよ）。

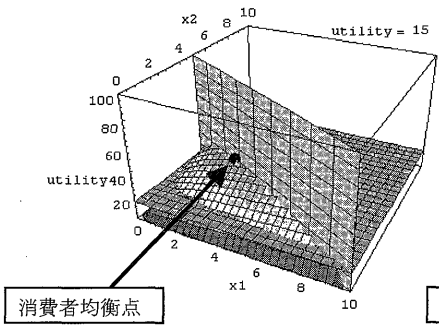

図33　効用水準＝15のとき

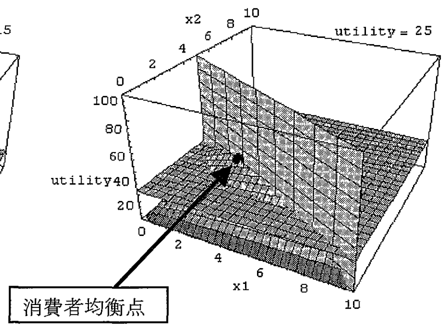

図34　効用水準＝25のとき

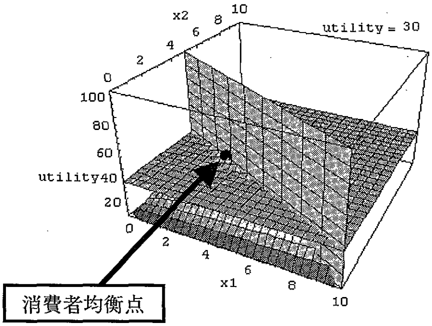

図35　効用水準＝30のとき

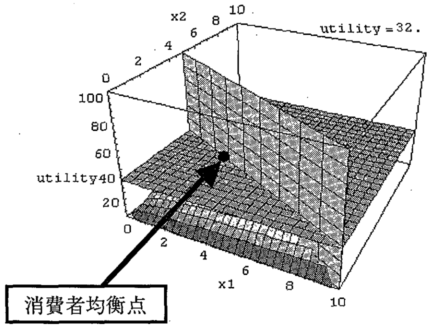

図36　効用水準＝32のとき

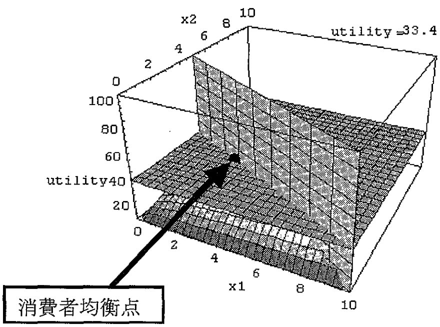

図37　効用水準＝33.4のとき

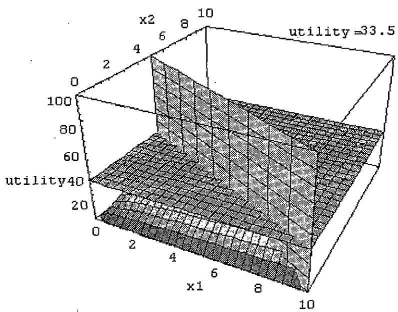

図38　効用水準＝33.5のとき

4．価格消費曲線と所得消費曲線

4．1　価格変化の比較静学

第1財の価格が200，150，100と下落するとき，消費者均衡点はどのように変化するかを見てみよう。ただし，第2財の価格は200，所得は1000に固定されている[15)]。

15）ちなみに，それぞれの場合の消費者均衡点における効用水準を有効数字6桁表示すると，27.1441，29.5908，および33.4183である。図ではそれぞれの場合について，消費者均衡点（●）が表示されている。

図39と図40には，第1財の価格が200のときの状況が描かれている。2つの図において，（x1－x2平面に垂直な）予算制約平面の高さは消費者均衡点における効用水準を示していることに注意しよう。効用水準＝20のときには，予算の範囲内で達成できることがわかる。最初の消費者均衡点は黒丸印（●）で示されている。

第1財の価格が150に下落すると，予算制約平面は第2財の消費量5を軸にして反時計回りに回転移動することが図41および図42に表されている。2番目の消費者均衡点（●）として図42に示されている。

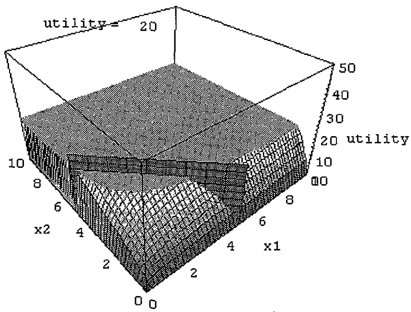

図39　p1＝200で効用水準＝20のとき

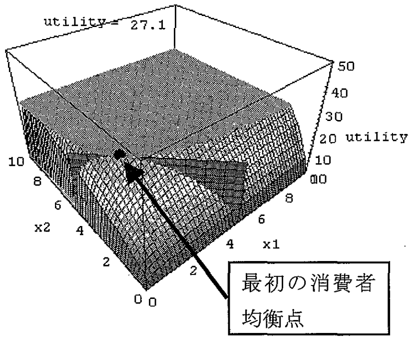

図40　p1＝200で効用水準＝27.1のとき

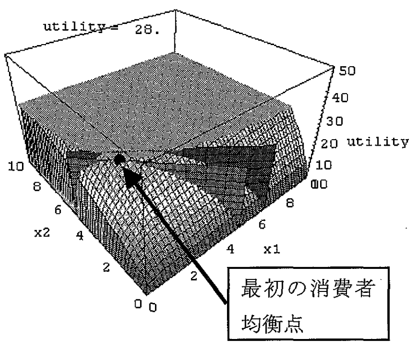

図41　p1＝150で効用水準＝28のとき

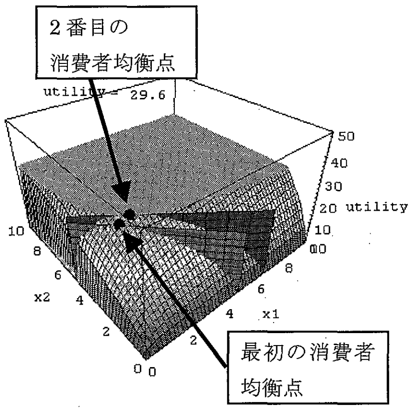

図42　p1＝150で効用水準＝29.6のとき

さらに第１財の価格が下落し，100の場合が図43と図44に描かれている。一番右上方に描かれているのが，このときの予算制約平面である。３番目の消費者均衡点（●）は図44に示されている。

図45には，第１財の価格が100に下落しても，効用水準が40を達成することが不可能であることが示されている。なぜならば，効用水準40以上を達成する領域は予算制約平面の原点側にないからである。

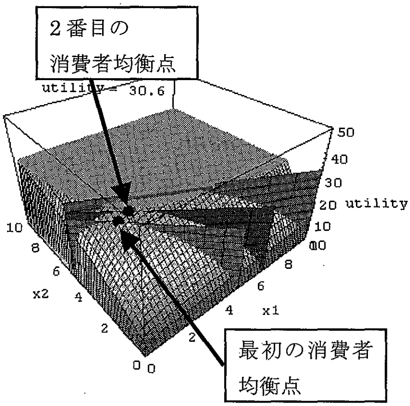

図43　p1＝100で効用水準＝30.6のとき

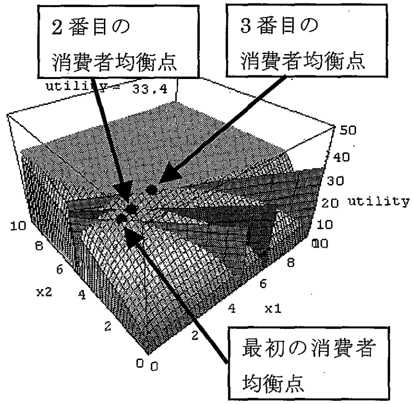

図44　p1＝100で効用水準＝33.4のとき

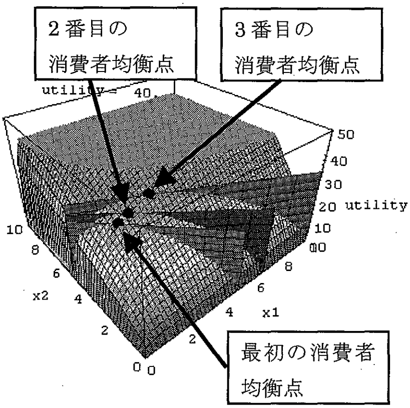

図45　p1＝100で効用水準が40のとき

要約しよう。第1財の価格が200から100へと下落するにつれて，第1財の需要量が増加しているのが読み取れる。一方，第2財の需要量には変化がないことも確かめることができる。

以上の画像をほぼ真上から見たものを図46から図52に示そう。ただし，それぞれの図には効用水準（utility）のほかに，一番右上の予算平面（ほぼ真上か

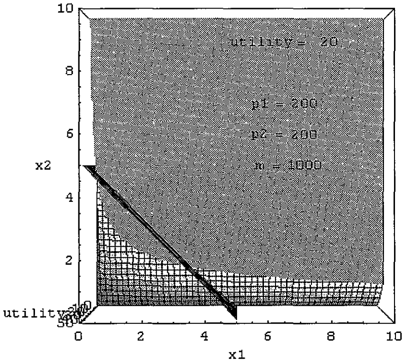

図46　p1＝200で効用水準＝20のとき

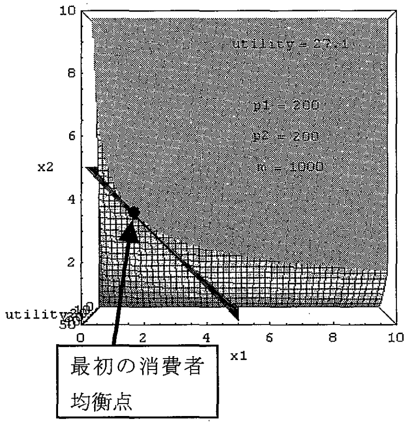

図47　p1＝200で効用水準＝27.1のとき

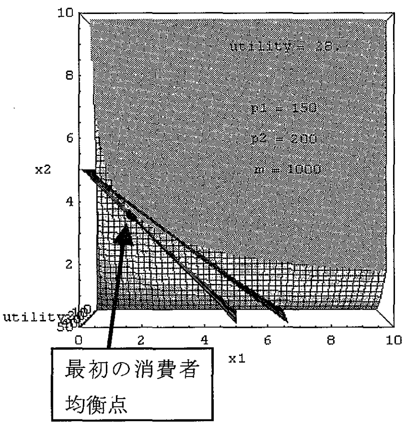

図48　p1＝150で効用水準＝28のとき

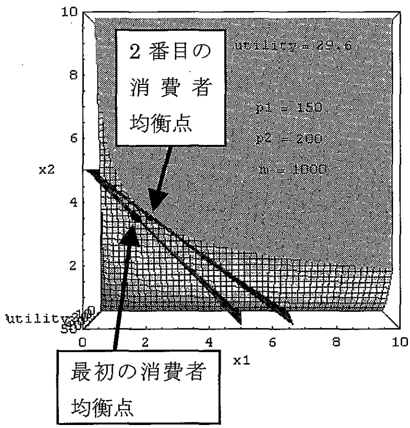

図49　p1＝150で効用水準＝29.6のとき

ら見るので，直線で表示されている）の場合の第 1 財の価格（p1＝200，150，および100の 3 つのケース），第 2 財の価格（p2＝200），および所得（m＝1000）のデータを追加してある。

予算制約の範囲内で最大の効用を達成している消費者均衡点（●）をそれぞれ確認できる。また，予算制約を超える領域は達成できない効用水準であることもわかる。

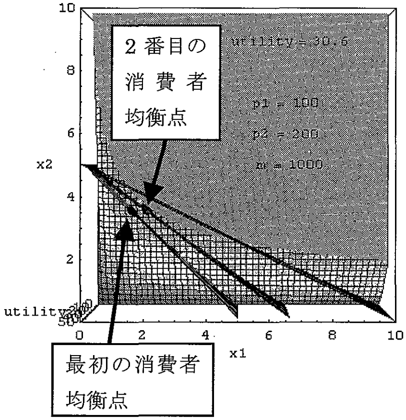

図50　p1＝100で効用水準＝30.6のとき

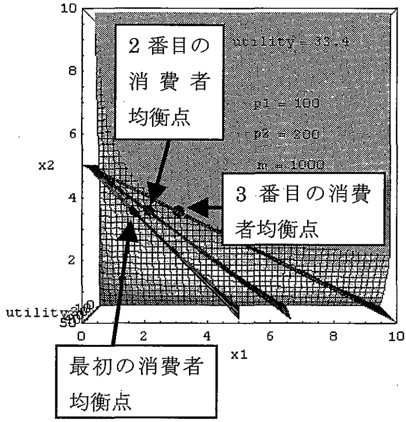

図51　p1＝100で効用水準＝33.4のとき

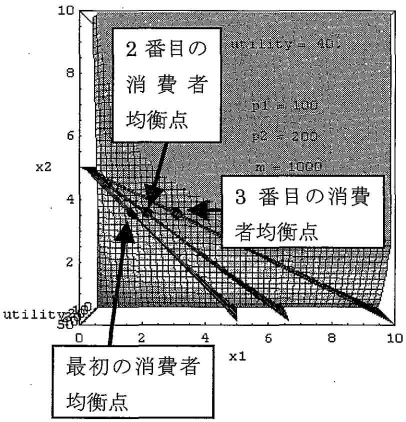

図52　p1＝100で効用水準＝40のとき

4．2 価格消費曲線

第2財の価格と所得水準が一定のとき，第1財の価格の変化に対して消費者均衡点がどのような軌跡を描くかをアニメーション（紙面では表示できないので，その基本画像）で示そう[16]。

図53から図64を見てみよう。第1財の価格 p1が30から300まで変化するとき，第1財の需要量は10単位から1単位へ減少し，第2財の需要量は第1財の価格

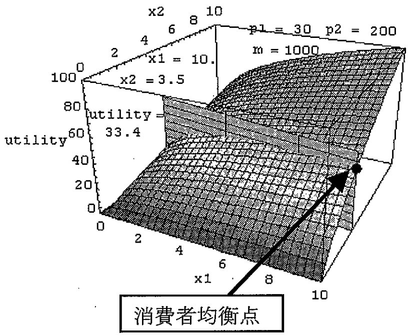

図53 p1＝30の場合

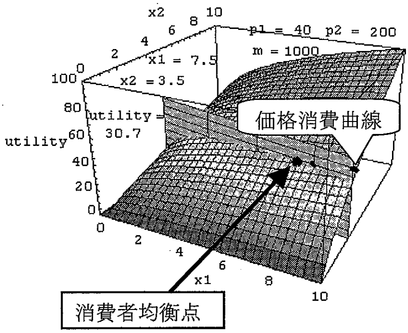

図54 p1＝40の場合

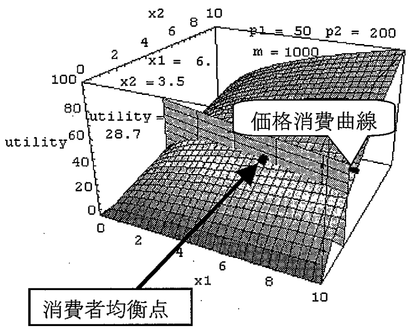

図55 p1＝50の場合

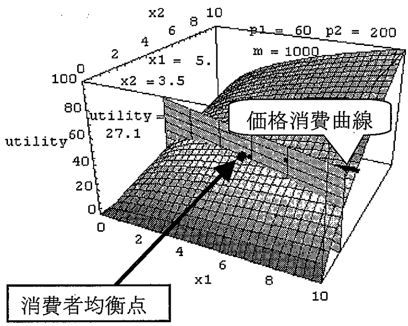

図56 p1＝60の場合

16) 紙幅の制約のため，その一部分を掲載する。すべての画像を含むアニメーションは私の Web ページ URL:http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/welcomej.html から辿れる場所に掲載する予定である。

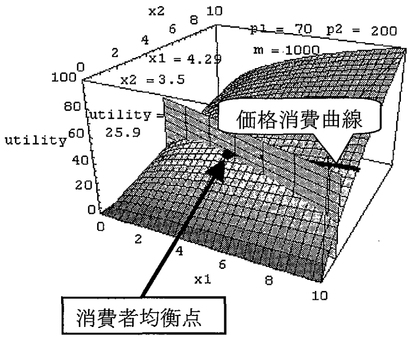

図57　p1＝70の場合

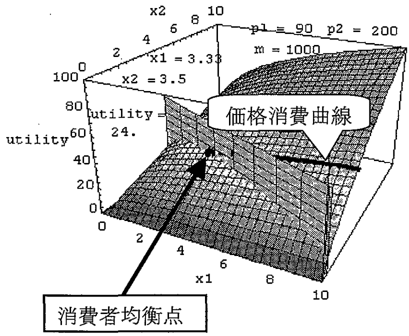

図58　p1＝90の場合

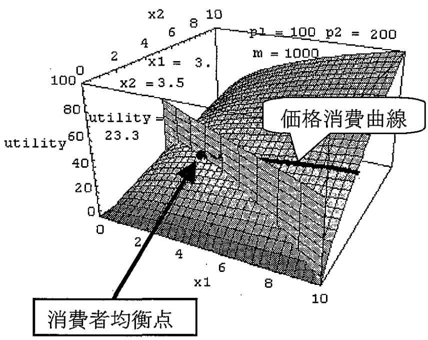

図59　p1＝100の場合

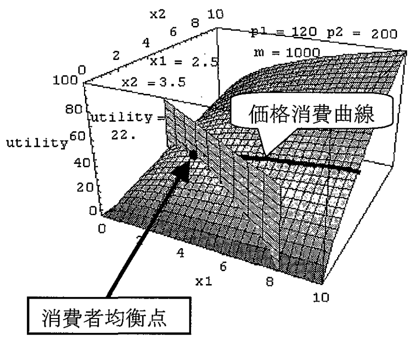

図60　p1＝120の場合

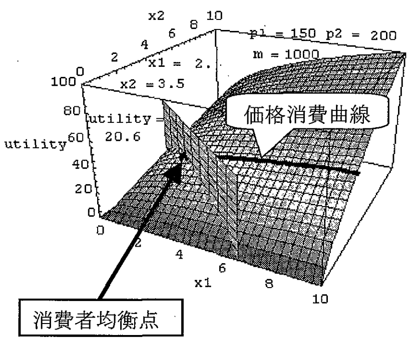

図61　p1＝150の場合

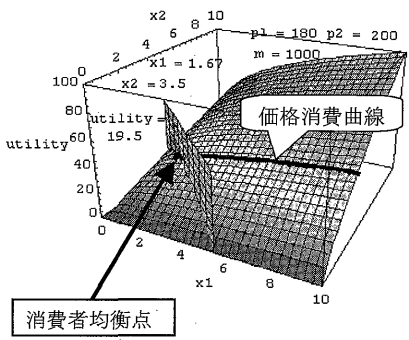

図62　p1＝180の場合

が変化しても影響を受けずに，3.5単位である。すなわち，第1節で求めた第1財の需要関数 x1opt，第2財の需要関数 x2opt の特徴を図で確認できる。

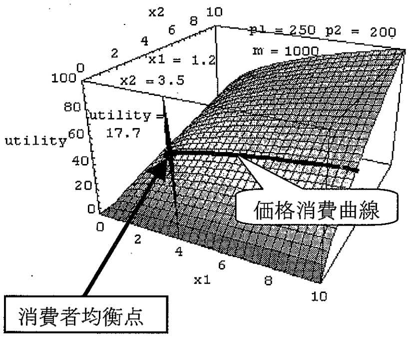

図63　p1＝250の場合

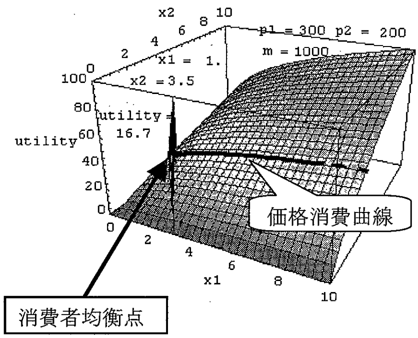

図64　p1＝300の場合

価格消費曲線を3次元空間に描いたものが図65である。図66は図65をほぼ真上から見たものである。すでに指摘したように，コブ＝ダグラス型効用関数の場合，第2財の需要量が第1財の価格から独立に決まっていることを見て取れる。

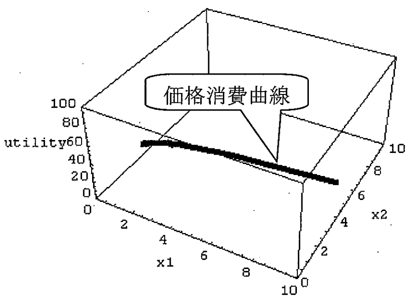

図65　コブ＝ダグラス型効用関数のときの価格ー消費曲線

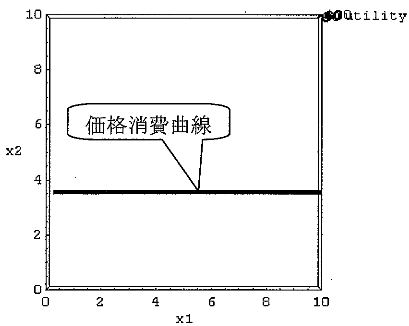

図66　図65をほぼ真上から見た場合

4．3　所得消費曲線

次に，所得のみが変化したときの消費者均衡点の軌跡を（画像数の少ない）アニメーションで示そう（図67より図70を参照せよ)。２つの財の価格に変化がなく，所得のみが増加することは（x1－x2平面に対して垂直な）予算制約平面が（x1－x2平面上での）傾きを変えずに平行移動する。それぞれの所得制約平面に対して，消費者均衡点が黒丸印（●）で示されている。消費者均衡点の軌跡が所得消費曲線である。

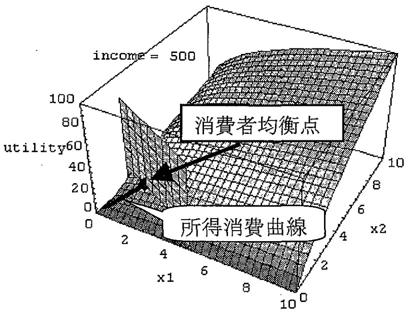

図67　m＝500の場合

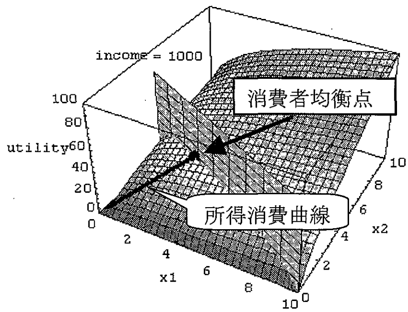

図68　m＝1000の場合

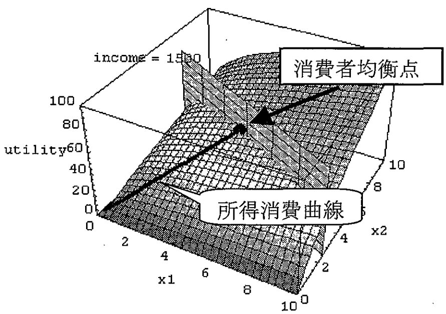

図69　m＝1500の場合

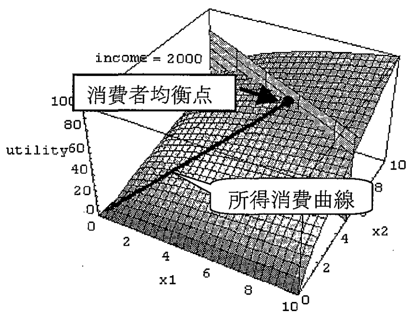

図70　m＝2000の場合

所得のみが変化した場合の消費者均衡点の軌跡を一枚の図に表示すると，図71および図72となる。コブ＝ダグラス型効用関数の場合は，この軌跡が直線と

なることが図から読み取れる。実際に，第1節の結果より計算する[17]と，

x2＝((1－bb)/bb)(p1/p2) x1

となる。 p1＝100， p2＝200， bb＝0.3のときは，

x2＝(7/6) x1

である。直線のグラフの傾きが1より大きいことが図72から読み取れる。

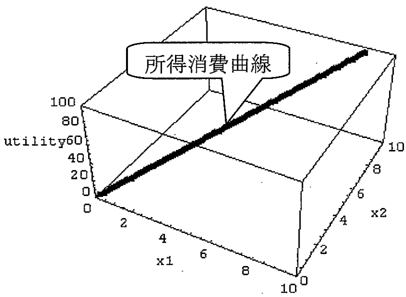

図71　コブ＝ダグラス型効用関数のときの所得消費曲線

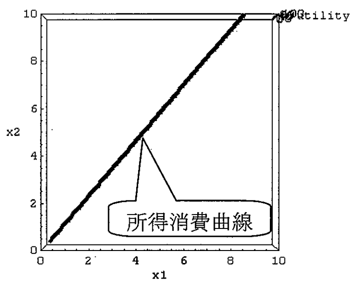

図72　図71をほぼ真上から見た場合

5．嗜好の変化を反映する効用曲面と消費者均衡点

5．1　嗜好を示すパラメータ bb に対応する効用曲面の変化

コブ＝ダグラス型効用関数のパラメータ bb が変化したときの，効用曲面の変化を次にアニメーションで示そう（図73より図83を参照せよ)。パラメータ bb および（1－bb）が消費者の第1財および第2財への嗜好の程度を示している。

極端なケースが bb＝0および bb＝1のときである。 bb＝0のときは図73より明らかなように，この消費者は第1財からの効用を得ていない。すなわち，

17）所得 m を第1財の需要関数 x1opt および第2財の需要関数 x2opt から消去する。

効用水準は第 2 財の消費量のみに依存している。逆に，bb＝1のときは図83より明らかなように，この消費者は第 2 財からの効用を得ていない。すなわち，効用水準は第 1 財の消費量のみに依存している。

図74より図82から読み取ることができるように，bb の値が 1 未満の正数のときは bb の値が大きくなるに従って，第 1 財をより重要視していることを表している[18)]。

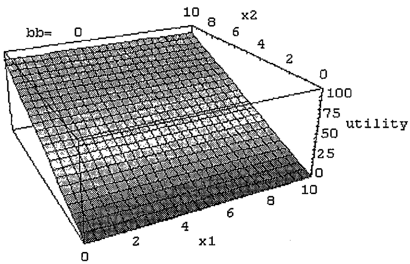

図73　bb＝0のとき

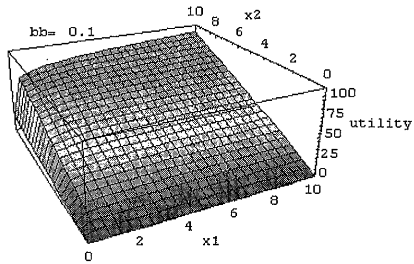

図74　bb=0.1のとき

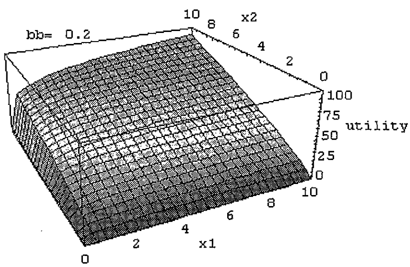

図75　bb=0.2のとき

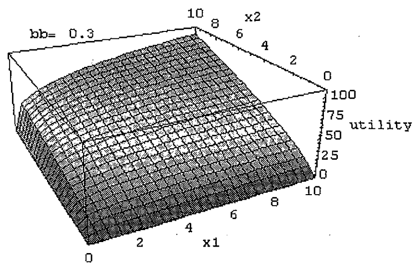

図76　bb=0.3のとき

18) カラーの画像では次のことが確認できる。すなわち，パラメータ bb が 0 から 1 に向かって大きくなるとき，第 1 財の消費量と第 2 財の消費量のある組 (x1, x2) を見てみると，その効用水準を示す色が赤，オレンジ，黄色，黄緑，緑色の方向に変わっている。すなわち，効用水準が上昇している。白黒画像の場合はやや読み取りにくいが，たとえば，x1＝10，x2＝ 1 の点に着目すると，効用水準の変化を読み取ることができる。

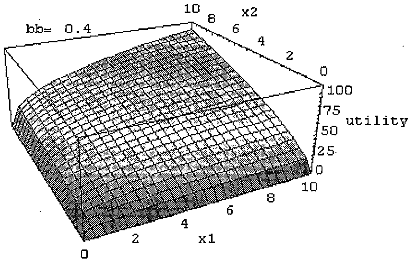

図77　bb=0.4のとき

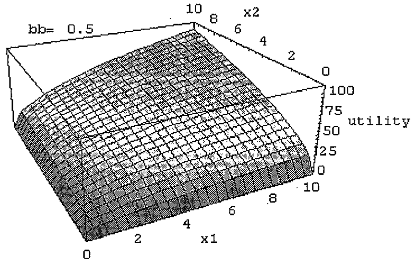

図78　bb=0.5のとき

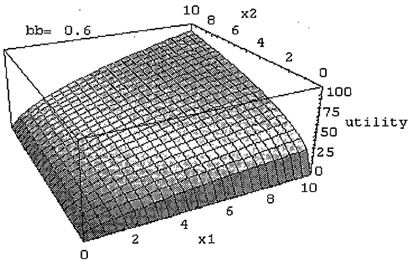

図79　bb=0.6のとき

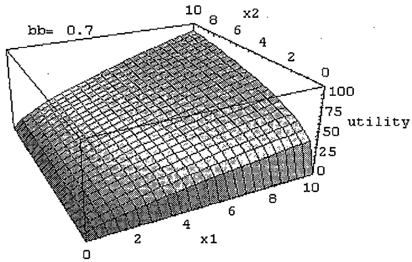

図80　bb=0.7のとき

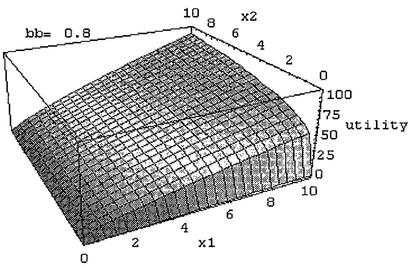

図81　bb=0.8のとき

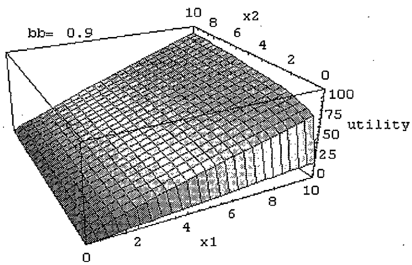

図82　bb=0.9のとき

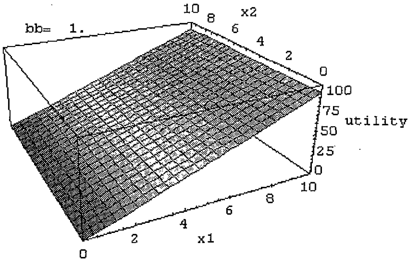

図83　bb＝1のとき

5．2　嗜好の変化に対応する消費者均衡点の変化

コブ＝ダグラス型効用関数のパラメータ bb のみが変化したときの消費者均衡点（図では黒丸印●で示す）の変化をアニメーションで見てみよう（図84より図94を参照せよ)。パラメータ bb の増加に対して，予算制約を満たしながら，第1財の需要量 x1opt は増加し，第2財の需要量 x2opt は減少することがわかる。

各図の左上に消費者均衡点の効用水準，右下に第1財および第2財の需要量が示されている。また，コブ＝ダグラス型効用関数のパラメータは画面左下に表示され，価格と所得データは中央にある所得平面上に示されている。

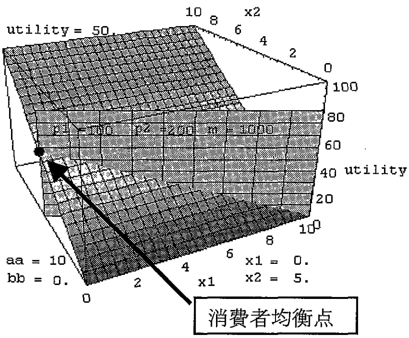

図84　bb＝0の場合

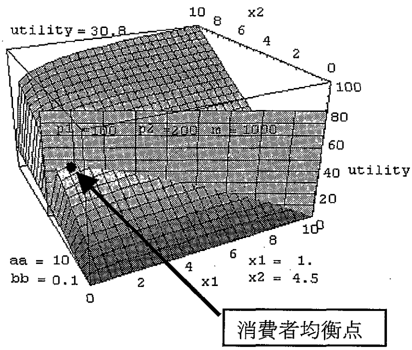

図85　bb＝0.1の場合

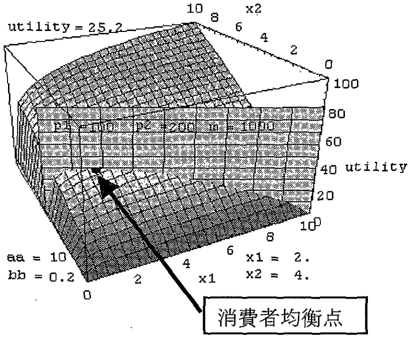

図86　bb＝0.2の場合

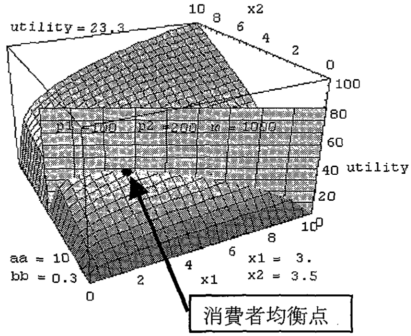

図87　bb＝0.3の場合

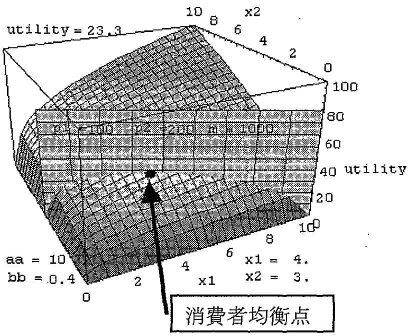

図88　bb＝0.4の場合

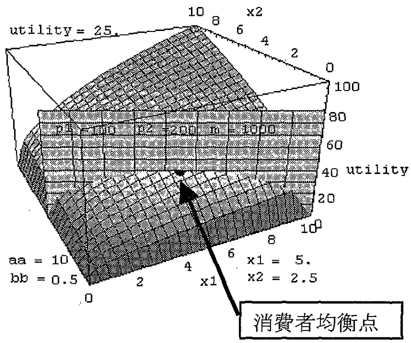

図89　bb＝0.5の場合

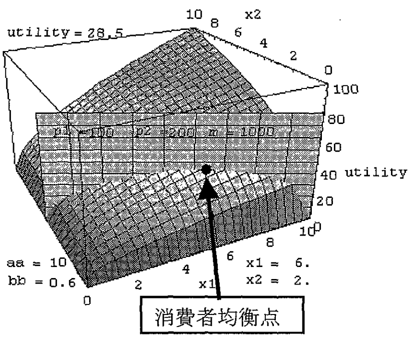

図90　bb＝0.6の場合

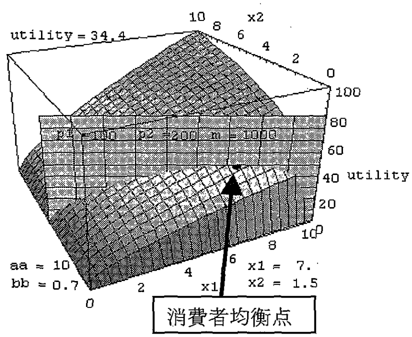

図91　bb＝0.7の場合

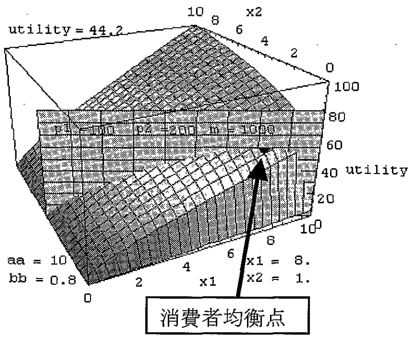

図92　bb＝0.8の場合

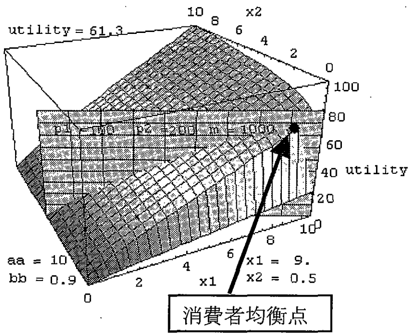

図93　bb＝0.9の場合

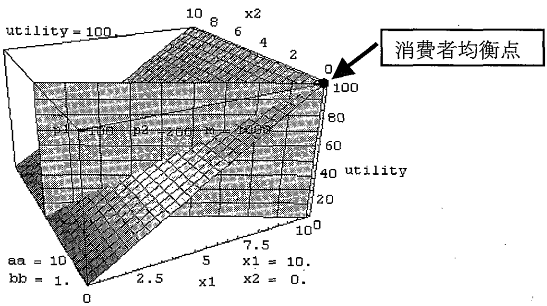

図94　bb＝1の場合

5．3　2次元グラフによる，嗜好の変化に対応する消費者均衡点の比較

無差別曲線と所得制約線を考慮した2次元のグラフを用いて，コブ＝ダグラス型効用関数のパラメータ bb が0から1までの場合，それぞれの消費者均衡点がどのように変わるかを表示しよう。すでに説明したように，bb＝0のときは無差別曲線は水平線となる（図95)。bb の値が大きくなるにしたがって，無差別曲線は垂直に近くなっていく（図96より図104を参照せよ)。bb＝1のとき，無差別曲線は垂直となる（図105)。

予算制約線が同じ場合でも，パラメータ bb の異なる消費者は異なった消費の組み合わせで効用を最大にしていることがわかる。図にはパラメータ bb の

値と最大化された効用水準（utility）が示されている[19)]。

3次元の画像の際に指摘したように，パラメータ bb の増加に対して，予算

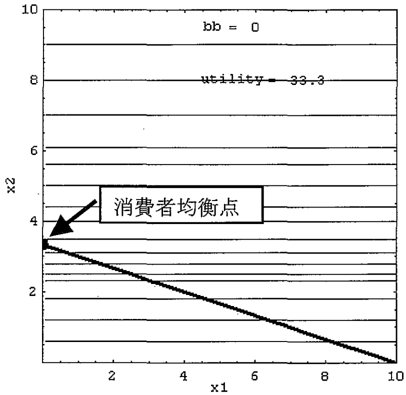

図95　bb＝0のときの消費者均衡点（●）

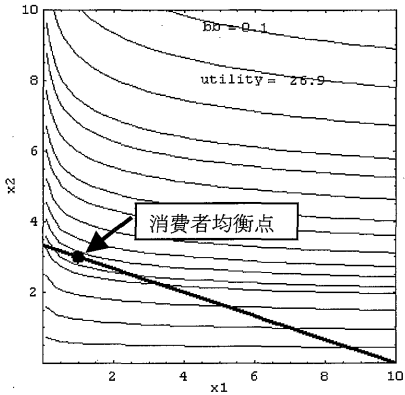

図96　bb＝0.1のときの消費者均衡点（●）

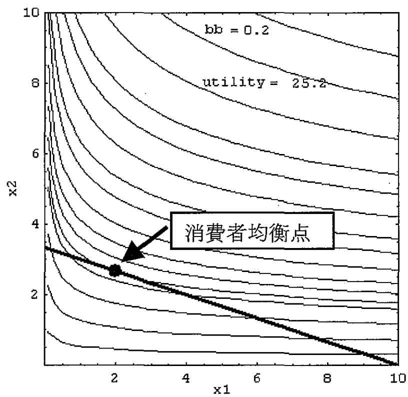

図97　bb＝0.2のときの消費者均衡点（●）

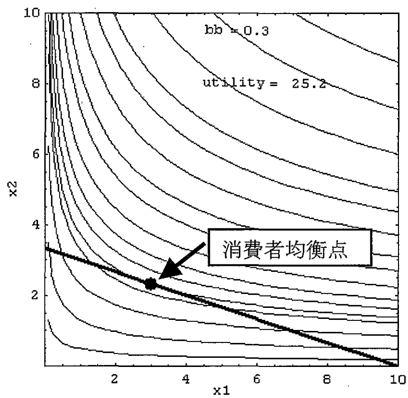

図98　bb＝0.3のときの消費者均衡点（●）

19）消費者均衡点では，予算制約線と無差別曲線が互いに接していることを考慮し，代表的な無差別曲線をいくつか描いてある。無差別曲線同士の間隔（効用水準の差を反映している）が同じでないのはそのためである。

制約を満たしながら，第1財の需要量 x1opt は増加し，第2財の需要量 x2opt は減少することがわかる。

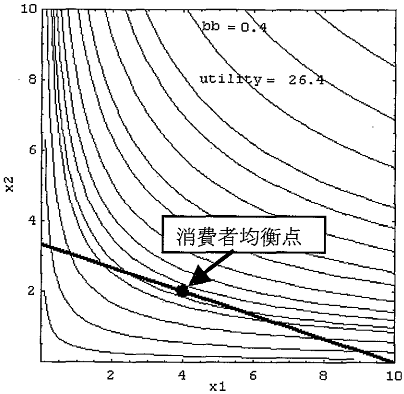

図99 bb=0.4のときの消費者均衡点（●）

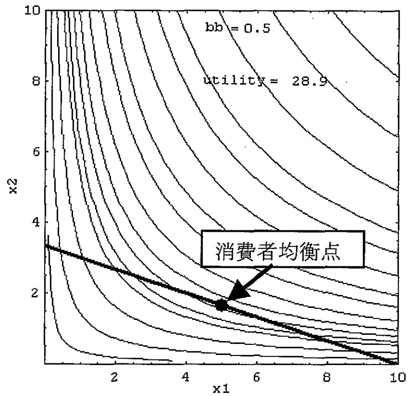

図100 bb=0.5のときの消費者均衡点（●）

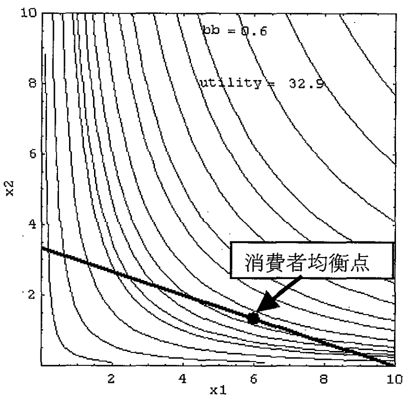

図101 bb=0.6のときの消費者均衡点（●）

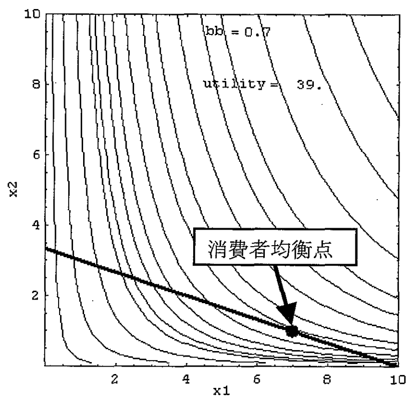

図102 bb=0.7のときの消費者均衡点（●）

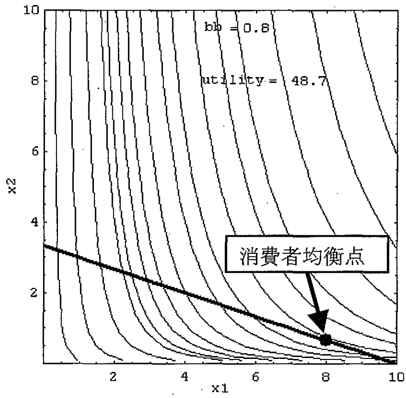

図103　bb=0.8のときの消費者均衡点（●）

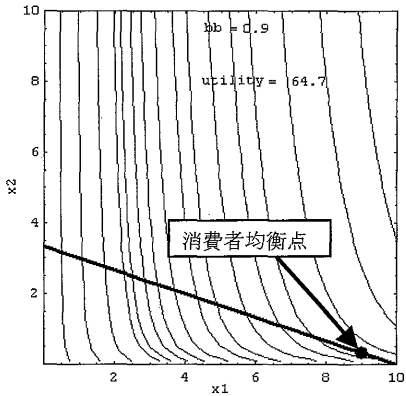

図104　bb=0.9のときの消費者均衡点（●）

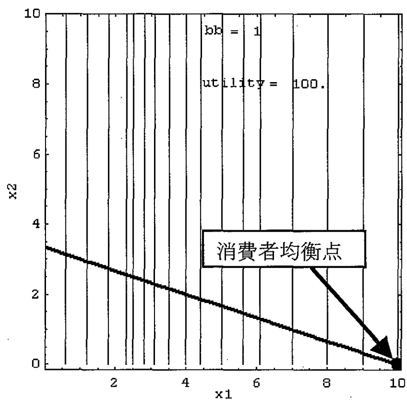

図105　bb=1のときの消費者均衡点（●）

参考のために，第1節で求めたu0optを利用して，bbの変化に対応した最大効用のグラフを描こう。

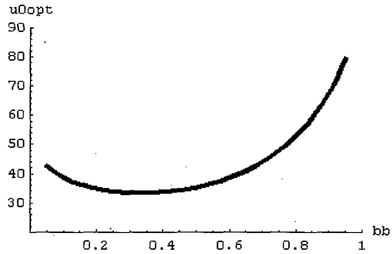

図106　パラメータ bb に対応した最大効用

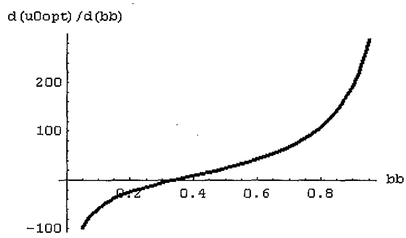

図107　bb における u0opt 曲線の傾き

図106のグラフで，最小の効用をもたらすパラメータ bb の値を求めるには，まず u0opt の式(15)を第１節より呼び出しておく。

u0opt

$$\{2^{-2+4\ bb}\ 5^{-1+3\ bb}(1000-1000\ bb)^{1-bb}bb^{bb}\}$$

u0opt 曲線の傾きを計算するために， u0opt の bb に関する微分を求めために，次のように入力すると，非常に複雑な式になる。

udif＝D [u0opt, bb]

$$\begin{aligned}&\{2^{4\ bb}\ 5^{-1+3\ bb}(1000-1000\ bb)^{1-bb}bb^{bb}\mathrm{Log}[2]+\\&\ 3\ 2^{-2+4\ bb}\ 5^{-1+3\ bb}(1000-1000\ bb)^{1-bb}bb^{bb}\mathrm{Log}[5]+\\&\ 2^{-2+4\ bb}\ 5^{-1+3\ bb}(1000-1000\ bb)^{1-bb}bb^{bb}\\&\qquad\left(-\frac{1000(1-bb)}{1000-1000\ bb}-\mathrm{Log}[1000-1000\ bb]\right)+\\&\ 2^{-2+4\ bb}\ 5^{-1+3\ bb}(1000-1000\ bb)^{1-bb}bb^{bb}\ (1+\mathrm{Log}[bb])\}\end{aligned}$$

しかしながら，上式を簡単化するために， MATHEMATICA で

Simplify [udif]

と入力すると，簡単化されて次のようになる。

{−25 $2^{1+bb}(1-bb)^{1-bb}bb^{bb}$(Log[1−bb]−Log[2 bb])}

udif のグラフは図107に描かれている。udif= 0，すなわち，d (u0opt)/d (bb) = 0 とする bb が u0opt を最小にする値である。この値は，MATHEMATICA の FindRoot 関数を用い，次のようにして求めることができる。

```
FindRoot [udif==0, {bb, 0.1} ]
{bb→0.333333}
```

したがって，u0opt を最小にするパラメータの値は bb＝0.333333であることがわかる。

6．今後の課題[20)]

この小論では，消費者がコブ＝ダグラス型効用関数を持っているときの消費者均衡理論について数式処理ソフト MATHEMATICA を用いて計算し，画像表示したものを紹介した。特に，アニメーションを用いることにより，消費者均衡点の特徴を明らかにすることができた。もちろん，これはモデルの基本的な設定にコブ＝ダグラス型効用関数を使用したことによる，簡単化もある。

一方，画像作成の際，数値のゼロの取り扱いに注意しないと，MATHEMATICA では画像合成の際にエラーが生じることがある。複雑な画像合成のときは特に注意が必要である。

ギッフェン財が存在するような効用関数の例について画像を作成済みであるので，その他の効用関数の例とともに，次回以降紹介していきたい。

また，生産者の理論も同様に扱うことができる。ミクロ経済学の内容について画像を中心にした形で学習できる素材を「経済学をはじめて学ぶ」学生に提供できれば良いと考えている。

---

20) カラー印刷については，紀要編集予算の制約のため，可能性が非常に少ない。したがって，これについての記述は避けたいと思う。Web ページにカラーのアニメーションを掲載することで補完したいと思う。

参考文献

Huang, Cliff J. and Philip S. Crooke [1997], *Mathematics and Mathematica for Economists*, Blackwell Publishers Ltd.

Steinberg, John Robert [2002], *MATHEMATICA for MICROECONOMICS Learning by Example*, Academic Press, A division of Harcourt, Inc., San Diego, USA.

Uzawa, Masaru [2001], "Find out the Cournot and Stackelberg Equilibrium in Oligopoly Island," 2001.
URL:http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/mathanim-e.html

Wickham-Jones, Tom [1994], *Mathematica Graphics Technique & Applications*, Springer-Verlag, TELOS.

Wolfram, Stephen [1999], *The MATHEMATICA BOOK*, Fourth Edition, Wolfram Media and Cambridge University Press.

鵜沢秀［2000a］「MATHEMATICA のグラフィックス機能を利用してクールノー均衡を見る ――― あなたがクールノー・モデルのパラメータを変更できる ―――」『情報処理センター 広報』（小樽商科大学）第13号（2000.3），pp.11-25.

鵜沢秀［2000b］『産業組織論』（エコノミスト社，2000）

鵜沢秀［2001］「寡占島の２つの記念碑をアニメーションで見よう ――― クールノー均衡とシュタッケルベルク均衡 ―――」2001.
URL:http://www.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/mathanim.html

鵜沢秀［2002］「シュタッケルベルク均衡をアニメーションで見る ――― MATHEMATICA，HTML および JavaScript を用いて ―――」『商学討究』第53巻第１号（2002年７月），pp.33-75.

鵜沢秀「MATHEMATICA の応用例(1) ――― 効用曲面，予算制約，および，消費者均衡 ―――」『情報処理センター広報』（小樽商科大学情報処理センター）に掲載予定（当初，2004年３月に掲載予定であったが，情報処理センターの都合により未公刊となっている。）

鵜沢秀［2005］「MATHEMATICA と LiveGraphics3D の応用 ――― クールノー均衡を例にして ―――」『商学討究』第55巻第4号（2005年3月），pp.85-106.

小林道正『Mathematica による『ミクロ経済学』スタディガイド』（東洋経済新報社，1996年）

武隈慎一『ミクロ経済学』（新世社，初版1989年，増補版1999年）

西村和雄『ミクロ経済学』（東洋経済新報社，1990年）

Summary:

In this paper, I try to demonstrate MATHEMATICA's ability to help you understanding of microeconomics, in particular, consumer equilibrium theory. In section 1, I set up consumer's optimization problem with a Cobb＝Douglas utility function. Then, using MATHEMATICA, I get the consumer equilibrium. In section 2, the utility surface in a 3-dimensional space is depicted under possible parameters. Next, I show an income constraint in a 3-dimensional space, namely, income plane. I use these two graphics to get the consumer equilibrium point. In section 3, the characteristics of consumer equilibrium point are elucidated by several graphical points of view. In section 4, I present images of the comparative statics. The price-consumption curve is shown using animation where only price of good 1 can be changed. The income-consumption curve is also shown using animation where only income can be changed. In section 5, I show the animation of changing utility surfaces depending on utility preference parameter of the Cobb＝Douglas utility function. Then, I get comparative statics of consumer equilibrium points where only parameter of utility preference can be changed. It may be a first graphical representation in the 3-dimensional space. In final section, some remarks are in order.