

# 人工株式市場の動的均衡

和田良介

キーワード：マイクロ構造，連続時間取引，動的均衡，人工株式市場，非同質的予想

## 要 旨

動的均衡モデルに基づく人工株式市場を作成した。内生的に価格が形成されることを示した。シミュレーションを用いた理論モデルの可視化である。予想価格の分布の中央値に取引価格が収束してゆくこと，またニュースの定量的な解釈が定まらぬ時期には、「群れ行動」がランダムな価格の推移をもたらすことを示した。現実の株式市場では需給の一致なしでも取引が成立する。連続時間のなかで一部約定も可能とするプログラムを作成している。この点は先行研究に例のないものである。使用言語はMathematicaである。

## 1. 論文概要

2章では動的均衡モデルの概要を説明する。動的均衡は連続時間取引の市場における均衡を定義するものである。連続時間取引の理論的な特徴は，需給の一致なしでも取引が成立することである。そのため，通常の均衡分析は理論的に成り立たない。動的均衡はこれに代替する均衡概念を提供するものである。3章ではまず，人工市場の先行研究を示す。先行研究の論文では，人工市場といっても競りの過程がプログラムで再現されていない。次に，この論文のマイクロ構造に基づく人工市場の特徴を説明する。4章ではシミュレーションの結果

を示す。シミュレーションは確率モデルを言わば可視化するものである。また解析的な方法で結論を導くことが難しい場合でも、所与の命題が成り立つ例を示すことが可能である。現実には観察されるstylized factsと呼ばれる事象が成り立つことを示す。最後にまとめを記す。Mathematicaによる人工株式市場の作成は大学院生であった伊早坂弘君のアイデアである。

## 2. 動的均衡モデルの概要

### 2. 1 連続時間取引

この論文の株式市場は東京証券取引所の制度を想定している。東証の取引時間は9時～11時30分、12時30分～3時である。午前9時及び午後12時30分の取引開始時には売買注文数量が一致する単一の価格で取引が行われる。需給一致で取引を成立させる過程は「板寄せ」と呼ばれている。午前9時以降に最初の取引が成立すること、およびその価格は「寄付き」と呼ばれている。いったん「寄付く」と、「ザラバ」と呼ばれる連続時間取引に移行する。証券会社などと契約していれば、Web画面で売買注文が集まり約定してゆく過程を見ることができる。表示される売買注文の価格と数量の一覧表は「板」と呼ばれている。この論文のシミュレーションでは、板寄せから始まりザラバに移行する。

### 2. 2 超過需要ゼロが要求されない

ザラバでは売り手と買い手の一組が価格と数量に合意すれば、「約定」である、つまり取引成立である。少し具体的に言えば、やってきた買い手が板を見て、売値の最小値を受け入れればその価格で取引成立である。この一組はお互い納得の条件で取引して板から退出である。売り手が到着する場合も同様である。ザラバでは、もはや、需給曲線の交点を探す過程を経て取引が成立するのではない。「板」に表示された売値と買値の開きが解消する前に取引が成立してゆく。その際の取引価格は表示されていた価格のうち後から来た相手にとって最良の売値あるいは買値である。さらにある価格で取引成立するとき、超過需要はゼ

口とは限らない。一部約定もありうるのである。このような場合、余った側では、発注時間優先などの東証の規則に基づいて取引相手が割り当てられる。

### 2. 3 均衡価格の定義

先に板に表示されていた価格で約定するので、ある売り手と買い手が、所与のreservation priceの組み合わせとともに市場に到着した場合、到着の順番により取引価格は異なってくる。どちらを均衡値と呼ぶべきであろうか。また希望数量が一致せずとも約定可能である。連続時間取引に従来の均衡概念を適用することは難しい。

この論文の動的均衡は資産市場における連続時間取引を分析できる概念である。「連続時間取引における均衡価格」は売り手と買い手の市場への到着数の期待値が一致する価格である。さらに「動的均衡」は異なる評価額を持った投資家が逐次に到着し、その時、価格を受容できる相手が見つければ、そのまま取引を成立させることが繰り返されるという状態である。株式市場の場合ならば、非同質的な予想価格を持つ投資家が逐次に市場に到着しては、期待値が定義する均衡価格のまわりで、入れ替わり立ち代わり取引を成立させる状態である。非同質的な予想を持つ投資家の到着の時系列に依存して約定価格が決まるので、期待値が定義する均衡価格が単一でも、実際の価格は変動する。動的均衡は、非同質的な予想および変動する取引価格を均衡概念と両立させる概念である。

### 2. 4 Arrival Intensityまたは到着強度

売り注文と買い注文の到着率を定義する。 $\lambda_s$ と $\lambda_b$ と表す。確率過程の用語では、ポアソン分布のarrival intensity, 訳は到着強度である。到着率×時間はその時間tの間の到着人数の期待値となる。この注文の到着率は後で説明するように価格に依存する。売買注文の到着率が等しくなる価格を「動的均衡の均衡価格」と定義する。所与の均衡価格に対し実際の売り手と買い手の到着数は釣り合うとは限らない。たまたま買い手の数が上回れば、取引価格は上昇す

る。本論文では売買注文の到着は2つのポアソン過程となる。

## 2. 5 売買注文の発生源

株式市場における注文の形には2つある。ひとつは価格を指定する「指値注文」である。希望価格を提示して相手が現れるのを待つのである。もうひとつは、その時点で板に存在する価格で即時実行する「成り行き注文」である。売りの成り行き注文なら、板に表示されたまず一番高い価格の買いの指値注文が付け合わされる。それで足りなければ、売り注文の数量が満たされるまで、低い価格に順番に付け合される。

動的均衡モデルでは、売買注文の発生源は2つある。ひとつは、予想価格の見直しである。予想する期間は1週間以内とする。2つ目の発生源は価格の予想に基づかない要因である。換金目的の売りや定期的な購入などが例として考えられる。流動性要因と呼ぶ。さらに長期運用を目指す機関投資家が運用方針に従って、売買を決定する場合は、これから1週間の価格予想は考慮しないものとして、こちらの発生源に含める。いずれの発生源からの売買注文の到着間隔は指数分布に従う。到着人数はポアソン分布に従う[Johnson 1993]。

見直しの時間間隔は指数分布に従う。予想の見直しを発生源とする売買注文の到着時間の間隔は指数分布に従う。いっぽうの発生源の流動性要因に基づく売買注文の間隔も売り買いそれぞれの指数分布に従うものとする。流動性要因に基づく売買注文は成り行き注文の形で行われるものとする。

## 2. 6 First Local Extremum

いま投資家が株価の上昇を予測したとする。将来、高く売るつもりで、今買うことがとるべき行動であろう。売るとなればより高い価格が望ましい。本論文ではこれにその投資家が予想するピークを当てはめる。キャピタルゲインを求める投資家は、このピークに基づいて行動することになる。ピークまでの時

間が1時間でも1週間でも、現時点で投資家が選択する行動は等しく買いである。

取引価格の期待経路上の最初の極値, First Local Extremum, (以下FLEと表す)は投資家が現時点で投資判断を決める際の重要な値である。信用取引(株や購入資金の借り入れ)に制約がなくキャピタルゲインを狙える投資家を想定すれば、現時点における行動を決めるのはFLEである。現時点における投資判断の違いは、FLEの差に基づくのである。連続時間取引では利益を計算する自明の時間の区切りは存在しない。また投資家の利益の計算期間もさまざまである。FLEに注目することにより、各投資家の予想期間も利益の計算期間も省略可能となる。議論の煩雑さを避けることに役立っている。

投資家の予想の非同質性は、FLEが異なることで識別する。投資家の間のFLEのばらつきかたを分布関数であらわす。非同質関数, Heterogeneity Functionと呼び、記号  $H(x)$  で表わす。投資家は逐次に予想を見直す。見直すということはFLEの値  $x_i$  を新たに取得することを意味するものとする。これは、 $H(x)$  に従うランダム抽出とする。

板に表示された売り注文のうち最低価格を記号maskで表す。買い注文の最高値をmbidで表す。投資家が新たなFLEの値  $x_i$  を取得したとき、この値とmaskおよびmbidを比較する。それに応じて売り手か買い手となって現れる。もし、 $mask < x_i$  であれば、即時にmaskでの買いを選択するであろう。将来、FLEの値で売ってもらうつもりである。そこで価格  $x_i$  の売りの指値注文を入れる。もし  $x_i < mbid$  となっていれば、将来  $x_i$  で買い戻すつもりで、即時mbidでの売りを選択するであろう。

## 2. 7 非同質関数 $H(x)$ の役割

新たなFLEの値は2.6の説明のようにmbidおよびmaskとの大小関係によって売りと買いに分けられる。予想見直し要因による売りと買いの割合は、 $H(x)$  の定義域におけるmbidおよびmaskの位置によって決められる。言い方を変え

ると、新規参入者はmbidとmaskの近辺で強気と弱気に振り分けられるのである。強気なら今買いである。弱気は逆。ゆえに、mbidとmaskの平均値と $H(x)$ の中央値が一致していれば、予想に基づく売りと買いの注文の到着強度（期待値）は等しくなる。もう一つの注文の発生源である流動性要因の売りと買いの到着強度が等しければ、 $H(x)$ の中央値が動的均衡の均衡値となる。

ケインズは株取引を「美人コンテストの勝者を当てるコンテスト」に譬えている[ケインズ, 日本語訳1995]。対象企業の株価として自分自身が妥当と考える水準よりも、その他多数の投資家の平均的な見解に基づいて投資判断を行えという意味である。ただし、これを分かったうえで、投資家同士が平均的な意見の予想を予想しあう過程が繰り返される。そのうえでさらに自分の行動を選択する。このケインズの譬えは、FLEの分布関数  $H(x)$  を推測したうえで、自分の投資判断を行うことに対応している。投資家の間で評価額が異なることを認識したうえで、株価の動きを予想すれば、株価は  $H(x)$  の中央値に向かうのである。それがその投資家のFLEである。流動性要因の到着強度が等しくない場合には、それを吸収する形で取引価格は中央値からずれてゆく。推移先がFLEとなる。

ただし、この予想の分布  $H(x)$  の形状を推測する過程は以下の理由により繰り返さないものとする。ケインズのコンテストの勝者は所与の線空間の中の点を特定することに相当すると考えられる。FLEの分布関数  $H(x)$  の推測は点の分布を推測するという過程をすでに1回行っている。投資家はその日の  $H(x)$  を推測しようとする、観察できるものは板情報と過去の価格である。これらから、流動性要因の売買注文の偏りと予想見直しをもたらす中央値への動きを見分けることができない。FLEの分布関数の推定値の分布をさらに予想しようとしても価格予想の正確さはあがらない。 $H(x)$  自体が一日の間にも非定常的である。判断を下すには十分なサンプル数を得られないうちに  $H(x)$  は推移してしまうと投資家は考えているものとする。予想を予想する推測は繰り返さないと仮定する。

## 2. 8 群れ行動

ニュースが株価にもたらす影響として、定性的な変化は明快でも定量的な変化は明快とは限らない。例えば、感染症の医療用の商品として脚光を浴びることになったなら、当該企業の利益の伸びは、企業自身にもわからないかもしれない。しかし株式市場では、詳細不明のままでも、すぐにでもあらたな値を探し始めるであろう。投資家は新たなコンセンサスを探し始めることになる。動的均衡モデルでは、非同質関数  $H(x)$  の新たな形状を探ることを意味する。このコンセンサスを探す状態は、非同質関数  $H(x)$  の尖度がただちに減少し、いったん一様分布に近い形状となり、次にあらたなピークの位置を探す過程として表現できる。

最初の段階でたまたま取引が集まった価格水準があれば、一部の投資家は自分が保有するFLEをそれにあわせて変更するであろう。非同質関数  $H(x)$  は一様分布に近い形状から尖度が高くなり、かつモードは偶然選ばれた位置に動き始めることになる。同様のプロセスは以降も続く。ランダムなサンプル値に追随する形で予想を見直すことが群れ行動をもたらす。どのような位置にも移動しうるので、群れ行動は、事後的に見れば通常の投資尺度からはずれた水準にでも価格を押し上げうる。

## 3. 人工株式市場

### 3. 1 先行研究

「人工市場とはエージェントを基本単位とした、価格決定メカニズムを持つ」コンピュータープログラム（〔和泉潔他2007〕）と定義される。株式市場を対象とするマルチ・エージェントシステムの先行研究の例として内藤、八木〔2014〕がある。エージェントには3つのタイプがあり、ファンダメンタル、テクニカル、ノイズエージェントの3タイプである。テクニカルには「順張り」と「逆張り」の2のタイプが存在している。ノイズタイプは売り、買い、待機をランダムに選択する。この設定は問題を含んでいる。まずファンダメンタルな値として数字

が示されていても、数字の根拠が議論もされていない。彼らが用いる評価基準が何も説明されていない。実質的に競りの過程が組み込まれていない人工市場となっている。注文提出方法が議論の対象にもなっていない。エージェントの判断基準がはっきりしていなければ、ランダムな価格決定とあまり変わらない。

和泉, 鳥海, 松井 [2009] は, サンタフェ人工市場と呼ばれるより大規模なシミュレーションプログラムを紹介している。ファンダメンタルな値に相当する予想値が過去データの1次式の形で与えられている。しかし吟味検討は加えられていない。これらの人工市場の先行研究では、「競り」の過程の吟味検討が充分とは言えない。

人工市場は複雑系のひとつとして研究されてきている。「複雑系(complex system)とは、系の構成単位の個々の行動基準(…模倣傾向)が、「集団の協調行動」(売りや買いへのバイアス)を引き起こす系のことである(増川, 水野, 村井, 尹 [2011], 文言一部省略)。」系はここでは株式市場が相当している。Sornette [2003] は株式市場を複雑系とみなして、集団の協調行動が大暴落の原因であるとしている。増川他 [2011] は株式市場の複雑系モデルであるハラス・ソネットモデル [Harras, Sornette, 2008] の計算例を紹介している。これはIsing Modelと呼ばれる統計物理学のモデルである。市場参加者は平面の格子点であり、隣接する格子点上の投資家の判断に影響をうけるという枠組みである。模倣が株価の高騰や暴落につながることを説明している。主要な関心は情報の伝播の説明にあり、導入されている価格決定のルールはその場しのぎの感があり、「競り」の過程を抽象化したものにはなっていない。

離散的な時間間隔で需給を取りまとめて行う取引をバッチ取引と呼ぶ。株式市場は寄り付き時点以外、ザラバとよばれる連続時間取引である。バッチ取引では需給が一致して初めて取引が成立するが、ザラバでは需給の一致は要求されない。先行研究はすべてバッチ取引のモデルである。バッチ取引の間隔を短くしても、連続取引の近似にはならない。ファイナンスの領域のマイクロ構造モ



デルの先行研究でも、バッチ取引のモデルしか存在しない。

マイクロ構造の情報アプローチでは、均衡を決めるモデルを示すことなく、一部の投資家は真の均衡価格を知っているものとして議論を進めている [O'Hara, 1995]。資産とは価値の保存が可能な財である。資産の場合には、均衡は定義しただいである。真の均衡価格があったとし、それが100年後に明らかになるとして、現在の投資判断にどれだけ意味があるだろうか。それは投資家の利益の計算期間次第である。均衡を定義するモデルを明示することが必要である。

## 4. シミュレーションモデル

### 4. 1 アルゴリズムの特色

理論的な動的均衡モデルを以下のような方法でシミュレーション可能な形に整えた。(1)指数乱数の利用(2)ベータ分布の利用(3)エージェントの元帳の作成(4)板の作成(5)実行ラグの導入。先行研究の文献には本論文のプログラムの作成に参考のできるヒントは見つからず、本論文のプログラムは参考例なしに作成したものである。

#### (1) 指数乱数の利用

本論文のアルゴリズム（プログラムの設計図）の特色のひとつめは、指数分布に従う乱数を発生させることにより、連続時間上の取引時刻を決定することである。これを例えて言うと、全員が指数分布にしたがうサイコロを振り、一番小さい数字が出たエージェントが次の一手を決めるという形である。以下指数サイコロと呼ぶ。ここでの一手とは売買注文を提出することあるいは取り消すことである。最小値となった指数乱数の値が一つの事象から次の事象までの経過時間として加算されてゆく。指数分布にはメモリーレスという性質がある。つまり条件付き分布関数は条件付きでない元の分布と同じである。任意の  $t_0 > 0$  に対して、 $f(t) = f(t+t_0 | t_0)$ 。この性質により、指数サイコロを振る際に、各エージェントのこれまでの待ち時間を考慮に入れる必要がないのである。

毎回同じ指数関数を用いて次の一手を任せるエージェントを決めることができるのである。計算プログラムがそれだけ簡潔となる。売買注文の到着時間の間隔が指数分布に従うとき、到着人数はポアソン分布である [Johnson 1993]。

## (2) ベータ分布によるFLEのばらつき表現

FLE(first local extremum)は取引価格の期待経路上の直近の極大または極小値である。投資家の現時点における行動をきめる変数である。投資家の間でFLEは異なり、分布を非同質関数  $H(x)$  によって表わす。シミュレーションにあたっては、ベータ分布を用いる。ベータ分布の定義域は  $[0, 1]$  であり有限である。実際の市場の価格の動きには、値幅制限があり有限な定義域は望ましい。アフライン変換をすれば、どのような価格帯にも応用できる。図4-1に

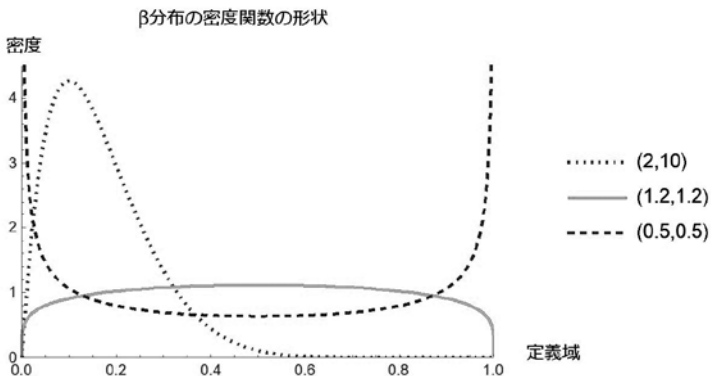


図 4 - 1

示すように、 $\beta$ 分布は2つのパラメータの値を選ぶことにより様々な形状を表現できる。凡例のペアの数字はパラメータの値である。図の(0.5, 0.5)の密度関数が示すように予想が両極端に分かれる場合も対応可能である。

### (3) エージェントの元帳作成

エージェントはFLE以外にも売値買値あるいは価格予想の有無など属性の値が複数存在している。エージェントひとりひとりに元帳を作成してこのような属性の値を記録しておく。Appendixに見本を示した。指数サイコロにより次の一手の順番が回ってきたときには、属性に基づいて行動を選択するのである。取引が成立すれば、取引当事者の元帳の記載を変更する。それから全員の元帳を読み込み、板を更新して、maskとmbidを決定するのである。そして指数サイコロを振って最小時間を見つけるのである。次の一手に伴う事象は元帳にいったんすべて記載し、その後全員分を読み込む作業はプログラムをわかりやすくすることに役立つ。

### (4) 価格と数量は整数値

東証の競りの過程を再現するためには価格を整数値に限定することが不可欠である。東証では価格は1円刻み、たまに0.5円、取引単位は100株である。

### (5) 使用言語はMathematica

Mathematicaは計算ソフトであり、かつ関数型と呼ばれるプログラミング言語である。既存の関数が利用できる場合は高速である。「リスト」構造の活用が不可欠である。Excelシートのデータの読み込みからそれ以降の処理もリスト構造なしには扱えない。リスト構造を利用すれば、大量のデータもエクセルシートのように表示可能であり、わかりやすくなる。

## 4. 2 2つのタイプのエージェント

エージェントはタイプ1とタイプ2の2つのタイプに分ける。タイプ1は当日中の価格動向に留意しない。即時に約定できる成り行き注文を提出する。タイプ2は価格の予想に基づいて売買を行う。約定できるとは限らないが、価格が指定できる指値注文を行う。タイプ1は売り手と買い手の2人が体現するボアソン過程で代表させる。タイプ2は価格予想の見直しに応じて、市場への参入退出を繰り返す。人数は50人とした。

### 4. 3 エージェントの価格予想の再生過程

エージェントが価格予想を見直す過程をfloor0とfloor1という2つの状態の間のランダムな移動で表す。それぞれの滞在時間を  $T_0$  と  $T_1$  で表す。それぞれの指数分布に従う。確率過程としてはマルコフ再生過程である。Floor0にいれば、FLEを持っていない。Floor1にいる間にはFLEを持っている。Floor1に滞在中にもFLEを見直すこともある。Floor 1 にあってひとつのFLEの値を保持する時間を  $T_2$  と表す。これも指数分布に従う。

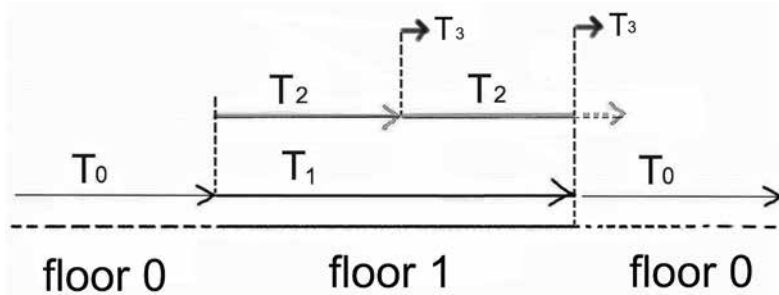


図 4 - 2

図 4 - 2 参照。Floor0にいれば、 $T_0$  のサイコロを振る。その  $T_0$  が全エージェントの最小値となったら、当該エージェントはfloor 0 からfloor 1 に移動してFLEを取得する。この時  $T_0$  の値が市場の経過時間として記録される。floor1にいれば、 $T_1$  と  $T_2$  のサイコロを振る。さらに、 $T_3$  (後述)も該当する場合にはそれも振る。全員の指数サイコロを振って、当該エージェントの  $T_1$  が最小値となったら、floor 1 を退出する。 $T_2$  は自動的に終了する。 $T_2$  が最小値となった場合は、FLEの更新を行う。この時  $T_1$  は継続していると考ええる。図 4 - 2。何回かのサイコロの後、 $T_1$  の指数サイコロの値が全体の最小値となったとき、floor 1 の滞在時間としての  $T_1$  の値が事後的に決まるのである。それまでの経過時間+最後の指数乱数の値に等しい。指数分布にはメモリーレスという性質がある。そのため指数サイコロを振る際にそれまでの経過時間は考慮不要となる。

#### 4. 4 実行ラグ

移動平均が判断基準に用いられている場合、取引がひとつ成立すると同時に複数のエージェントが発注を決めることが起こりうる。優先順位をつけるため決定から発注の間に実行ラグを導入する。ごくわずかのランダムな時間差があるとすると、これら時間差は確率変数  $T_3$  で表す。これも指数分布する。またひとりのエージェントについても、投資行動を決定した際に、板の上に表示される事柄について、同時に複数の処理はできないものとする。

売り買い両方に指値しているエージェントが、floor1から退出することになったとする。この時、売り買い2つの注文のうち、取り消しは一つずつしか行えないとする。この場合  $T_3$  はやりかけた一連の操作を完結させるまでの時間である。実際、注文がコンピューター処理されていても厳密には同時処理ではない。このような実行ラグにより売買注文の処理に必ず優先順位をつけることができる。

#### 4. 5 最小時間の決定

板に変化をもたらす次の一手を誰が出すかは指数サイコロで決定する。サイコロの値はそのまま時間の経過として記録される。次のような手順を進める。各エージェントについて、 $T_0$ 、 $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3$ のうち、該当するものがあれば、指数乱数を発生させる。各エージェントの乱数の最小値を決める。次にエージェント全員のなかの最小値を選ぶ。選ばれた最小値を持つエージェントが該当する変数  $T_0$ 、 $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3$  に応じた行動をとる。まとめると次の表のようになる。エージェントのID番号は、タイプ1が1と2。タイプ2は11以降である。

タイプ1	記号	確率変数の特徴	選ばれた場合の行動
Agent1	$T_1$	ポアソン過程。間隔時間はパラメーター $\lambda_s$ の指数分布	成り行き売り
Agent2	$T_1$	ポアソン過程。間隔時間はパラメーター $\lambda_b$ の指数分布	成り行き買い

表4-1

タイプ2	記号	確率変数の特徴	選ばれた場合の行動
Agent11以降	$T_0$	Floor 0 の滞在時間。パラメーター $\lambda_4$ の指数分布	FLEの取得とそれに 応じた売買注文

表4-2

$T_0$  と  $T_1$  は排反。同時に該当しない。 $T_2$  と  $T_1$  は必ず同時に該当する。

タイプ2	記号		選ばれた場合の行動
Agent11以降	$T_1$	Floor1の滞在時間、パラメーター $\lambda_1$ の指数分布	既存の指値注文を取り消し
	$T_2$	パラメーター $\lambda_2$ の指数分布	既存の指値注文の取り消し。(次に新たなFLEを取得予定)
	$T_3$	パラメーター $\lambda_3$ の指数分布	一連の行動の続き。①注文取消しの続き。あるいは②注文取消した後の新たなFLEの取得とそれに 応じた売買注文

表4-3

#### 4.6 FLEの取得

エージェントは次の2つの場合にFLEの値を取得する。(1)floor0の滞在時間が終了しfloor1に移動することになったとき。(2)floor1に滞在したままで、それまでの価格予想を見直すとき。いずれの場合もFLEを  $H(x)$  の乱数として取得する。そして乱数の値に応じて売り買いを決定することになる。

#### 4. 7 4つの投資戦略

エージェントは取得したFLEとその時点のmaskとmbid(板上の売値の最小値と買値の最大値)を比較する。弱気予想ならばmbidで売って将来にFLEの値で買おうとするであろう。当該エージェントの認識によればFLEは当面の底値である。強気予想ならば今maskで買って直近のピークであるFLEで売ろうとする。これらが基本的な戦略である。

実際の取引価格は、動的均衡価格が動かなくても、変動する。トレンドのない定常的なランダムな変動である。FLEがmaskとmbidの近辺にあって、このような変動を利用する次のような戦略を導入する。エージェントのFLEの値を  $x$  とする。  $x - \alpha$  で買い、  $x + \alpha$  で売ろうとする戦略である。簡単化のため、この  $\alpha$  の値は誰もが同じと仮定する。FLEの値を以下のように①から④の範囲に分類して、どのエージェントもいずれかの戦略を選択すると仮定する。以下で「即時」とは「FLEを取得するとすぐに」という意味で、「次に」は「実行ラグの後に」を意味している。

ID	FLEの範囲	戦略内容
①	$x \leq \text{mbid} - \alpha$	即時mbidで売り、後で $x$ の買い指値注文
②	$\text{mbid} - \alpha < x \leq (\text{mbid} + \text{mask})/2$	即時 $x + \alpha$ の売り指値注文 次に $x - \alpha$ の買い指値提出
③	$(\text{mbid} + \text{mask})/2 < x < \text{mask} + \alpha$	即時 $x - \alpha$ の買い指値注文 次に $x + \alpha$ の売り指値注文
④	$\text{mask} + \alpha \leq x$	即時maskで買い、次に $x$ の売り指値注文

表 4 - 4

戦略②と③は、動的均衡価格の周辺の変動を利用しようとするものである。売りと買いの注文の順番については既存のmbidとmaskの間に落ちて新たなmbidあるいはmaskとなりそうな価格のほうを先に発注する。

## 5. シミュレーションの結果

### 5. 1 分布の中央値への収束

定義域の任意の値から始まっても、FLEの見直し過程を通じて、取引価格は  $H(x)$  の中央値の値に向かう。図5-1では、凡例にベータ関数のパラメータ値を示した。表5-1の中央値 (median) は四捨五入した値を示す。価格の定義域は  $[11, 60]$  の区間の整数である。ベータ分布は  $[0, 1]$  が定義域であり、アファイン変換して定義域を  $[11, 60]$  に変換している。

□	$\alpha$	$\beta$	median
1	7	2	50
2	5	5	35
3	0.9	0.9	35
4	2	7	20

表5-1

図5-1では価格15で開始している。その後それぞれの中央値に収束している。



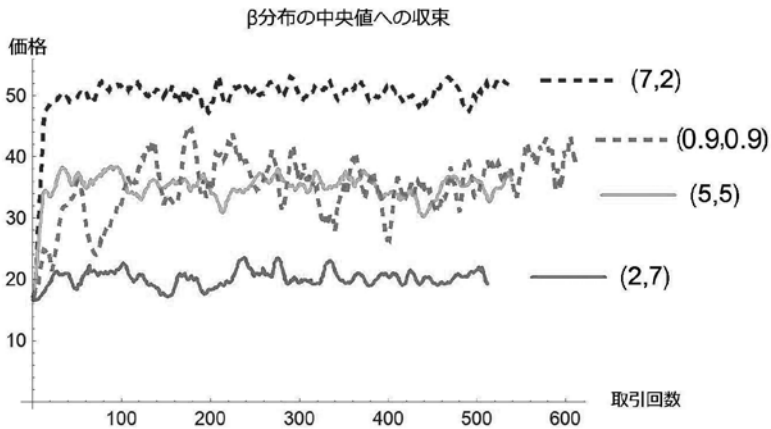


図 5 - 1

## 5. 2 流動性要因の売買注文の影響

売買注文の発生源は2つあり、FLEの見直しと流動性要因である。前者は中央値への推移をもたらす。後者の売り買いが継続的に偏れば取引価格は推移する。エージェントが価格の動きを予想する際には、中央値を推測し、また同時に売り買いの偏りの継続時間と規模を推測することになる。観察される価格の推移は2つの発注源からのフローの相対的な規模に依存する。一部のエージェントは経験則からこれらを推測できるとすると、価格の時間経路を予想できると仮定できることになる。図5-2は流動性要因の注文が売りに偏った場合の価格変化の例である。ここでは、価格は次数を20にした取引価格の移動平均である。この例での中央値は35である。時刻1.25のあたりで売りが増加して、2.5まで続いている。その間、ほとんどの時間に移動平均価格は中央値を下回っている。

次々に到着する売りの成行き注文が、mbidを押し下げてゆく。いっぽうmaskはこれまでのものが残ったままで、いっしょには下がらない。時々跳ね上がるのは、たまの買いの成行きが来た時には、下がっていないmaskで約定するからである。



図 5 - 2

### 5. 3 群れ行動による $H(x)$ の推移

当該企業にとって良いニュースが到着したとする。企業の利益の増加が予想され、株価の上昇には誰もが同意見であるとしても、上昇幅はわからない事態が起こったとする。見込まれる企業利益もはっきりしない状態でも、さっそく株価は決めなければならない。新たな価格を探す過程となる。ニュース到着とともに、 $H(x)$ は右に移動しかつ平坦に近い形になる。最初に提出された売買注文で取引価格が決定される。そこで観察された値に基づき、エージェントはFLEを修正すると、 $H(x)$ は当初の取引価格の方向に移動し尖度が大きくなるであろう。このような過程が続く際に、たまたま分布の右端で取引が続けば、 $H(x)$ の形状は追従するようにさらに形をかえる。当初に観察された行動に複数のエージェントが追従する過程は群れ行動と考えることができる。コンセンサスを探しながら、価格はどこにでも行く可能性がある。Sornette [1993] の自発的協調行動 (cooperative self-organization) に相当する事象と考えられる。

次のような手順でシミュレーションを行い、サンプル事例を得た。図 5 - 4。ベータ分布のパラメター  $\alpha$ 、 $\beta$  として 7 組の値を用意する。図 5 - 3 は典型的

な形状の3つの例を示す。

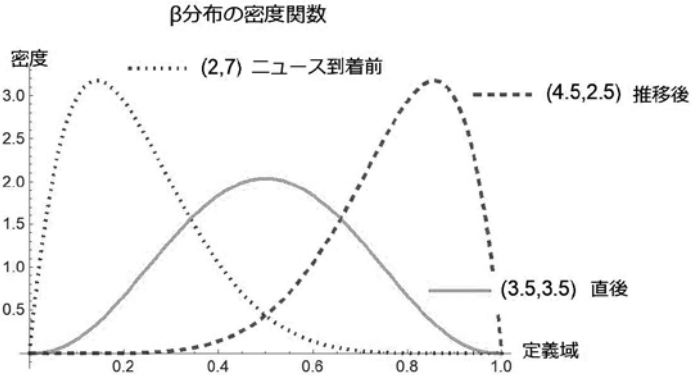


図 5 - 3

当初、パラメータ値は $(2, 7)$ とする。 $(\alpha, \beta) = (2, 7)$ 。左側に集中した形状である。ニュースの到着とともに $(3.5, 3.5)$ に交換する。左右対称かつ分散が大きく、投資家の予想がニュース到着前よりばらついた状態を表す。その後、取引価格の20サンプルの移動平均の計算を開始する。以下ma20と記す。20サンプルごとに、7つの $\beta$ 分布のなかから、期待値がma20の値に最も近いものを選ぶ。 $H(x)$ をその $\beta$ 分布に置き換える。次にFLEを選択するエージェントがいれば、移行後の $H(x)$ から選ぶとする。板に残っている既存の指値注文はそのままであるが、あらたな指値注文は移行後の $H(x)$ から抽出されたFLEに基づくものとなる。価格はあらたな中央値の方向に動いてゆく。そのような過程は複数のエージェントが観察された事象に追隨する行動をとるという点で群れ行動と同じである。図5-4では●で示す時点で $H(x)$ の推移が起きている。左から1つ目の●がニュースの到着時点である。

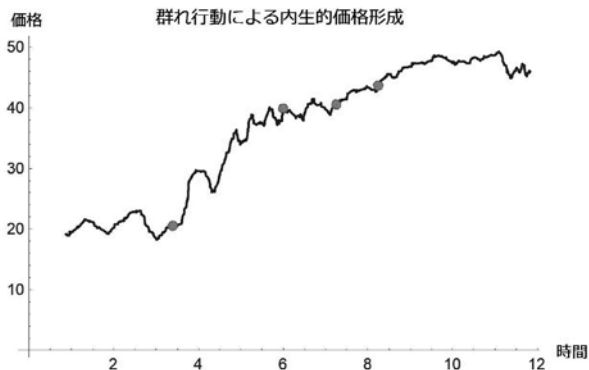


図 5 - 4

#### 5. 4 尖度と厚い裾

株価変動率は正規分布に比べれば、尖度が大きく、裾野が厚いことが stylized facts (「お決まりの事実」増川他 [2011]) のひとつとして知られている。シミュレーションにおいてもやはり価格変化率は高い尖度と厚い裾野を示す。大きい尖度については次のような説明が可能である。板には、ほとんどの場合、最良気配、この論文の mask と mbid、に続いて指値の注文が並んでいる。売買注文の偏りは指値注文の「厚み」に吸収されるのである。そのため、相対的に小さな動きばかりとなる。いっぽう自由に動くならば、次に述べる理由により正規分布に近似した動きとなるであろう。

所与の時間内の売り注文の到着数を  $X_1$ 、買いの到着数を  $X_2$  とする。この論文の売買注文の到着はポアソン過程である。2つのポアソン分布の確率変数の差  $X_2 - X_1$  は正規分布に収束する。また収束は早い [Johnson et al 1993]。簡単化のため、売り注文の到着が  $-1$ 、買い注文が  $+1$  の価格変化をもたらすとしよう。人工市場におけるネットの買い注文数の分布は正規分布で近似できることになる。

しかし人工市場でも到着数の偏りは最良気配の後ろに控える指値注文に吸収

されるので、価格の変化は到着数の変動よりも、より分散の小さい動きとなる。シミュレーションでは、4.7の戦略②と③にあるようにFLEが当面のmaskとmbidに近いエージェントは売り買い両方の指値を出す。かれらが変動を小さくする役割をしている。

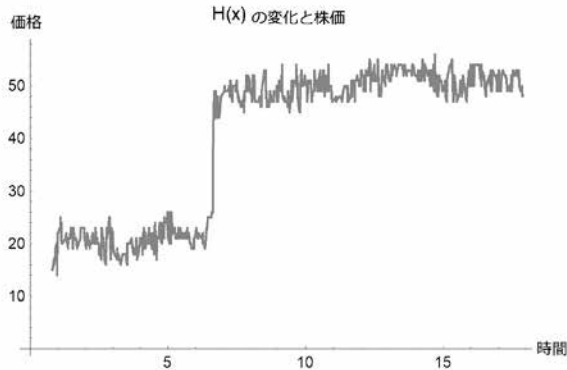


図 5 - 5

厚い裾野の説明としては、 $H(x)$ がシフトするような事態で発生すると考えられる。図5-5は $\beta$ 分布のパラメータを時間6.5のあたりで(2, 7)から(5, 5)へと変化させた事例である。もとの変化率を標準化した数値の分布を図5-6に示している。最大9.7最小-4.7であった。比較のため、正規分布でその区間に対応する確率を点で重ねている。正規分布に比較して高い尖度と厚い裾野である。増川他 [2011] は特段にニュースがなくても大きな変動が起こった事例を紹介している。そのような事例も、群れ行動が $H(x)$ のシフトをもたらしたものと説明可能である。「ビッドアスクの開き」はミクロ構造の研究テーマの一つである。動的均衡モデルに基づけば「開き」は $H(x)$ の尖度で決まってしまう。指値の値はFLEによって決まり、FLEは $H(x)$ からのランダム抽出である。

ビッドアスクの開きは、この論文のmaskとmbidの間隔である。ニュース到

着直後の混乱期を除き、maskとmbidの位置は裾野ではなく中央値近辺であろう。指値の間隔は $H(x)$ の尖度で決まってしまう。いっぽう、先行研究で構築された人工市場では競りの過程が検討不十分な仮定で置き換えられているので、ビッドアスクの開きを議論することができない。

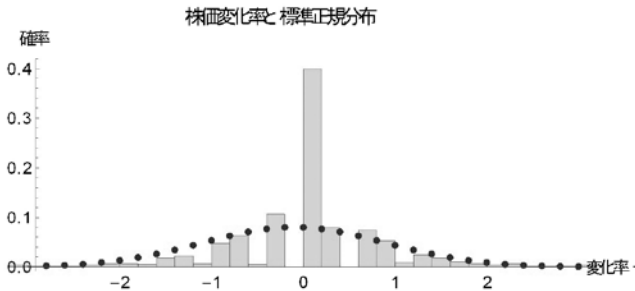


図 5 - 6

## 6. 結 論

シミュレーションにより動的均衡の理論モデルに数値を代入して内生的な価格決定を可視化することができた。人工市場でも実際の株式市場の「お決まりの事実」を再現することができた。先行研究の人工市場モデルおよびマイクロ構造モデルでは、バッチ取引であり実際の市場のザラバの競りの過程を再現していない。この論文では指数サイコロを用いることでザラバ取引が再現できている。人工市場の改善方法を提案できるものである。

この論文では適応的期待形成を行うエージェントを設定しなかった。次の課題として明示的に予想の変化が伝播する過程を検討したい。価格変化率は厚い裾野を持つことが知られている。予想の伝播経路をモデル化することにより大規模な価格変動を人工市場で再現することができるであろう。Bouchaud & potters [2003] では、大量の金融データの統計的な特徴が分析されている。

それらと人工市場で得られる結果と比較検討することも課題である。

このシミュレーションはMathematica ver12を用いて行った。Mathematicaで人工市場のシミュレーションを行うことは2018年5月に大学院生であった伊早坂弘君の発案である。人工市場の先行研究の文献収集は彼が行った。寄り付きまでのプログラムは共同の作業によるものである。

## 参考文献

和泉潔, 鳥海不二夫, 松井宏樹「電子市場シミュレーション」電子情報通信学会, FIT (情報科学技術フォーラム) 2007

和泉潔, 鳥海不二夫, 松井宏樹「人工市場による取引アルゴリズムの評価」情報処理学会研究報告2008 ICS-151(18), 2008/3/7

和泉潔, 鳥海不二夫, 松井宏樹「現実の金融市場へ近づく人工市場」人工知能学会誌24巻3号, 2009年5月

奥藪智仁, 岡島寛, 松永信智「投資家行動モデルおよび市場のシンプルモデル化に基づく株式市場モデルの構築」No.16-14第59回自動制御連合講演会, 2016年11月,

ケインズ, ジョン・メイナード, 塩野谷祐一訳「雇用・利子および貨幣の一般理論」(普及版) 東洋経済新報社, 1995年

内藤大輔, 八木勲「信用取引を考慮した人工市場の構築」情報処理学会第76回全国大会3S-4, 2014

増川純一, 水野貴之, 村井浄信, 尹熙元, 「株価の経済物理学」培風館 2011年

Jean-Philippe Bouchaud, Marc Potters, *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing*, 2<sup>nd</sup> Ed. Cambridge University Press, 2003

Norman L. Johnson, Samuel Kotz, Adrienne W. Kemp, *Univariate Discrete Distributions*, 2<sup>nd</sup> ed. John Wiley & Sons, Inc., 1993

Maurine O'Hara, *Market Microstructure Theory*, Blackwell, 1995

Didier Sornette, *Why Stock Markets Crash*, Princeton University Press, 2003



## Appendix: Mathematicaプログラムの補足説明

## A.1. エージェントの元帳

ID	type	floor	FLE xi	location
12	2	1	12	
ai	bi	ais	bis	flag3
	12			0
qa	qb	qa*	qb*	long/short
	1			
T1	T2	T3	T0	cash

表 A - 1

各エージェントに関する情報は上に示す表に記入する形で保存する。この表形式は、初期値としてExcelから読み込む表と同じ形式である。初期値を設定するために、Excelシートで記入し、Mathematicaにインポートすれば、Mathematicaのnoteに直接記入するよりもはるかに効率的である。売りの価格と数量は(4, 1)と(6, 1)の位置の要素の値である。取引開始前の板寄せではこれらの値を読み込み、需給曲線および超過需要を導く。ザラバに移行後は、指数のサイコロを振る際には毎回エージェント全員のこれらの値を読み込み、「板」を作成する。将来時点の一連の操作が予定されている場合には、(4, 3)～(4, 5)および(6, 3)～(6, 5)に内容を記録しておく。

## A.2 リストの利用とデータ並べ直し

MathematicaのListは他の言語、例えばVBAの配列変数に相当するものである。どちらの言語でも次元は最初に指定する必要がある。MathematicaではAppend [ ] を使うと途中からでも次元を追加することができる。板を作成するためには、所与の価格につき、売り手と買い手のリストを作成することが必要である。そのためには、ID番号順に元帳を読み、該当する価格別のリストにエージェントのID番号と発注数量のペアからなる小リストを追加してゆく。この時、Append [ ] が役立つ。

次の一手を行えるエージェントを決める作業でも最短時間だけでなくエージェントのIDなども必要である。この時、ベクトルと同じ形の {ID, 時間, 時間タイプ} のリストの形で集めたものを、第2要素、ここでは、時間、を指定して並べ直すことができる。リストの形を保ったまま最小値を見つけられるので大変便利である。ひとつずつエージェントに対応して {{...}, {...}, {...}} のように小さなリストが並んでいるとして、Sort [{{...}, {...}, {...}}, #1 [[2]] <#2 [[2]] &] のように使う。