2階層分権的生産システムの統合問題

奥　田　和　重

1．緒　　言

分権的生産システムに関する研究としてこれまでに[1][2]を報告してきた。[1]では他工程から独立して意思決定を行う自律的な工程で構成される多段階生産システムを分権的生産システムとして定義し，その単一期間生産計画問題についてダイナミックゲーム理論を適用することで工程間の相互関係を満たすNash均衡解を求める方法を提案している。[2]では，中小企業が連携して生産を行うモデルの設定に関して[1]の分権的生産システムの各工程が企業連携に参加する中小企業であるとして，その多期間生産計画問題について[1]と同様にダイナミックゲーム理論を適用し企業間の相互関係を満たすNash均衡解を求めている。これらで取り上げた分権的生産システムでは生産目標からのずれを目的関数としており，これを最小化している。そこでは前提条件として生産目標は与えられているものとしている。本論文では，多段階生産システムに上位レベルの意思決定者を設け，この上位レベルの意思決定者が多段階生産システムの各工程に対して生産目標を設定する2階層分権的生産システムを取り上げ，この生産目標設定による統合方法を検討する。

2階層分権的生産システムのような2階層計画問題（2－level（Bi-level）Programming Problem）は[3]のようなサーベイ論文で取り上げられているように数多くの研究がなされている。それらの多くは，上位レベルと下位レベルの意思決定者はそれぞれ1の場合のモデルを対象にしてStackelberg均衡解を求める方法を提案している。[4]は2階層計画問題にマルチパラメトリック法

を適用して２次計画モデル，線形計画モデル，混合整数計画モデルの解法を提案している。邦文では，例えば[5][6]の報告例がある。[5]では目的関数の凸性と１次独立制約想定を前提としない２階層システムを対象に階層システム全体を最適にするアルゴリズムを提案している。[6]は２次の目的関数と線形のシステム方程式を持つ２階層システムを対象に誘導Stackelberg戦略を構築し動的計画法を用いた解法を提案している。

２階層システムで下位レベルの意思決定者が複数存在する場合，下位レベルの意思決定者の間では相互関係を満たすNash均衡解を求める問題と，上位レベルと下位レベルの間ではStackelberg均衡解を求める問題になり，階層システム全体ではStackelberg-Nash均衡解を求める問題になる。この問題を取り扱った研究には例えば[7][8]がある。[7]は上位レベルの決定変数をパラメータとして下位レベルの意思決定問題の最適条件を求め，この最適条件を上位レベルの制約条件に組み込んで階層システム全体の最適解を求める方法を提案している。対象としている階層システムは２階層システム，３階層システム，下位レベルに複数の意思決定者が存在する２階層システムである。また[8]は非線形の目的関数と制約条件式を持つ２階層システムのStackelberg-Nash均衡解を求める遺伝的アルゴリズムを提案している。本論文では多段階生産システムの各工程が２階層システムの下位レベルの意思決定者に該当し，上位レベルの意思決定者は下位レベルの各工程に生産目標を提示することで多段階生産システム全体の最適化を図る－すなわち生産目標設定による統合問題を取り扱う。多段階生産システムは，下位レベルの意思決定者（工程）が他工程との相互関係を満たす生産計画を他の意思決定者の決定に影響されることなしに自律的に決定する分権的生産システムで，決定する生産計画はNash均衡解になる。上位レベルの意思決定者は，このNash均衡解が存在する条件を制約条件に取り込んで生産システム全体が最適になるように生産目標を設定する。これはStackelberg-Nash均衡解になる。本論文ではこのような２階層分権的生産システムを対象とする。

本論文の構成は次のようである。次の２章では，２階層分権的生産システム

の構成と理論的背景を述べ，第３章では，２階層分権的生産システムの生産目標設定による統合問題の数学モデルを設定し，Stackelberg-Nash均衡解を得る方法とそれに基づいたアルゴリズムを提案する。ここで設定する数学モデルは，上位レベルの意思決定問題は線形計画モデルで，下位レベルの意思決定問題は２次計画モデルである。第４章では，第３章で提案したStackelberg-Nash均衡解を得る方法の妥当性を検討するための数値計算例を示す。最後の第５章は，本論文の結論部である。

2．２階層分権的生産システム

2．1　２階層計画問題

２階層計画問題は，２人の意思決定者を想定し意思決定者P_1の決定が意思決定者P_2の決定に優先する場合の決定問題（図１）で，次のように定式化される[7][9]。

$$\min_{\boldsymbol{x}_1 \in X_1} f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \tag{1}$$

$$\text{sub.to } \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

$$\min_{\boldsymbol{x}_2 \in X_2} f_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \tag{3}$$

$$\text{sub.to } \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

ここで$f_1(\cdot)$，$\boldsymbol{g}_1(\cdot)$，$\boldsymbol{x}_1$は意思決定者P_1の目的関数と制約関数および決定変

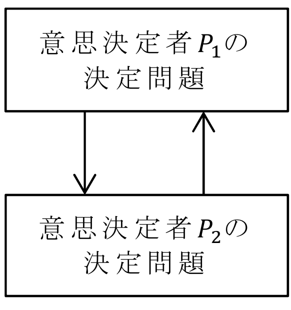

図１　２階層計画問題

数で，$f_2(\cdot)$，$\boldsymbol{g}_2(\cdot)$，$\boldsymbol{x}_2$は意思決定者P_2の目的関数と制約関数および決定変数である。またX_iは$\boldsymbol{x}_i$ $(i=1,2)$の可能領域である。

意思決定者P_1の決定が意思決定者P_2の決定に優先する場合，意思決定者P_1をleaderと呼び，意思決定者P_2をfollowerと呼ぶ。このような決定に優先順位が存在する問題はStackelberg（均衡）問題と呼ばれている[9][12]。この問題では，はじめにleaderである意思決定者P_1の任意の決定変数$\boldsymbol{x}_1^0$に対してfollowerである意思決定者P_2の決定問題

$$\min_{\boldsymbol{x}_2\in X_2} f_2(\boldsymbol{x}_1^0,\boldsymbol{x}_2) \tag{5}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1^0,\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{0} \tag{6}$$

を解く。そのために次のようにLagrange関数を定義する。

$$L_2(\boldsymbol{x}_1^0,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\lambda}) \equiv f_2(\boldsymbol{x}_1^0,\boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1^0,\boldsymbol{x}_2)$$

ここで$\boldsymbol{\lambda}$はLagrange乗数である。これより意思決定者P_2の決定問題の必要条件は次のようになる。

$$\frac{\partial L_2}{\partial \boldsymbol{x}_2}=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2}f_2(\boldsymbol{x}_1^0,\boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1^0,\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{0} \tag{7}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \boldsymbol{\lambda}}=\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1^0,\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{0} \tag{8}$$

次にleaderである意思決定者P_1の決定問題にこれらの必要条件を制約条件に加えた決定問題

$$\min_{\boldsymbol{x}_1\in X_1,\boldsymbol{x}_2\in X_2} f_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) \tag{9}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{0} \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2}f_2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{0} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{0} \tag{12}$$

を解く。この問題のLagrange関数は次のようになる。

$$L_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\mu}_3) \equiv f_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{\mu}_1^T\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$$
$$+\boldsymbol{\mu}_2^T\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2}f_2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\right)$$

$$+\boldsymbol{\mu}_3^T \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$$

ここで $\boldsymbol{\mu}_j (j=1,2,3)$ はLagrange乗数である。これより意思決定者 P_1 の決定問題の最適解を与える必要条件は次のようになる。

$$\frac{\partial L_1}{\partial \boldsymbol{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1} f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{\mu}_1^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1} \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{\mu}_2^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1} F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\mu}_3^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1} \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \boldsymbol{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2} f_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{\mu}_1^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2} \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{\mu}_2^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2} F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\mu}_3^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2} \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} \tag{14}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \boldsymbol{\mu}_1} = \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} \tag{15}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \boldsymbol{\mu}_2} = F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \boldsymbol{\mu}_3} = \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} \tag{17}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\mu}_2^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2} \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} \tag{18}$$

ここで

$$F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{\lambda}) \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2} f_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2} \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$$

である。

この問題を解くために[7][9]では，意思決定者 P_2 の決定問題の式(5)，(6)で意思決定者 P_1 の決定変数 $\boldsymbol{x}_1^0$ をパラメータとして取り扱い，最適条件式(7)，(8)から意思決定者 P_2 の決定変数 $\boldsymbol{x}_2$ を $\boldsymbol{x}_1$ の関数として求める。これを意思決定者 P_1 の決定問題の式(9)～(12)に代入して式(13)～(18)の最適条件を $\boldsymbol{x}_1$ のみの条件式にして最適な $\boldsymbol{x}_1^*$ を求め，これを用いて $\boldsymbol{x}_2^*$ を得る方法を提案している。他方，[10]

では$f_1(\cdot)$と$f_2(\cdot)$が2次関数で$\boldsymbol{g}_1(\cdot)$と$\boldsymbol{g}_2(\cdot)$が線形関数である線形―2次モデルに関するStackelberg均衡解を求めている。

次に図2のようにfollowerが複数存在する2階層計画問題を考える。対象とする問題は複数のfollower間に相互関係が存在している場合で，そのときの2階層決定問題はStackelberg-Nash（均衡）問題と呼ばれている[7]。leaderである1人の意思決定者をP_0，followerであるn人の意思決定者を$P_i\ (i=1,2,\cdots,n)$とする。このときの2階層決定問題は次のようになる。

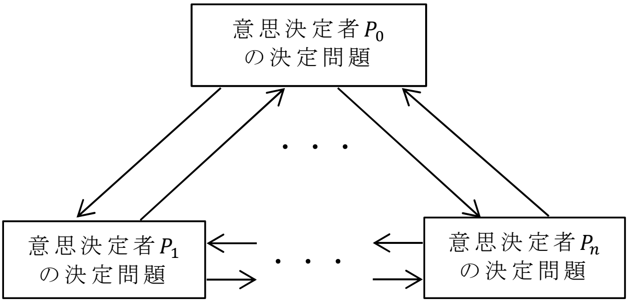

図2　followerが複数の2階層計画問題

$$\min_{\boldsymbol{x}_0 \in X_0} f_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \tag{19}$$
$$\text{sub. to } \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0} \tag{20}$$
$$\min_{\boldsymbol{x}_1 \in X_1} f_1(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \tag{21}$$
$$\text{sub. to } \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0} \tag{22}$$
$$\vdots$$
$$\min_{\boldsymbol{x}_n \in X_n} f_n(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \tag{23}$$
$$\text{sub. to } \boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0} \tag{24}$$

followerのNash均衡解は，意思決定者P_0の任意の$\boldsymbol{x}_0^0$に対してすべての$i(=1,2,\cdots,n)$について次式を満たす解である。

$$f_i(\boldsymbol{x}_0^0, \boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}^*, \boldsymbol{x}_i^*, \boldsymbol{x}_{i+1}^*, \cdots, \boldsymbol{x}_n^*) \leq f_i(\boldsymbol{x}_0^0, \boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}^*, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}^*, \cdots, \boldsymbol{x}_n^*)$$

このNash均衡解を求めるためにfollowerである意思決定者$P_i\ (i=1,2,\cdots,n)$の

決定問題

$$\min_{\boldsymbol{x}_i \in X_i} f_i(\boldsymbol{x}_0^0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \tag{25}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0^0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0} \tag{26}$$

のLagrange関数を次のように定義する。

$$L_i(\boldsymbol{x}_0^0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\lambda}_i) \equiv f_i(\boldsymbol{x}_0^0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) + \boldsymbol{\lambda}_i^T \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0^0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$

ここで $\boldsymbol{\lambda}_i$ $(i = 1,2, \cdots, n)$ はLagrange乗数である。

これよりfollower間にNash均衡解が存在するための必要条件は，すべての $i(= 1,2, \cdots, n)$ について以下の式が同時に成り立つことである。

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} f_i(\boldsymbol{x}_0^0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) + \boldsymbol{\lambda}_i^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0^0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0} \tag{27}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{\lambda}_i} = \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0^0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0} \tag{28}$$

意思決定者 P_0 の決定問題は, これらを制約条件とした次のような問題になる。

$$\min_{\boldsymbol{x}_i \in X_i, i=0,1,\cdots,n} f_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \tag{29}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0} \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} f_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) + \boldsymbol{\lambda}_i^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0}$$

$$i = 1,2, \cdots, n \tag{31}$$

$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0} \quad i = 1,2, \cdots, n \tag{32}$$

この問題のLagrange関数は次のように定義できる。

$$\begin{aligned} L_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3) &= f_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \\ &+ \boldsymbol{\mu}_1^T \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mu}_{2i}^T \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} f_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) + \boldsymbol{\lambda}_i^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mu}_{3i}^T \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_{2i}, \boldsymbol{\mu}_{3i} (i = 1,2, \cdots, n)$ はLagrange乗数である。これより意思決定者

P_0の決定問題の最適解を与える必要条件は次のようになる。

$$\frac{\partial L_0}{\partial \boldsymbol{x}_0} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_0} f_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) + \boldsymbol{\mu}_1^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mu}_{2i}^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_0} F_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\lambda}_i) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mu}_{3i}^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0} \tag{33}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \boldsymbol{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} f_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) + \boldsymbol{\mu}_1^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$
$$+ \boldsymbol{\mu}_{2i}^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} F_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\lambda}_i) + \boldsymbol{\mu}_{3i}^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0}$$
$$i = 1,2,\cdots,n \tag{34}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \boldsymbol{\mu}_1} = \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0} \tag{35}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \boldsymbol{\mu}_{2i}} = F_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\lambda}_i) = \boldsymbol{0} \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{36}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \boldsymbol{\mu}_{3i}} = \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0} \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{37}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \boldsymbol{\lambda}_i} = \boldsymbol{\mu}_{2i}^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0} \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{38}$$

ここで

$$F_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\lambda}_i) \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} f_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) + \boldsymbol{\lambda}_i^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$

$i = 1,2,\cdots,n$ である。

[7]では$\boldsymbol{x}_0$をパラメータとしてfollowerの決定問題の必要条件である式(27), (28)を解き，$\boldsymbol{x}_i (i = 1,2,\cdots,n)$を$\boldsymbol{x}_0$の関数として求めて，前述の方法と同様にして$\boldsymbol{x}_0^*$と$\boldsymbol{x}_i^* (i = 1,2,\cdots,n)$を求める方法を提案している。

2．2　2階層分権的生産システム

本論文で取り扱う分権的生産システムは[1]で取り上げた生産システムを対象とする。これは自律的な意思決定権限を有する工程で構成された多段階工程の生産システムで，各工程は自律的な意思決定機能と情報処理機能を持つ意思

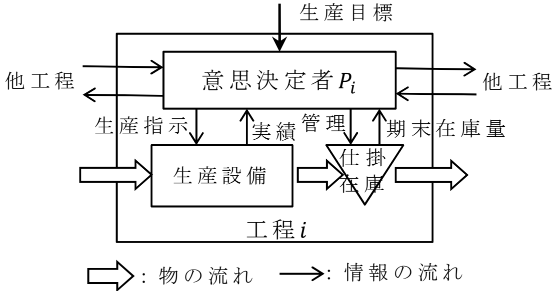

図 3　工程の構成

決定単位である。生産システムを構成する各工程は，図 3 に示すように生産設備と仕掛在庫およびこれらの管理を行う意思決定者で構成されている。前工程から送られてきた品物は生産設備で加工等の処理が実施され仕掛在庫に送られ，仕掛在庫の品物は後工程からの要求に従って出庫され後工程に送られる。工程を管理する意思決定者は，上位レベルの意思決定者から提示された生産目標を達成するように他工程との相互関係を考慮した生産計画を作成する。また，仕掛在庫を調査して期末在庫量を把握し，次の生産計画の作成に反映させる。

[1]では，上位レベルの意思決定者は工程間の相互関係を考慮せずに生産システム全体の長期の生産計画を立案し，その第 1 期の生産計画を下位レベルの意思決定者に生産目標として提示し，下位レベルの意思決定者は自らが管理する工程の短期の生産計画を工程間の相互関係を考慮して立案するモデルを取り扱っていた。そこでは上位レベルの意思決定者から提示される生産目標を所与のものとして下位レベルの単一期間・多段階生産計画問題に対して工程間の相互関係を満たすNash均衡解を求める方法を提案している。本論文では[1]では所与としていた上位レベルの意思決定者が提示する生産目標を決定する 2 階層計画問題（式⒆～式㉔）としてとらえ，Stackelberg-Nash均衡解を求める方法を提案する。

本論文で取り扱う上位レベルの生産計画期間と下位レベルの生産計画期間の関係を図 4 に示す。上位レベルの意思決定者は工程間の相互関係を考慮せずに

長期の生産計画を立案し，第１期の生産量と期末在庫量を生産目標として下位レベルの各工程に提示する。下位レベルの意思決定者は上位レベルの意思決定者から示された生産目標を達成するように工程間の相互関係を考慮した生産計画を立案し，それに基づいて生産を実施する。生産を実施した結果，得られる生産実績と期末在庫量を上位レベルの意思決定者に報告する。上位レベルの意思決定者は報告された生産実績と期末在庫量を用いて次の長期生産計画を立案する。

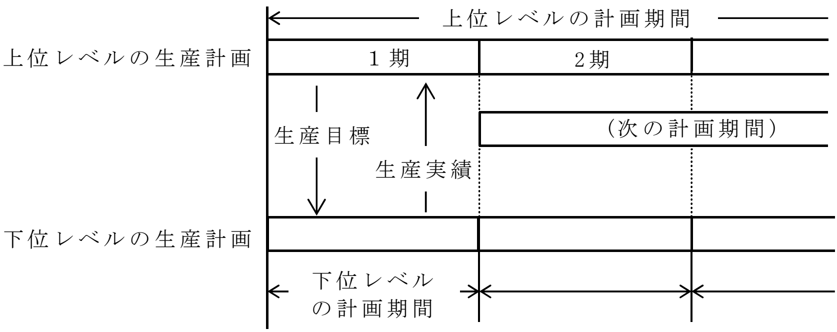

図４　上位レベルと下位レベルの生産計画

下位レベルの意思決定者は上記のようにして上位レベルの意思決定者によって設定された生産目標をパラメータとして取り扱い，工程間の相互関係を満たす最適な生産計画を得るための最適条件を求める。上位レベルの意思決定者は，下位レベルの各工程の意思決定者から報告される最適条件を考慮して多期間生産計画問題の最適化を行う。これによって得られた第１期の生産目標を下位レベルの意思決定者に提示する。下位レベルの意思決定者は指示された生産目標からのずれを最小にする最適な生産計画を先に求めた最適条件から求める。

3．2階層分権的生産システムの数学モデルと解析

3．1　前提条件と定式化

前述の2階層分権的生産システムを定式化するために，前提条件を次のように設定する。

⑴　2階層分権的生産システムは1つの上位レベルとn工程からなる多段階生産工程の下位レベルによって構成される。各工程は図3のように生産設備と仕掛在庫，これらを管理する意思決定者からなり，各工程を添字iで表す。$(i=1,\cdots,n)$

⑵　上位レベルが計画する生産計画の計画期間をH期間とし，各期を添字hで表す。$(h=1,\cdots,H)$

⑶　上位レベルが決定するh期の生産時間と期末在庫量をそれぞれ$\boldsymbol{X}_i(h)\in\mathcal{R}^{m_i}$（時間），$\boldsymbol{Y}_i(h+1)\in\mathcal{R}^{m_i}$（pc）とする。また$h$期の需要量を$\boldsymbol{D}_i(h)\in\mathcal{R}^{m_i}$（pc）とする。計画期間の第1期の初期在庫量は既知の$\boldsymbol{Y}_i(1)=\boldsymbol{a}_i$であるとする。ここで$\boldsymbol{a}_i$は既知の量である。$(i=1,\cdots,n,h=1,\cdots,H)$

⑷　各工程ではm_i種類の品物を製造しているものとする。各工程での品物の生産時間を$\boldsymbol{x}_i\in\mathcal{R}^{m_i}$（時間），期首（初期）在庫量を$\boldsymbol{y}_i^0=\boldsymbol{a}_i\in\mathcal{R}^{m_i}$（pc），期末在庫量を$\boldsymbol{y}_i\in\mathcal{R}^{m_i}$（pc）とする。また需要量は第1期の需要量で$\boldsymbol{D}_i(1)\in\mathcal{R}^{m_i}$（pc）とする。$(i=1,\cdots,n)$

⑸　各工程が品物を製造するのに要する単位生産費用と単位在庫費用を$\boldsymbol{c}_{pi}\in\mathcal{R}^{m_i}$（費用/時間），$\boldsymbol{c}_{hi}\in\mathcal{R}^{m_i}$（費用/pc）とする。$(i=1,\cdots,n)$

⑹　各工程には利用可能な資源の量に制約があるものとする。$\boldsymbol{\alpha}_i\in\mathcal{R}^{m_i}$（kg/pc）を品物1個製造するのに必要な資源の量，$\boldsymbol{b}_i\in\mathcal{R}^{m_i}$（kg）を利用可能な資源の量とする。$(i=1,\cdots,n)$

⑺　品物は工程計画によって定められた各工程の加工を順次受け完成品になる。加工が終了した品物は仕掛在庫に送られ，後続工程から要求があれば直ちに出庫される。また生産リードタイムと生産順序は考慮しない。品切

れは許されないものとする。

上位レベルの意思決定者はH期間に関する$\sum_{i=1}^{n} m_i$種類の品物の総生産費用を最小にする生産計画を作成する。その生産計画問題は次のような線形計画問題として定式化することができる。

$$\min Z(\boldsymbol{Y}_i(h+1),\boldsymbol{X}_i(h))=\sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{c}_{pi}^T\boldsymbol{X}_i(h)+\boldsymbol{c}_{hi}^T\boldsymbol{Y}_i(h+1)) \tag{39}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{Y}_i(h+1)=\boldsymbol{Y}_i(h)+\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{X}_i(h)-\boldsymbol{D}_i(h) \qquad i=1,\cdots,n, h=1,\cdots,H \tag{40}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{X}_i(h)\le \boldsymbol{b}_i \quad i=1,\cdots,n, h=1,\cdots,H \tag{41}$$

$$\boldsymbol{Y}_i(1)=\boldsymbol{a}_i \quad i=1,\cdots,n \tag{42}$$

$$\boldsymbol{X}_i(h)\ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{Y}_i(h+1)\ge\boldsymbol{0} \qquad i=1,\cdots,n, h=1,\cdots,H \tag{43}$$

ここで$\boldsymbol{p}_i\in\mathcal{R}^{m_i\times m_i}$は生産率で工程$i$が製造する品物の単位時間当たりの生産個数（pc/時間）である。

他方，下位レベルの多段階生産システムの単一期間生産計画問題は上位レベルのH期間生産計画問題（式(39)～(43)）から求められる第１期の生産時間$\boldsymbol{X}_i(1)$と第１期の期末在庫量$\boldsymbol{Y}_i(2)$を生産目標とし，その生産目標からのずれを最小にする２次計画問題として次のように定式化することができる。

$$\min\ f_i(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{x}_i)=\frac{1}{2}\left\{\left(\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{Y}_i(2)\right)^T Q_i\left(\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{Y}_i(2)\right)+\left(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{X}_i(1)\right)^T R_i\left(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{X}_i(1)\right)\right\} \tag{44}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{y}_i^0+B_{ii}\boldsymbol{x}_i-\sum_{j=1,j\ne i}^{n}B_{ij}\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{D}_i(1) \tag{45}$$

$$\boldsymbol{x}_i\ge\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}_i\ge\boldsymbol{0} \tag{46}$$

ここで，$\boldsymbol{y}_i^0=\boldsymbol{a}_i$，$Q_i$と$R_i$は生産目標からのずれに対するペナルティで$m_i\times m_i$対角行列である。また，$B_{ij}=\boldsymbol{p}_iB'_{ij}$，$B'_{ij}$は工程$i$の後続工程$j$で製造する品物１個に要する工程$i$の品物の数で$m_j\times m_i$行列である。

３．２　下位レベルの意思決定問題

下位レベルは工程間に相互関係が存在する多段階生産工程で，各工程の意思決定者は他工程との相互関係を満たす生産計画を作成する。工程間の相互関係

を満たす生産計画はNash均衡解になることから，［1］と同様にNash均衡解を次のように定義する。

定義　n人非協力ゲームにおいてNash均衡解が存在するならば，n人の意思決定者がこのNash均衡解を採用する限り，いずれの意思決定者も自己の目的関数を改良するような解は存在しない。

この定義を適用するために式(45)を式(44)に代入して，目的関数を決定変数$\boldsymbol{x}_i$のみの関数$z_i(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$として表す。すなわち

$$z_i(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n) \equiv f_i\left(\boldsymbol{y}_i^0 + B_{ii}\boldsymbol{x}_i - \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{n} B_{ij}\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{D}_i(1), \boldsymbol{x}_i\right) \tag{47}$$

これを用いて先の定義を表すと次のようになる。

$$z_i(\boldsymbol{x}_1^*,\cdots,\boldsymbol{x}_{i-1}^*,\boldsymbol{x}_i^*,\boldsymbol{x}_{i+1}^*,\cdots,\boldsymbol{x}_n^*) \leq z_i(\boldsymbol{x}_1^*,\cdots,\boldsymbol{x}_{i-1}^*,\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_{i+1}^*,\cdots,\boldsymbol{x}_n^*) \tag{48}$$

この式を満たすNash均衡解を得るために，次のようにベクトルと行列を書き換える。

$$B_i = (-B_{1i},\cdots,-B_{i-1i},B_{ii},-B_{i+1i},\cdots,-B_{ni})^T$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y^0} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{y_1^0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{y_n^0}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1(2)\\ \vdots\\ \boldsymbol{Y}_n(2)\end{pmatrix},\ \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_1(1)\\ \vdots\\ \boldsymbol{D}_n(1)\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{X}_i(1),$$

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & Q_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & Q_n \end{bmatrix}$$

これらのベクトルと行列を用いて式(44)～(46)を書き直すと次のようになる。

$$\min\ f_i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_i) = \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Y})^T Q(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Y}) + (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)^T R_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)\} \tag{49}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^0 + \sum_{i=1}^{n} B_i\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{D} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{x}_i \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \tag{51}$$

2.1節で示したLagrange関数を定義し，式(27)と式(28)から$\boldsymbol{x}_i^*$と$\boldsymbol{y}^*$を求めるのであるが，これはすでに［1］で求めているのでここではその結果を以下に示す。

$$\boldsymbol{x}_i^* = -2R_i^{-1}B_i^T Q\{\Gamma^{-1}(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Y}) + V\} + \boldsymbol{X}_i \tag{52}$$

$$\boldsymbol{y}^* = \Gamma^{-1}(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Y}) + V + \boldsymbol{Y} \tag{53}$$

ここで

$$\Gamma = \mathrm{I} + 2\sum_{j=1}^{n} B_j R_j^{-1} B_j^T Q$$

$$\mathrm{V} = \Gamma^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} B_j \boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{D}\right)$$

である。ここで I は $\sum_{j=1}^{n} m_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j$ 単位行列，Γ は $\sum_{j=1}^{n} m_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j$ の正則行列である。

式(52)と式(53)によって工程 i のNash均衡解を生産目標 $\boldsymbol{X}_i$，$\boldsymbol{Y}$ の関数として表すことができた。これを $\boldsymbol{x}_i^*(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y})$，$\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y})$ と記述することにする。工程 i のNash均衡解が実行可能であるためには $\boldsymbol{x}_i^*(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}) \geq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}) \geq \boldsymbol{0}$ でなければならない。したがって上位レベルの意思決定者はこの条件を満たすように生産目標を決定する必要がある。この条件を満たす生産目標の範囲を R_{Fi} で表し，すべての $i(i = 1, \cdots, n)$ について以下のように定義する。

$$\begin{aligned} R_{Fi} \equiv \{(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}) | & -2R_i^{-1} B_i^T Q\{\Gamma^{-1}(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Y}) + V\} \\ & + \boldsymbol{X}_i \geq \boldsymbol{0}, \Gamma^{-1}(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Y}) + V + \boldsymbol{Y} \geq \boldsymbol{0}\} \end{aligned} \tag{54}$$

この R_{Fi} は $\sum_{i=1}^{n} m_i \times \sum_{i=1}^{n} m_i$ 空間に存在する閉凸集合である。

上位レベルの意思決定者が生産目標をこの範囲内に収まるように決定すれば，式(52)と式(53)によって与えられる解は常にNash均衡解である。$(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}) \in R_{Fi}$ のとき，式(52)と式(53)で求められる解の中で2次計画問題における基底変数の集合を $S_i^{(0)}$，非基底変数の集合を $\bar{S}_i^{(0)}$，$(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y})$ の範囲を $R_{Fi}^{(0)}$ とする。$(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}) \notin R_{Fi}^{(0)}$ のとき $S_i^{(0)}$ に含まれる変数の1つが等号で成り立ち，$\bar{S}_i^{(0)}$ に含まれる変数の1つが不等号で成り立つ。それらの変数が基底変換されて $S_i^{(1)}$ と $\bar{S}_i^{(1)}$ が作られる。このときの生産目標 $(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y})$ の範囲を $R_{Fi}^{(1)}$ とする。このような基底変数と非基底変数の集合が K_i 個存在するものとし，各集合を $k_i(k_i = 1, \cdots, K_i, i = 1, \cdots, n)$ で表すことにする。2次計画問題の場合では $(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y})$ の値によっては変数の入れ替わりがなく，S_i と $\bar{S}_i$ の要素が増加のみ，あるいは減少のみの場合がある[11]。このように集合 $S_i^{(k_i)}$ と $\bar{S}_i^{(k_i)}$ において1対の変数の入れ替わり，ないし1つの変数の増減によって新しい集合 $S_i^{(k_i+1)}$ と $\bar{S}_i^{(k_i+1)}$ が得られるとき，$(S_i^{(k_i)}, \bar{S}_i^{(k_i)})$ と

$(S_i^{(k_i+1)}, \bar{S}_i^{(k_i+1)})$に対応する$(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y})$の範囲を$R_{Fi}^{(k_i)}$，$R_{Fi}^{(k_i+1)}$とする。１対の変数の入れ替わりないし１つの変数の増減によって$R_{Fi}^{(k_i)}$から$R_{Fi}^{(k_i+1)}$に移ることができ，また逆も言えるとき$R_{Fi}^{(k_i)}$と$R_{Fi}^{(k_i+1)}$は隣接していると呼ぶことにする。

生産目標$(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y})$を可能な範囲で変化させたとき，上記より工程$i$における$R_{Fi}^{(k_i)}$が$K_i$個存在するものとする。$(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}) \in R_{Fi}^{(k_i)}$，$k_i = 1, \cdots, K_i$に対する工程$i$のNash均衡解を$\boldsymbol{x}_i^{(k_i)}$，$\boldsymbol{y}^{(k_i)}$とする。式(52)と式(53)を考慮して$\boldsymbol{x}_i^{(k_i)}$と$\boldsymbol{y}^{(k_i)}$を以下のように表すことにする。

$$\boldsymbol{x}_i^{(k_i)} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{1ij}^{(k_i)} \boldsymbol{X}_j + \boldsymbol{b}_{1i}^{(k_i)} \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{c}_{1i}^{(k_i)} \tag{55}$$

$$\boldsymbol{y}^{(k_i)} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{2j}^{(k_i)} \boldsymbol{X}_j + \boldsymbol{b}_{2}^{(k_i)} \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{c}_{2}^{(k_i)} \tag{56}$$

また生産目標が存在する範囲も次のように表すことにする。

$$R_{Fi}^{(k_i)} \equiv \{(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}) | -\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{1ij}^{(k_i)} \boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{b}_{1i}^{(k_i)} \boldsymbol{Y} \leq \boldsymbol{c}_{1i}^{(k_i)}, -\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{2j}^{(k_i)} \boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{b}_{2}^{(k_i)} \boldsymbol{Y} \leq \boldsymbol{c}_{2}^{(k_i)} \} \tag{57}$$

この$R_{Fi}^{(k_i)}$は工程の最適な生産計画を与える生産目標$(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y})$の条件である。下位レベルの意思決定者はこの条件を上位レベルの意思決定者に報告することによって，上位レベルの意思決定者が行う多期間生産計画の最適化に関与することができる。

3．3　上位レベルの意思決定問題

上位レベルの意思決定者は下位レベルの各意思決定者が決定したNash均衡解が存在する条件$R_{Fi}^{(k_i)}$を考慮して，自らの多期間生産計画問題の最適化を行う。これを行うには式(57)より

$$-\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{1ij}^{(k_i)} \boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{b}_{1i}^{(k_i)} \boldsymbol{Y} \leq \boldsymbol{c}_{1i}^{(k_i)} \tag{58}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{2j}^{(k_i)} \boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{b}_{2}^{(k_i)} \boldsymbol{Y} \leq \boldsymbol{c}_{2}^{(k_i)} \tag{59}$$

を上位レベルの意思決定者の多期間生産計画問題式(39)～(43)の制約条件に加える

必要がある。しかしながら，この範囲は工程毎にK_i個存在するので，上位レベルの意思決定者の生産計画問題は$\prod_{i=1}^{n} K_i$組存在することになる。そこで各工程から報告される範囲$R_{Fi}^{(k_i)}, i=1,\cdots,n$の中から$\bigcap_{i=1}^{n} R_{Fi}^{(k_i)} \neq \emptyset$となるような任意の範囲を選ぶ。これを$R_{Fi}^{(\hat{k}_i)}$とする。上位レベルの意思決定者の制約条件（式⑽～⒀）を満たす各工程の範囲の組合せがJ組存在するものとする。これを$\omega_\zeta, \zeta=1,\cdots,J(1 \leq \mathrm{J} \leq \prod_{i=1}^{n} K_i)$で表す。$\omega_\zeta$を構成する範囲の添字集合を$I_\zeta$とする。すなわち

$$\omega_\zeta = \bigcap_{i=1}^{n} R_{Fi}^{(\hat{k}_i)} \bigcap M, \qquad \hat{k}_i \in I_\zeta, \qquad \zeta = 1,\cdots,J \tag{60}$$

ここでMは上位レベルの制約条件によって作られる範囲で

$$M = \left\{\left(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)\right) \middle| \boldsymbol{Y}_i(1) + \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{X}_i(1) - \boldsymbol{Y}_i(2) = \boldsymbol{D}_i(1), \boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{X}_i(1) \leq \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{X}_i(1) \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{Y}_i(2) \geq \boldsymbol{0}, i = 1,\cdots,n\right\}$$

である。$\Omega = \bigcup_{\zeta=1}^{J} \omega_\zeta$とすると，明らかに$\Omega \subseteq \mathrm{M}$である。$\Omega = \mathrm{M}$であれば$J$個の範囲$\omega_\zeta$は$M$を$J$個の部分領域に分割する。式⑼～⒀で定式化した上位レベルの意思決定者の生産計画問題は線形計画問題であるので，その最適解はMの境界上の端点に存在する。他方，$\Omega \subset \mathrm{M}$であれば，上位レベルの制約条件は$\Omega$によって規定され，上位レベルの最適解は$\Omega$の境界上に存在する端点によって与えられる。したがった，上位レベルの意思決定者の生産計画問題は次のように書き換えることができる。

$$\min Z(\boldsymbol{Y}_i(h+1), \boldsymbol{X}_i(h)) = \sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{c}_{pi}^T \boldsymbol{X}_i(h) + \boldsymbol{c}_{hi}^T \boldsymbol{Y}_i(h+1)) \tag{61}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{Y}_i(h+1) = \boldsymbol{Y}_i(h) + \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{X}_i(h) - \boldsymbol{D}_i(h) \qquad i = 1,\cdots,n, h = 1,\cdots,H \tag{62}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{X}_i(h) \leq \boldsymbol{b}_i \quad i = 1,\cdots,n, h = 1,\cdots,H \tag{63}$$

$$(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) \in \Omega \quad \boldsymbol{Y}_i(1) = \boldsymbol{a}_i \quad i = 1,\cdots,n \tag{64}$$

$$\boldsymbol{X}_i(h) \geq \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{Y}_i(h+1) \geq \boldsymbol{0} \qquad i = 1,\cdots,n, h = 1,\cdots,H \tag{65}$$

以上の展開から，最適解を得るためのアルゴリズムは次のようになる。

〈アルゴリズム〉

ステップ１：下位レベルの生産計画問題（式(49)〜(51)）にマルチパラメトリック２次計画法[1)]を適用して各工程の生産計画 $\boldsymbol{x}_i^{(k_i)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)$, $\boldsymbol{y}^{(k_i)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)$ と生産目標が存在する範囲 $R_{Fi}^{(k_i)}$ を求める。下位レベルの意思決定者はこの範囲を上位レベルの意思決定者に報告する。

ステップ２：上位レベルの意思決定者は ω_ζ と Ω を求め，生産計画問題の制約条件に加える。

ステップ３：上位レベルの意思決定者は生産計画問題（式(61)〜(65)）を解き，各期の最適な生産時間 $\boldsymbol{X}_i^*(h)$ と期末在庫量 $\boldsymbol{Y}_i^*(h+1)$， $h=1,\cdots,H$ を求める。

ステップ４：上位レベルの意思決定者は，第１期の生産時間 $\boldsymbol{X}_i^*(1)$ と期末在庫量 $\boldsymbol{Y}_i^*(2)$ を生産目標として下位レベルの各意思決定者に提示する。下位レベルの各意思決定者は提示された生産目標を用いて最適な生産計画を求める。

４．数値計算例

ここでは[1]で取り扱った図５に示す３工程生産システムの数値計算例に本論文で提案した方法を適用する。数値計算に必要なデータを表１に示す。上位レベルの生産計画期間は５期間（$H=5$）で各期の需要量は表２のようである。

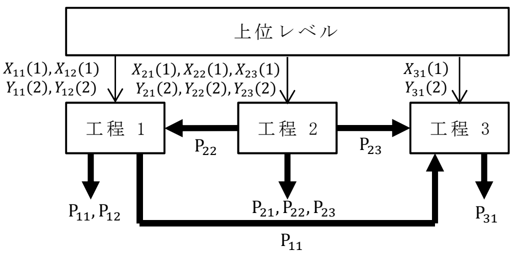

図５　３工程生産システム

1）付録参照

表1　数値計算データ

製　品		P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{31}
原材料の使用量	(kg/pc)	0.33	0.46	0.67	0.42	0.63	0.80
生産率	(pc/h)	3.0	2.2	1.5	2.4	1.6	1.25
初期在庫量	(pc)	10	25	10	10	5	12
単位生産費用	(千円/h)	3	2	4	3.5	3	2.5
単位在庫費用	(千円/pc)	1.5	0.8	1	1.5	1	1

表2　需要量データ（pc）

期	1	2	3	4	5
P_{11}	305	301	290	297	300
P_{12}	326	340	300	290	296
P_{21}	239	216	204	225	234
P_{22}	103	128	120	154	130
P_{23}	100	105	100	94	110
P_{31}	197	215	220	210	210

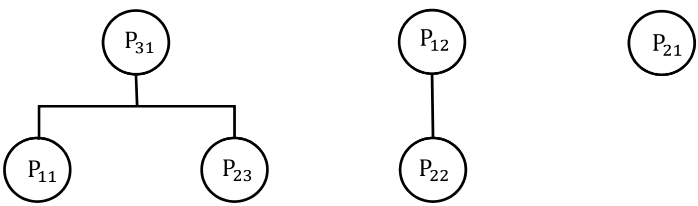

図6　製品構成

資源は各製品に共通する原材料であるとし，その利用可能量は1,010kgであるとする。また生産目標からのずれに対するペナルティは，すべての製品についてQ_iとR_iの対角要素を$q_{ii} = 0.5$，$r_{ii} = 1.0$とする。3工程の各工程は図6に示す製品構成を持つ製品を製造しており，製品P_{11}と製品P_{23}は製品P_{31}を製造する

ために用いられ，製品P_{12}を製造するために製品P_{22}が用いられる。それぞれの必要量は１個であるとする。これより$B_i(i=1,2,3)$は次のようになる。

$$B_1=\begin{bmatrix}3.0 & 0.0\\ 0.0 & 2.2\\ 0.0 & 0.0\\ 0.0 & -2.4\\ 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0.0 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 0.0\\ 1.5 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 2.4 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 1.6\\ 0.0 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix}-3.0\\ 0.0\\ 0.0\\ 0.0\\ -1.6\\ 1.25\end{bmatrix}$$

ステップ１：式(55)，(56)で表される生産計画$\boldsymbol{x}_i^{(k_i)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)$，$\boldsymbol{y}^{(k_i)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)$，および式(57)で表される範囲$R_{Fi}^{(k_i)}$を各工程について求めると，実行可能な範囲は各工程にそれぞれ１組のみ存在し，次のようである。

工程１：
$$x_{11}^{(1_1)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)=0.29X_{11}(1)-0.02X_{23}(1)-0.04X_{31}(1)$$
$$+0.91Y_{11}(2)+0.01Y_{23}(2)-0.05Y_{31}(2)+35.76$$
$$x_{12}^{(1_1)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)=0.36X_{12}(1)+0.25X_{22}(1)+0.72Y_{12}(2)$$
$$-0.11Y_{22}(2)+98.10$$
$$y_{11}^{(1_1)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)=-0.15X_{11}(1)-0.07X_{23}(1)-0.12X_{31}(1)$$
$$-0.29Y_{11}(2)+0.04Y_{23}(2)-0.15Y_{31}(2)+107.29$$
$$y_{12}^{(1_1)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)=-0.18X_{12}(1)-0.13X_{22}(1)-0.36Y_{12}(2)$$
$$+0.05Y_{22}(2)+100.95$$
$$R_{F1}^{(1_1)}=\{\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}(2)\right)|-0.29X_{11}(1)+0.02X_{23}(1)+0.04X_{31}(1)$$
$$-0.91Y_{11}(2)-0.01Y_{23}(2)+0.05Y_{31}(2)\leq 35.76,$$
$$-0.36X_{12}(1)-0.25X_{22}(1)-0.72Y_{12}(2)$$
$$+0.11Y_{22}(2)\leq 98.10$$
$$0.15X_{11}(1)+0.07X_{23}(1)+0.12X_{31}(1)$$
$$+0.29Y_{11}(2)-0.04Y_{23}(2)+0.15Y_{31}(2)\leq 107.29$$
$$0.18X_{12}(1)+0.13X_{22}(1)+0.36Y_{12}(2)$$
$$-0.05Y_{22}(2)\leq 100.95$$
$$\boldsymbol{X}_i(1)\geq\boldsymbol{0},i=1,2,3,\boldsymbol{Y}(2)\geq\boldsymbol{0}\}$$

工程２：
$$x_{21}^{(1_2)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)=0.46X_{21}(1)+0.69Y_{21}(2)+70.15$$
$$x_{22}^{(1_2)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)=-0.05X_{12}(1)+0.32X_{22}(1)-0.11Y_{12}(2)$$

$$
\begin{aligned}
&+0.87Y_{22}(2)+47.62\\
x_{23}^{(1_2)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)=&-0.04X_{11}(1)+0.39X_{23}(1)-0.11X_{31}(1)\\
&-0.01Y_{11}(2)+0.76Y_{23}(2)-0.14Y_{31}(2)+46.53\\
y_{21}^{(1_2)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)=&-0.31X_{21}(1)-0.46Y_{21}(2)+105.23\\
y_{22}^{(1_2)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)=&-0.13X_{12}(1)-0.24X_{22}(1)-0.25Y_{12}(2)\\
&-0.32Y_{22}(2)+114.29\\
y_{23}^{(1_2)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)=&-0.07X_{11}(1)-0.38X_{23}(1)-0.18X_{31}(1)\\
&+0.02Y_{11}(2)-0.39Y_{23}(2)-0.22Y_{31}(2)+74.44
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{F2}^{(1_2)}=\{\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}(2)\right)|&-0.46X_{21}(1)-0.69Y_{21}(2)\le 70.15\\
&0.05X_{12}(1)-0.32X_{22}(1)+0.11Y_{12}(2)\\
&-0.87Y_{22}(2)\le 47.62\\
&0.04X_{11}(1)-0.39X_{23}(1)+0.11X_{31}(1)\\
&+0.01Y_{11}(2)-0.76Y_{23}(2)+0.14Y_{31}(2)\le 46.53\\
&0.31X_{21}(1)+0.46Y_{21}(2)\le 105.23\\
&0.13X_{12}(1)+0.24X_{22}(1)+0.25Y_{12}(2)\\
&+0.32Y_{22}(2)\le 114.29\\
&0.07X_{11}(1)+0.38X_{23}(1)+0.18X_{31}(1)\\
&-0.02Y_{11}(2)+0.39Y_{23}(2)+0.22Y_{31}(2)\le 74.44\\
&\boldsymbol{X}_i(1)\ge\boldsymbol{0},i=1,2,3,\boldsymbol{Y}(2)\ge\boldsymbol{0}\}
\end{aligned}
$$

工程３： $x_{31}^{(1_3)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)=0.15X_{11}(1)+0.22X_{23}(1)+0.40X_{31}(1)$

$$
\begin{aligned}
&-0.05Y_{11}(2)+0.14Y_{23}(2)+0.50Y_{31}(2)+122.37\\
y_{31}^{(1_3)}\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}_i(2)\right)=&-0.12X_{11}(1)-0.18X_{23}(1)-0.32X_{31}(1)\\
&+0.04Y_{11}(2)+0.11Y_{23}(2)-0.40Y_{31}(2)+50.10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{F3}^{(1_3)}=\{\left(\boldsymbol{X}_i(1),\boldsymbol{Y}(2)\right)|&-0.15X_{11}(1)-0.22X_{23}(1)-0.40X_{31}(1)\\
&+0.05Y_{11}(2)-0.14Y_{23}(2)-0.50Y_{31}(2)\le 122.37\\
&-0.12X_{11}(1)+0.18X_{23}(1)+0.32X_{31}(1)\\
&-0.04Y_{11}(2)-0.11Y_{23}(2)+0.40Y_{31}(2)\le 50.10\\
&\boldsymbol{X}_i(1)\ge\boldsymbol{0},i=1,2,3,\boldsymbol{Y}(2)\ge\boldsymbol{0}\}
\end{aligned}
$$

ステップ２：$\Omega = \omega_1 = \cap R_{F1}^{(1_1)} \cap R_{F2}^{(1_2)} \cap R_{F3}^{(1_3)} \cap M$，$(1_1, 1_2, 1_3) \in I_1$

ここで

$$
\begin{aligned}
M = \{(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}(2)) | & Y_{11}(2) - 3.0X_{11}(1) - 10 = 305 \\
& Y_{12}(2) - 2.2X_{12}(1) - 25 = 326 \\
& Y_{21}(2) - 1.5X_{21}(1) - 10 = 239 \\
& Y_{22}(2) - 2.4X_{22}(1) - 10 = 103 \\
& Y_{23}(2) - 1.6X_{23}(1) - 5 = 100 \\
& Y_{31}(2) - 1.25X_{31}(1) - 12 = 197 \\
& 0.99X_{11}(1) + 1.012X_{12}(1) + 1.005X_{21}(1) \\
& + 1.008X_{22}(1) + 1.0332X_{23}(1) + X_{31}(1) \\
& = 1{,}010\}
\end{aligned}
$$

ステップ３：上位レベルの意思決定者の生産計画問題の制約条件にΩを追加し，修正した生産計画問題を解くと，表３に示す最適な生産計画を得た。

表３　上位レベルの最適生産計画

期			1	2	3	4	5
P_{11}	生産時間	(h)	168.15	163.85	170.12	169.57	169.24
	在庫量	(pc)	0	0	0	0	0
P_{12}	生産時間	(h)	150.00	170.00	150.00	145.00	145.00
	在庫量	(pc)	0	0	0	0	0
P_{21}	生産時間	(h)	152.00	144.000	136.00	150.00	156.00
	在庫量	(pc)	0	0	0	0	0
P_{22}	生産時間	(h)	175.00	195.00	175.00	185.00	175.00
	在庫量	(pc)	0	0	0	0	0
P_{23}	生産時間	(h)	195.28	184.72	200.36	191.07	198.58
	在庫量	(pc)	25	0	1	2	0
P_{31}	生産時間	(h)	167.56	152.44	176.46	169.36	166.18
	在庫量	(pc)	0	0	0	0	0

ステップ４：表３より，各工程に対する生産目標は次のようになる。

工程１：$X_{11}(1) = 168.15(h)$，$Y_{11}(2) = 0(pc)$

$X_{12}(1) = 150.00(h)$，$Y_{12}(2) = 0(pc)$

工程２：$X_{21}(1) = 152.00(h)$，$Y_{21}(2) = 0(pc)$

$X_{22}(1) = 175.00(h)$，$Y_{22}(2) = 0(pc)$

$X_{23}(1) = 195.28(h)$，$Y_{23}(2) = 25(pc)$

工程３：$X_{31}(1) = 167.56(h)$，$Y_{31}(2) = 0(pc)$

これらをステップ１で求めた各工程の生産計画 $\boldsymbol{x}_i^{(1_i)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2))$，$\boldsymbol{y}^{(1_i)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2))$ に代入して，各工程の最適な生産計画を求めると表４のようになる。

表４　工程の最適生産計画

工　程	工程１		工程２			工程３
製　品	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{31}
生産時間　(h)	168.15	150.00	152.00	175.00	195.28	167.56
在庫量　(pc)	0	0	0	0	25	0

５．結　　論

本論文で得られた結果を要約すれば以下のようになる。

(1)　２階層分権的生産システムの理論的背景となる２階層計画問題についてStackelberg均衡解が存在する条件と下位レベルの意思決定者が複数存在する場合のStackelberg-Nash均衡解が存在する条件を明確にした。

(2)　２階層分権的生産システムの構成を明らかにし，上位レベルの多期間生産計画問題と下位レベルの単一期間生産計画問題の関係を明確にした。

(3)　２階層分権的生産システムにおける生産目標設定による統合問題の数学モデルを設定し，Stackelberg-Nash均衡解を導出し，これを求めるアルゴリズムを提案した。

(4)　３工程で構成される２階層分権的生産システムの数値計算例で提案したアルゴリズムの妥当性を検討した。

参考文献

［１］ 奥田和重：分権的生産システムの最適化に関する研究（第１報，非協力ゲームによる単一期間生産計画問題の最適化），日本機械学会論文誌Ｃ編，65巻，633号, pp.382-387，（1999）.

［２］ 奥田和重：ダイナミックゲーム理論による企業連携モデルの解析，商学討究，Vol.66, No.1, pp.11-45,（2013）.

［３］ B.Colson, P.Marcotte and G.Sovard: Bilevel Programming: A Survey, Quarterly J. of Operational Research, Vol.3, pp.87-107, (2005).

［４］ N.P.Faisca, V.Dua, B.Rustem, P.M.Saraiva and E.N.Pistikopoulos: Parametric Global Optimisation for Bilebel Programming, J. of Global Optimisation, Vol.38, pp.609-623, (2007).

［５］ 里見晴和，谷野哲三：２レベル階層システムの最適化手法について，システム制御情報学会論文誌，Vol.2，No.11，pp.370-376，（1989）.

［６］ 水上孝一，徐驊：動的計画法による多段階LQゲーム問題の誘導スタッケルベルグ解，電気通信学会論文誌(C)，Vol.109，No.4，pp.195-202，（1989）.

［７］ N.P.Faisca, P.M.Saravia, B.Rustem and E.N.Pistikopoulos : A Multi-parametric Programming Approach for Multilevel Hierarchical and Decentralized Optimization Problems, Computer Management Science, Vol.6, pp.377-397, (2009).

［８］ B.Liu: Stackelberg-Nash Equilibrium for Multilevel Programming with Multiple Followers Using Genetic Algorithms, Computers Mathematical Applications Vol.36, No.7, pp.79-89, (1998).

［９］ K.Shimizu, Y.Ishizuka and J.F.Bard: “Nondifferentiable and Two-Level Mathematical Programming”, Kluwer Academic Publishers, pp.229-258, (1997).

[10] Başar,T. and Olsder,G.J.: “Dynamic Noncooperative Game Theory”, 2nd Ed. Academic Press, pp.368-375, (1995).

[11] C.Van De Panne: “Methods for Linear and Quadratic Programming”, North-Holland, pp.261-296, (1975).

[12] H.von Stackelberg: “The Theory of the Market Economy”, William Hodge and Company, (1952)

付録　マルチパラメトリック2次計画法

⑴制約式右辺にベクトルパラメータが存在する場合

制約式右辺にベクトルパラメータが存在する次の2次計画問題を考える。

$$\max z(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{x} \tag{A1}$$

$$\text{sub. to}\quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + D\boldsymbol{\theta} \tag{A2}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \tag{A3}$$

ここで，A，C，D は適当な次元の行列，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$は適当な次元のベクトルで，$\boldsymbol{x}$は決定変数，$\boldsymbol{\theta}$はベクトルパラメータである。

この問題に対するLagrange関数は次のようである。

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}(A\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{b} + D\boldsymbol{\theta}))$$

ここで$\boldsymbol{\lambda}$はLagrange乗数である。いま

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a} - C\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\pi}$$

とおくと，式（A1）～（A3）の2次計画問題の最適条件は次のようになる。

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} \tag{A4}$$

$$A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} - D\boldsymbol{\theta} = 0 \tag{A5}$$

$$C\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\pi} + A^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{a} \tag{A6}$$

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\pi} = 0 \tag{A7}$$

ここで$\boldsymbol{\pi}$は適当な次元のベクトルである。

任意の$\boldsymbol{\theta}^0$に対して最適条件（式（A4）～（A7））を満たす$\boldsymbol{x}^0$と$\boldsymbol{\lambda}^0$が存在するものと仮定する。この$\boldsymbol{x}^0$を基底変数$\boldsymbol{x}_B^0$と非基底変数$\boldsymbol{x}_N^0$に分割する。$\boldsymbol{\pi}$，$\boldsymbol{a}$，A，Cについても基底変数と非基底変数に関連する部分に分割する。すなわち$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_B^T, \boldsymbol{\pi}_N^T)^T$，$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_B^T, \boldsymbol{a}_N^T)^T$，$A = (B, N)$，$C = ((C_{11}, C_{21})^T, (C_{12}, C_{22})^T)$とする。これらを用いて最適条件式（A4）～（A7）を書き換えると次のようになる。

$$\boldsymbol{x}_B^0 \geq \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}_N^0 \geq \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{\lambda}^0 \geq \boldsymbol{0} \tag{A8}$$

$$B\boldsymbol{x}_B^0 + N\boldsymbol{x}_N^0 = \boldsymbol{b} + D\boldsymbol{\theta}^0 \tag{A9}$$

$$C_{11}\boldsymbol{x}_B^0 + C_{12}\boldsymbol{x}_N^0 - \boldsymbol{\pi}_B + B^T\boldsymbol{\lambda}^0 = \boldsymbol{a}_B \tag{A10}$$

$$C_{21}\boldsymbol{x}_B^0 + C_{22}\boldsymbol{x}_N^0 - \boldsymbol{\pi}_N + N^T\boldsymbol{\lambda}^0 = \boldsymbol{a}_N \tag{A11}$$

$${\boldsymbol{x}_B^0}^T\boldsymbol{\pi}_B + {\boldsymbol{x}_N^0}^T\boldsymbol{\pi}_N = 0 \tag{A12}$$

相補条件式（A12）より，$\boldsymbol{x}_B^0 \geq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}_N^0 = \boldsymbol{0}$とすると$\boldsymbol{\pi}_B = 0$，$\boldsymbol{\pi}_N \geq 0$であるので，式（A10）より

$$\boldsymbol{x}_B^0 = C_{11}^{-1}(\boldsymbol{a}_B - B^T\boldsymbol{\lambda}^0) \geq 0$$

これと式（A9）より

$$\boldsymbol{\lambda}^0 = {B^{-1}}^T\left(\boldsymbol{a}_B - C_{11}B^{-1}(\boldsymbol{b} + D\boldsymbol{\theta}^0)\right) \tag{A13}$$

したがって

$$\boldsymbol{x}_B^0 = B^{-1}(\boldsymbol{b} + D\boldsymbol{\theta}^0) = \boldsymbol{b}^0 + D^0\boldsymbol{\theta}^0 \tag{A14}$$

ここで$\boldsymbol{b}^0 = B^{-1}\boldsymbol{b}$，$D^0 = B^{-1}D$である。他方，式（A11）と式（A13），式（A14）より

$$C_{21}\{B^{-1}(\boldsymbol{b} + D\boldsymbol{\theta}^0)\} - \boldsymbol{\pi}_N + N^T\{{B^{-1}}^T\left(\boldsymbol{a}_B - C_{11}B^{-1}(\boldsymbol{b} + D\boldsymbol{\theta}^0)\right)\} = \boldsymbol{a}_N$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}_N = &-\boldsymbol{a}_N + N^T{B^{-1}}^T\boldsymbol{a}_B + \left(C_{21} - N^T{B^{-1}}^TC_{11}\right)\boldsymbol{b}^0 \\ &+ \left(C_{21} - N^T{B^{-1}}^TC_{11}\right)D^0\boldsymbol{\theta}^0 = \boldsymbol{q}^0 + Q^0\boldsymbol{\theta}^0\end{aligned} \tag{A15}$$

式（A13）より

$$\boldsymbol{\lambda}^0 = {B^{-1}}^T\boldsymbol{a}_B - {B^{-1}}^TC_{11}\boldsymbol{b}^0 - {B^{-1}}^TC_{11}D^0\boldsymbol{\theta}^0 = \boldsymbol{p}^0 + P^0\boldsymbol{\theta}^0 \tag{A16}$$

ここで$\boldsymbol{p}^0 = {B^{-1}}^T(\boldsymbol{a}_B - C_{11}\boldsymbol{b}^0)$，$P^0 = -{B^{-1}}^TC_{11}D^0$，$\boldsymbol{q}^0 = -\boldsymbol{a}_N + N^T{B^{-1}}^T\boldsymbol{a}_B + \left(C_{21} - N^T{B^{-1}}^TC_{11}\right)\boldsymbol{b}^0$，$Q^0 = \left(C_{21} - N^T{B^{-1}}^TC_{11}\right)D^0$である。

これらの結果は線形計画法で用いるシンプレックス表を用いて求めることができる。式(A9)～(A11)に基づいて初期表を作成すると表A 1のようになる。任意の$\boldsymbol{\theta}^0$に対して式（A14），式（A15），式（A16）が得られるように基底変換すると，表A 2のような最適表を得る。この表を用いてパラメトリック分析を行うのであるが$\boldsymbol{\lambda}$を基底に保つために以後のピボット操作では$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{\pi}$に関する部分（点線で囲った範囲）のみを対象にする。

表A１　初期表

		$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_N$	$\boldsymbol{\pi}_B$	$\boldsymbol{\pi}_N$	$\boldsymbol{\lambda}$
$\boldsymbol{\pi}_B$	$-\boldsymbol{a}_B$		$-C_{11}$	$-C_{12}$	I		B^T
$\boldsymbol{\pi}_N$	$-\boldsymbol{a}_N$		$-C_{21}$	$-C_{22}$		I	N^T
$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	D	B	N			

表A２　最適表

		$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_N$	$\boldsymbol{\pi}_B$	$\boldsymbol{\pi}_N$	$\boldsymbol{\lambda}$
$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{p}^0$	P^0		C_1^0	${B^{-1}}^T$		I
$\boldsymbol{\pi}_N$	$\boldsymbol{q}^0$	Q^0		C_2^0	N^TB^T	I	
$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}^0$	D^0	I	$(N^T{B^{-1}}^T)^T$			

ここで $C_1^0 = -{B^{-1}}^T(-C_{12} + N^T{B^{-1}}^TC_{11})$

$$C_2^0 = (N^T{B^{-1}}^T \quad I)C\begin{pmatrix}(N^T{B^{-1}}^T)^T \\ I\end{pmatrix}$$

以上の結果を用いて目的関数式（A1）を書き換えると次のようになる。

$$\begin{aligned} z\big(\boldsymbol{x}^0(\boldsymbol{\theta}^0)\big) = z(\boldsymbol{\theta}^0) &= \boldsymbol{a}_B^T\boldsymbol{b}^0 - \frac{1}{2}{\boldsymbol{b}^0}^TC_{11}\boldsymbol{b}^0 + \boldsymbol{a}_B^TD^0\boldsymbol{\theta}^0 - \frac{1}{2}(D^0\boldsymbol{\theta}^0)^TC_{11}\boldsymbol{b}^0 \\ &\quad - \frac{1}{2}{\boldsymbol{b}^0}^TC_{11}D^0\boldsymbol{\theta}^0 - \frac{1}{2}{\boldsymbol{\theta}^0}^T{D^0}^TC_{11}D^0\boldsymbol{\theta}^0 \\ &= F_{max} - F_1\boldsymbol{\theta}^0 - \frac{1}{2}{\boldsymbol{\theta}^0}^TF_2\boldsymbol{\theta}^0 \end{aligned} \tag{A17}$$

ここで $F_{max} = \boldsymbol{a}_B^T\boldsymbol{b}^0 - \frac{1}{2}{\boldsymbol{b}^0}^TC_{11}\boldsymbol{b}^0$，$F_1 = -\boldsymbol{a}_B^TD^0 + {\boldsymbol{b}^0}^TC_{11}D^0$，$F_2 = {D^0}^TC_{11}D^0$ である。C_{11}は正定値対称行列であるのでF_2も正定値対称行列である。したがって $z(\boldsymbol{\theta}^0)$は凹関数になる。式（A14），（A15），（A17）によって基底変数$\boldsymbol{x}_B$，$\boldsymbol{\pi}_N$と目的関数zを任意のベクトルパラメータ$\boldsymbol{\theta}^0$で表現することができた。$\boldsymbol{\theta}^0$が変化してもなお$\boldsymbol{x}_B$, $\boldsymbol{\pi}_N$が基底解であるような$\boldsymbol{\theta}^0$の領域を式(A14)と式(A15)に基づいて次のように定義する。

$$R(\boldsymbol{\theta}^0) = \{\boldsymbol{\theta}^0 | \boldsymbol{b} + D\boldsymbol{\theta}^0 \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{q}^0 + Q^0\boldsymbol{\theta}^0 \geq \boldsymbol{0}\} \tag{A18}$$

$\boldsymbol{\theta}^0$が$\Delta\boldsymbol{\theta}$だけ変化して式（A14）を構成する不等式の１つが等号で成り立つ

とする。すなわち

$$\boldsymbol{\theta}^0 + \Delta\boldsymbol{\theta} \in bdR(\boldsymbol{\theta}^0)$$

のとき表A２のC_2^0に負の要素が存在すれば，不等式$\boldsymbol{q}^0 + Q^0\boldsymbol{\theta}^0 \geq \boldsymbol{0}$の中の不等式の１つが等式で成り立つ。この不等式が$h$番目の不等式であるとする。そのとき$\pi_{Nh} = 0$となり，それに対応する非基底変数$x_{Nh}$と基底変換される。この基底変換によって基底変数$\boldsymbol{x}_B$は１個増加し$\boldsymbol{\pi}_N$は１個減少する。それにともなって基底行列も１行１列増加する。この新しい基底変数と基底行列を$\boldsymbol{x}_B^{(1)}$，$\boldsymbol{\pi}_B^{(1)}$，$B^{(1)}$とし，そのときのパラメータの値を$\boldsymbol{\theta}^{(1)}(= \boldsymbol{\theta}^0 + \Delta\boldsymbol{\theta})$とする。このときのシンプレックス表が表A３のようであるとする。$\boldsymbol{\theta}$が$\boldsymbol{\theta}^{(1)}$よりさらに変化したとき，表A３の$A_4$に負の要素が存在すれば基底変数$x_{Bh}$が非基底変数になり，それに対応する$\pi_{Bh}$が基底変数になる。このとき基底行列は１行１列減少する。このように２次計画問題では，線形計画問題とは異なって基底行列が変化する。

表A３　パラメトリック表

		$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_N$	$\boldsymbol{\pi}_B$	$\boldsymbol{\pi}_N$
$\boldsymbol{\pi}_N$	$\boldsymbol{q}^{(1)}$	$Q^{(1)}$		A_1	A_3	I
$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}^{(1)}$	$D^{(1)}$	I	A_2	A_4	

このような基底変換を行うことによってK組の領域（式（A8））を得ることができたとする。このときの最適解と最適値，ならびに$\boldsymbol{\theta}$の領域を次のように表す。

$$\boldsymbol{x}_B^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{b}^{(k)} + D^{(k)}\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{x}_N^{(k)} = \boldsymbol{0} \tag{A19}$$

$$z^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) = F_{max}^{(k)} - F_1^{(k)}\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T F_2^{(k)}\boldsymbol{\theta} \tag{A20}$$

$$R^{(k)} = \left\{\boldsymbol{\theta} \middle| \boldsymbol{b}^{(k)} + D^{(k)}\boldsymbol{\theta} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{q}^{(k)} + Q^{(k)}\boldsymbol{\theta} \geq \boldsymbol{0}\right\} \tag{A21}$$

ここで$\boldsymbol{b}^{(k)}$，$D^{(k)}$，$\boldsymbol{q}^{(k)}$，$Q^{(k)}$は基底変換によって得ることのできる表内の要素であり，$F_{max}^{(k)}$，$F_1^{(k)}$，$F_2^{(k)}$はこれらを用いて求めることができる。

2次計画問題（式（A1）～（A3））が最適解を持つような$\boldsymbol{\theta}$の全領域を

$$M=\bigcup_{k=1}^{K}R^{(k)}$$

と定義する。このM上で定義される2次計画問題の目的関数を$z^0(\boldsymbol{\theta})$とすると，これはM上のすべての点で微分不可能な次のような関数である。

$$z^0(\boldsymbol{\theta})=\begin{cases} z^{(1)}(\boldsymbol{\theta})=F_{max}^{(1)}-F_1^{(1)}\boldsymbol{\theta}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^TF_2^{(1)}\boldsymbol{\theta}, & \boldsymbol{\theta}\in R^{(1)} \\ z^{(2)}(\boldsymbol{\theta})=F_{max}^{(2)}-F_1^{(2)}\boldsymbol{\theta}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^TF_2^{(2)}\boldsymbol{\theta}, & \boldsymbol{\theta}\in R^{(2)} \\ \quad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots & \quad\vdots \\ z^{(K)}(\boldsymbol{\theta})=F_{max}^{(K)}-F_1^{(K)}\boldsymbol{\theta}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^TF_2^{(K)}\boldsymbol{\theta}, & \boldsymbol{\theta}\in R^{(K)} \end{cases}\tag{A22}$$

Dの要素がすべて非負であるとき，これを$D\geq 0$と表すことにする。このとき次の定理が成り立つ。

定理　$D\geq 0$のとき，$z^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$と$z^0(\boldsymbol{\theta})$は$\boldsymbol{\theta}$について増加凹関数である。

証明　式（A17）より

$$\frac{\partial z^{(k)}}{\partial\boldsymbol{\theta}}=-F_1^{(k)}-F_2^{(k)}\boldsymbol{\theta}$$

ここで$F_1^{(k)}=-\boldsymbol{a}_B^TD^{(k)}+\boldsymbol{b}^{(k)^T}C_{11}D^{(k)}$，$F_2^{(k)}=D^{(k)^T}C_{11}D^{(k)}$である。これを上式に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial z^{(k)}}{\partial\boldsymbol{\theta}}&=\boldsymbol{a}_B^TD^{(k)}-\boldsymbol{b}^{(k)^T}C_{11}D^{(k)}-D^{(k)^T}C_{11}D^{(k)}\boldsymbol{\theta}\\&=D^{(k)^T}\left(\boldsymbol{a}_B-C_{11}\left(\boldsymbol{b}^{(k)}+D^{(k)}\boldsymbol{\theta}\right)\right)=D^TB^{(k)^{-1}}\left(\boldsymbol{a}_B-C_{11}B^{(k)^{-1}}(\boldsymbol{b}+D\boldsymbol{\theta})\right)\\&=D^T\boldsymbol{\lambda}^{(k)}\end{aligned}$$

となる。最適解においては$\boldsymbol{\lambda}^{(k)}\geq\boldsymbol{0}$であるので，$z^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$は$R^{(k)}$上で増加凹関数である。また式（A22）より$z^0(\boldsymbol{\theta})$も$M$上で増加凹関数である。　■

⑵目的関数にベクトルパラメータが存在する場合

目的関数にベクトルパラメータを持つ次の2次計画問題を考える。

$$\max z(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})^TC(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})\tag{A23}$$

$$\text{sub.to} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{A24}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \tag{A25}$$

この問題のLagrange関数は次のようである。

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})^T C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})$$

ここで$\boldsymbol{\lambda}$はLagrange乗数である。いま，

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta}) - A^T\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\pi}$$

とおくと，最適条件は次のようになる。

$$-C\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\pi} + A^T\boldsymbol{\lambda} = -C\boldsymbol{\theta} \tag{A26}$$

$$A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \tag{A27}$$

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\pi} = 0 \tag{A28}$$

$$\mathrm{x} \geq \mathbf{0},\ \lambda \geq \mathbf{0} \tag{A29}$$

任意の$\boldsymbol{\theta}^0$に対して，上記の最適条件を満たす$\boldsymbol{x}^0$，$\boldsymbol{\lambda}^0$が存在するものと仮定する。$\boldsymbol{x}^0$を基底変数$\boldsymbol{x}_B^0$と非基底変数$\boldsymbol{x}_N^0$に分割し，C，A，$\boldsymbol{\pi}$についても同様に分割する。すなわち

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = (C_B, C_N),\ \mathrm{A} = (\mathrm{B},\mathrm{N}),\ \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_B \\ \boldsymbol{\pi}_N \end{bmatrix}$$

これらを用いて最適条件式（A26）～（A29）を次のように書き換える。

$$\boldsymbol{x}_B^0 \geq \mathbf{0},\quad \boldsymbol{x}_N^0 \geq \mathbf{0},\quad \boldsymbol{\lambda}^0 \geq \mathbf{0} \tag{A30}$$

$$B\boldsymbol{x}_B^0 + N\boldsymbol{x}_N^0 = \boldsymbol{b} \tag{A31}$$

$$-C_{11}\boldsymbol{x}_B^0 - C_{12}\boldsymbol{x}_N^0 - \boldsymbol{\pi}_B + B^T\boldsymbol{\lambda}^0 = -C_B\boldsymbol{\theta} \tag{A32}$$

$$-C_{21}\boldsymbol{x}_B^0 - C_{22}\boldsymbol{x}_N^0 - \boldsymbol{\pi}_N + N^T\boldsymbol{\lambda}^0 = -C_N\boldsymbol{\theta} \tag{A33}$$

$$\boldsymbol{x}_B^{0\,T}\boldsymbol{\pi}_B + \boldsymbol{x}_N^{0\,T}\boldsymbol{\pi}_N = 0 \tag{A34}$$

これをシンプレックス表の形式で表すと表Ａ４のようになる。この表は制約式右辺にベクトルパラメータが存在する場合の初期表（表Ａ１）と同じ形式である。したがって，目的関数にベクトルパラメータが存在する２次計画問題も⑴で示した方法と同様にして解くことができる。

表Ａ４　初期表

		$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_N$	$\boldsymbol{\pi}_B$	$\boldsymbol{\pi}_N$	$\boldsymbol{\lambda}$
$\boldsymbol{\pi}_B$		C_B	C_{11}	C_{12}	I		$-B^T$
$\boldsymbol{\pi}_N$		C_N	C_{21}	C_{22}		I	$-N^T$
$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$		B	N			