演算・関数の連続化について

兼 岩 龍 二

1. 導入

数学の発達の歴史を想像してみるに，最初は自然数があって，それらの数同志の足し算や掛け算のような演算が行われたであろう．それが数概念の拡張（実数さらに複素数概念の獲得）に伴って 3.5+2.86 とか $(2+i)\cdot(1-i)$ のように拡張された数同志の演算が行われるようになり，それらに対応する自然現象や人為現象を我々人類は見出すことが出来てきた事と思う．そこでは，例えば「足し算」の実数・複素数への拡張が「ごく自然に」行われてきた筈である．これを足し算の連続化と呼ぶこととしよう．

さて次に，階乗演算の連続化という事を考えてみることにしよう．即ち$\frac{1}{2}!$とか $i!$ とかを考えるという事である．まず実数への拡張であるが，オイラー（Euler, 1707-1783）は

(1) $\Gamma(s)=\int_0^1\left(\log\frac{1}{u}\right)^{s-1}du=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt \quad (s>0)$

のような関数（ガンマ関数）を定義して

(2) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \quad (s>0)$,

(3) $n!=\Gamma(n+1)$ （n は非負整数）

が成立することを示した．(2)は

(2′) $n!=n\cdot(n-1)!$ （n は自然数）

の実数への拡張となっている．ところが(2)，(3)を満す連続な関数は(1)で定義されるもの以外にも無数に存在するのである．$\Gamma(s+1)$ が $n!$ の「自然な」拡張であることが認知されるには次の定理が確定するのを待たなければなら

なかった.

H. Bohr-Mollerup の定理. $s>0$ において定義された正の実数値関数 $f(s)$ が 3 つの条件

(i) $f(s+1)=sf(s)$, (ii) $f(1)=1$, (iii) $\log f(s)$ が凸関数（下に凸）

を満たすならば $f(s)$ は(1)で定義されたガンマ関数 $\Gamma(s)$ に等しい.（証明は[1] 参照）

この事もさることながら，筆者は次の事実に注目したい.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad (x \text{ は任意の複素数})$$

はよく知られている. そこでコーシー（Cauchy）の積分公式（[2] 参照）により

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^x}{x^{n+1}}dx\quad (C \text{ は } 0 \text{ のまわりを正の向きに } 1 \text{ 周する路})$$

となる. そこで変数 n を実数あるいは複素数に拡張し s とし，被積分関数 $e^x x^{-(n+1)}$ を $e^x x^{-(s+1)}=e^{x-(s+1)\log x}$ と置き換えて，積分路 C' を $-\infty$ から $-\delta$ ($\delta>0$, δ は適当に小さくとっておく) まで実軸を右に進み，その間では x の偏角を $-\pi$ とする ($\log x=\log|x|-\pi i$). その後 $-\delta$ から 0 を中心とする半径 δ の円を正の向きに 1 周し，次に $-\delta$ から $-\infty$ まで実軸を左に進む（この間では x の偏角は π となる）路とする. このとき

(4)　$s\text{¡}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'}e^{x-(s+1)\log x}dx$

とすれば $s\text{¡}$ は $\dfrac{1}{n!}$ の「自然な」拡張になっている. 即ち

$$s\text{¡}=\frac{1}{\Gamma(s+1)}\left(=\frac{1}{s!}\right)$$

となることが知られている（[1] 参照）. また $s\text{¡}$ の定義域は(4)により全複素数に拡張され，そこで正則かつ当然のことながら

(5)　$(s+1)\text{¡}(s+1)=s\text{¡}$

が満たされる.

一般に数列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}(\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\})$ があるとき，A_n の連続化即ち「自然な」拡張の候補として

$$(6)\quad A(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^n\right)x^{-s-1}dx \quad (x^{-s-1}=e^{-(s+1)\log x})$$

が考えられる．勿論この積分が意味をもつ場合においてである．その際ガンマ関数のときのような Bohr-Mollerup の定理に相当する性質が示されることが望ましいが，個々の数列 $\{A_n\}$ に対して一般的にその性質を見出すことは困難と思われる．そこで楽観的に捉えて，(6)で得られる $A(s)$ を数列 $\{A_n\}$ の Euler-Cauchy の連続化と呼ぶことにしよう．

2．Bell 数 $\hat{B}_n$ とその連続化 $\hat{B}(s)$

Bell 数 $\hat{B}_n$ は基数 $n(\in\mathbb{N}_0)$ の集合 A を類別する仕方の数で式で書けば

$$(7)\quad \hat{B}_n=\sharp\{\mathfrak{C};\mathfrak{C}\subset 2^A,\ \forall_{X\in\mathfrak{C}}\forall_{Y\in\mathfrak{C}}X\neq Y\Rightarrow X\cap Y=\emptyset,\ \emptyset\notin\mathfrak{C},\ \cup_{X\in\mathfrak{C}}X=A\}$$

と表される．例えば $n=3$ であれば，$A=\{1,2,3\}$として A の類別 $\mathfrak{C}$ は $\mathfrak{C}=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$，$\{\{1\},\{2,3\}\}$，$\{\{2\},\{1,3\}\}$，$\{\{3\},\{1,2\}\}$，$\{\{1,2,3\}\}$の 5 種類で，$\hat{B}_3=5$ となる．ちなみに$\hat{B}_5=52$ でこれは源氏香の数として知られる．源氏香というのは一種のゲームで 5 種の香木を 5 セット計 25 本用意し，そのうち 5 本だけを順に焚く，全回異なる香木が焚かれる場合から全回同じ香木が焚かれる場合まで計 52 種類の組合わせがある．例えば香図は 1 回目（1 番右の縦棒）と 4 回目（右から 4 番目の縦棒）で同じ香木が焚かれ，それとは別の 1 種類の香木が 2，3，5 回目で焚かれたことを意味している．香人は焚かれた状態を香図で示して当てる．各香図には源氏物語 54 巻の初巻と終巻を除く各巻の名前，例えばは夕顔，は須磨という具合に名前がついている．

$n=0$ のときは空集合 $\emptyset$ の類別として空類別 $\mathfrak{C}=\emptyset$ があるから，$\hat{B}_0=1$ である．$\hat{B}_n$ の意味を考えれば

(8)　$\hat{B}_n = \displaystyle\sum_{\substack{n_1, n_2, \cdots \in \mathbb{N}_0 \\ 1\cdot n_1 + 2\cdot n_2 + \cdots = n}} \frac{n!}{(1!)^{n_1} n_1! \cdot (2!)^{n_2} n_2! \cdots}$

であることが解る．例えば $n=3$ のとき

$n_1, n_2, \ldots$の在り方	(8)の項	対応する類別
$3=1+1+1$ $(n_1=3,\ n_2=n_3=\cdots=0)$	$\dfrac{3!}{(1!)^3 3!}=1$	
$3=1+2$ $(n_1=n_2=1$，他は $0)$	$\dfrac{3!}{(1!)^1 1! \cdot (2!)^1 1!}=3$	
$3=3$ $(n_3=1$，他は $0)$	$\dfrac{3!}{(3!)^1 1!}=1$	

のようになり，$\hat{B}_3 = 1+3+1 = 5$ となる．

一方，合成関数の高階導関数の公式（Faà di Bruno の公式）

(9)　$\displaystyle\frac{d^n}{dx^n} g(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} g^{(k)}(f(x)) \sum_{\substack{1\cdot n_1 + 2\cdot n_2 + \cdots = n \\ n_1 + n_2 + \cdots = k}} \frac{n!\{f'(x)\}^{n_1}\{f''(x)\}^{n_2}\cdots}{(1!)^{n_1} n_1! \cdot (2!)^{n_2} n_2! \cdots}$

において，$f(x)=e^x-1$，$g(x)=e^x$ とすれば，

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{e^x-1}\bigg|_{x=0} = \hat{B}_n$$

を得る．e^{e^x-1} は $\mathbb{C}=\{x; x$ は複素数$\}$ で正則な関数だから

(10)　$e^{e^x-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{B}_n}{n!} x^n \quad (x \in \mathbb{C})$

とテイラー展開される．このことを利用すれば次のようにして漸化式

(11)　$\hat{B}_{n+1} = \dbinom{n}{0}\hat{B}_n + \dbinom{n}{1}\hat{B}_{n-1} + \cdots + \dbinom{n}{n}\hat{B}_0 \quad \left(\dbinom{n}{k} = {}_nC_k\right)$

を導くことができる．まず(10)の両辺を微分して

$$e^{e^x-1} \cdot e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{B}_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{B}_{n+1}}{n!} x^n$$

を得る．したがって

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\hat{B}_m}{m!}x^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{B}_{n+1}}{n!}x^n .$$

この左辺を整理すれば $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{n}\frac{\hat{B}_{n-k}}{k!(n-k)!}$ となるから(11)が得られる．勿論(11)は組合わせ論的にも導くことができる．

そこで我々は数列$\{\hat{B}_n/n!\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ の Euler-Cauchy の連続化

(12) $\dfrac{\hat{B}(s)}{s!}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'}e^{e^{x}-1}x^{-s-1}dx \quad (\sigma=\Re s>0)$

を考える．ここに $s!=\Gamma(s+1)=1/s¡$ である．ここで注意したいのは，$\lim_{x\to-\infty}e^{e^x-1}=1/e$ であるから $s=\sigma+it(\sigma, t\in\mathbb{R}=\{x; x \text{ は実数}\})$ とするとき，(12)の右辺の積分は $\sigma>0$ の範囲でないと収束しないということである．したがって

(13) $n\in\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \ldots\}\Rightarrow\hat{B}(n)=\hat{B}_n$

は保証されるが，たとえ$\hat{B}(s)$ を解析接続して定義域を拡張したとしても $\hat{B}(0)$ は $\hat{B}_0=1$ に一致するとは限らないのである．実際あとで示すように

(14) $\hat{B}(0)=1-\dfrac{1}{e}$

となる．$\sigma>0$ のとき(12)の右辺を部分積分すれば

$$\begin{aligned}\frac{\hat{B}(s)}{s!}&=\frac{1}{2\pi i}\left[-\frac{1}{s}x^{-s}e^{e^x-1}\right]_{C'}+\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}x^{-s}e^{e^x-1+x}dx\\&=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}x^{-s}e^{e^x-1+x}dx\end{aligned}$$

となるから

(15) $\dfrac{\hat{B}(s)}{\Gamma(s)}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'}e^{e^x-1+x}x^{-s}dx$

が成立する．右辺は $\mathbb{C}$ の任意の compact 部分集合で一様収束するから，$\dfrac{\hat{B}(s)}{\Gamma(s)}$ は $\mathbb{C}$ で正則である．さらに $s=0, -1, -2, \ldots$のとき被積分関数は x の整関数（$\mathbb{C}$ で正則）であるから，(15)の右辺は 0 である．したがって $\hat{B}(s)$も s の整関数である．

次に

(16) $\hat{B}(s)=\dfrac{1}{\Gamma(1-s)}\displaystyle\int_0^\infty e^{e^{-x}-1-x}x^{-s}dx \quad (\sigma<1)$

を示す．$\sigma<1$ のとき (15) より

$$\begin{aligned}\frac{\hat{B}(s)}{\Gamma(s)}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^0 e^{e^x-1+x+\pi is-s\log(-x)}dx+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{-\infty} e^{e^x-1+x-\pi is-s\log(-x)}dx\\&=\frac{1}{2\pi i}(e^{\pi is}-e^{-\pi is})\int_0^\infty e^{e^{-x}-1-x}x^{-s}dx\\&=\frac{\sin\pi s}{\pi}\int_0^\infty e^{e^{-x}-1-x}x^{-s}dx\,.\end{aligned}$$

これとガンマ関数の相反公式（[1] 参照）

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

により，(16) を得る．

(16) により

$$\hat{B}(0)=\int_0^\infty e^{e^{-x}-1-x}dx=\Big[-e^{e^{-x}-1}\Big]_0^\infty=1-\frac{1}{e}$$

即ち前に述べた (14) を得る．

次に $\hat{B}(s)$ のディリクレ級数表示

(17) $\hat{B}(s)=\dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{n^s}{n!} \quad (s\in\mathbb{C})$

を示す．(4) により

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}e^{nx}x^{-s-1}dx&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}e^x\left(\frac{x}{n}\right)^{-s-1}\frac{dx}{n}\\=n^s\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}e^x x^{-s-1}dx&=n^s s\,!=\frac{n^s}{\Gamma(s+1)}\,.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty\frac{n^s}{n!}&=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n!}\Gamma(s+1)\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}e^{nx}x^{-s-1}dx\\=\Gamma(s+1)\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\sum_{n=1}^\infty\frac{e^{nx}}{n!}x^{-s-1}dx&=\Gamma(s+1)\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(e^{e^x}-1)x^{-s-1}dx\,.\end{aligned}$$

さらに (15) により

$$\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^s}{n!}=\Gamma(s+1)\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{1}{e}(e^{e^x}-1)x^{-s-1}dx$$
$$=\Gamma(s+1)\left\{\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{-s}x^{-s}\cdot\frac{1}{e}(e^{e^x}-1)\right]_{C'}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\left(-\frac{1}{s}\right)x^{-s}\frac{1}{e}e^{e^x+x}dx\right\}$$
$$=\Gamma(s)\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}e^{e^x+x-1}x^{-s}dx=\hat{B}(s)$$

即ち(17)を得る．(14)は(17)からも得られる．$\hat{B}(x)$ を実変数実数値関数と観るとき

$$(18)\quad \hat{B}^{(k)}(x)=\frac{1}{e}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^x}{n!}(\log n)^k>0\quad(k\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R})$$

が成立するので $\hat{B}(x)$は何回微分しても単調増加の関数である．また

$$(19)\quad \lim_{n\to-\infty}\hat{B}(x)=\frac{1}{e}$$

である．次に(11)に相当する $\hat{B}(s)$ の関係式を求めよう．

定理． $s\in\mathbb{C}$ に対して

$$(20)\quad \hat{B}(s+1)=\frac{1}{e}+\frac{2^s}{e}+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s}{k}\{\hat{B}(s-k)-\frac{1}{e}\}$$

が成立する．ここに $\binom{s}{k}=\dfrac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$．

証明．

$$\hat{B}(s+1)=\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{s+1}}{n!}=\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^s}{(n-1)!}=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^s}{n!}$$
$$=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^s}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s=\frac{1}{e}+\frac{2^s}{e}+\frac{1}{e}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^s}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s}{k}n^{-k}$$
$$=\frac{1}{e}+\frac{2^s}{e}+\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{s-k}}{n!}=\frac{1}{e}+\frac{2^s}{e}+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s}{k}\{\hat{B}(s-k)-\frac{1}{e}\}.\ \square$$

特に $s=n\in\mathbb{N}_0$ のとき，(20)は

$$\hat{B}_{n+1}=\hat{B}(n+1)=\frac{1}{e}+\frac{2^n}{e}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{\hat{B}(n-k)-\frac{1}{e}\}$$
$$=\frac{1}{e}+\frac{2^n}{e}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\hat{B}(n-k)+\hat{B}(0)-\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\hat{B}(n-k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\hat{B}_{n-k}$$

となり，これは前にみた漸化式(11)に一致する．

筆者はガンマ関数のときの Bohr-Mollerup の定理に相当するものとして，次のことを予想するが目下それを証明しようという気力に乏しい．

予想． $x \in \mathbb{R}$ において定義された C^∞ 級関数 $f(x)$ が 3 つの条件

(i) 右辺の収束を込めて $f(x+1) = 2^x + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}f(x-k)$ が成立する

(ii) $f(0) = e-2$

(iii) $f^{(k)}(x) > 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R})$

を満たすならば $f(x)$ は $e\hat{B}(x)-1$ に等しい．

n が大きくなっていくときの $\hat{B}(n) = \hat{B}_n (n \in \mathbb{N})$ の大きさは興味の持たれるところである．de Bruijn の本［3］に

$$(21) \quad \log \hat{B}_n = n\Big\{\log n - \log\log n - 1 + \frac{\log\log n}{\log n} + \frac{1}{\log n} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\log\log n}{\log n}\Big)^2 + O\Big(\frac{\log\log n}{(\log n)^2}\Big)\Big\}$$

なる記述がある．

$$\log n! = n \log n - n + O(\log n)$$

と比較するとかなり複雑である．ガンマ関数のときのスターリング(Stirling)の公式

$$x! = \Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}\exp\Big(-x+\frac{\theta}{12x}\Big) \quad (x>0,\ 0<\theta<1)$$

のような simple で精密な公式が $\hat{B}(n)$ についても，無理かもしれないが，期待されるところである．

(21)により $\hat{B}(s)$ は位数 1 の整関数であるから，アダマール (Hadamard) の因数分解定理（[4] 参照）により，$\hat{B}(s)$ の零点たち ρ ($\hat{B}(\rho)=0$ となるような ρ，無限にある）を用いた無限積

$$\hat{B}(s) = \Big(1-\frac{1}{e}\Big)e^{-\beta s}\prod_{\rho}\Big(1-\frac{s}{\rho}\Big)e^{s/\rho}$$

（ここに $\beta=\log\left(1-\frac{1}{e}\right)+\sum_{\rho}\left\{\frac{1}{\rho}+\log\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\right\}$ で，ρ は $\hat{B}(s)$ の零点全体に重複度を込めて渡る）の形に書くことができる．

σ_0 を $\hat{B}(\sigma_0)=2/e$ となるような実数とすれば $\sigma<\sigma_0$ のとき

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^s}{n!}\right|<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\sigma_0}}{n!}=e\hat{B}(\sigma_0)-1=1$$

となるから $\Re s=\sigma<\sigma_0(\fallingdotseq 0.3883236)$ なるところには零点はない．また $\sigma=\sigma_0$ の線上で $\sum_{n=2}^{\infty} n^s/n!=-1$ となることはないから，$\sigma=\sigma_0$ 上にも零点はない．

上半面 $(\Im s=t>0)$ にある $\hat{B}(s)$ の零点を実軸に近い順に $\rho_1, \rho_2, \ldots$ とすれば 4 番目までの数値は

$\rho_1 \fallingdotseq 0.9644+3.6928i$

$\rho_2 \fallingdotseq 0.6481+13.971i$

$\rho_3 \fallingdotseq 1.37905+21.3752i$

$\rho_4 \fallingdotseq 0.660612+31.6134i$

のようになる．零点の分布については何も解っていない．

3．Stirling 数とその連続化

第 1 種の Stirling 数 $\check{S}_{n,k}(0\leq k\leq n,\ n\in\mathbb{N}_0)$ は次の (22.1)～(24.1) のどの式でも定義することができ，それらはすべて同値となる：

$$\check{S}_{n,k}=(-1)^{n-k}\sum_{\substack{1\cdot n_1+2\cdot n_2+\cdots=n\\ n_1+n_2+\cdots=k}}\frac{n!}{1^{n_1}n_1!\cdot 2^{n_2}n_2!\cdots}, \tag{22.1}$$

$$(x)_n=x(x-1)\cdots(x-n+1)=\sum_{k=0}^{n}\check{S}_{n,k}x^k, \tag{23.1}$$

$$\frac{\{\log(1+x)\}^k}{k!}=\sum_{n=k}^{\infty}\check{S}_{n,k}\frac{x^n}{n!}. \tag{24.1}$$

第 2 種の Stirling 数 $\hat{S}_{n,k}(0\leq k\leq n,\ n\in\mathbb{N}_0)$ は次の (22.2)～(24.2) のどの式でも定義することができ，それらはすべて同値となる：

(22.2) $\hat{S}_{n,k}=\sum_{\substack{1\cdot n_1+2\cdot n_2+\cdots=n\\ n_1+n_2+\cdots=k}}\frac{n!}{(1!)^{n_1}n_1!\cdot(2!)^{n_2}n_2!\cdots}$,

(23.2) $x^n=\sum_{k=0}^{n}\hat{S}_{n,k}(x)_k$,

(24.2) $\frac{(e^x-1)^k}{k!}=\sum_{n=k}^{\infty}\hat{S}_{n,k}\frac{x^n}{n!}$.

第1種の Stirling 数 $\check{S}_{n,k}$ に対してその絶対値 $|\check{S}_{n,k}|=(-1)^{n-k}\check{S}_{n,k}$ は基数 n の集合 A に対して A の要素を漏れなく重複なく使って k 個の円順列（巡回置換）を作る仕方の数である．例えば $n=3$，$A=\{1, 2, 3\}$のとき

$k=0$	なし	$\lvert\check{S}_{3,0}\rvert=0$	$\check{S}_{3,0}=0$
$k=1$	$\{(1, 2, 3)\}$，$\{(1, 3, 2)\}$	$\lvert\check{S}_{3,1}\rvert=2$	$\check{S}_{3,1}=2$
$k=2$	$\{(1), (2, 3)\}$，$\{(2), (1, 3)\}$，$\{(3), (1, 2)\}$	$\lvert\check{S}_{3,2}\rvert=3$	$\check{S}_{3,2}=-3$
$k=3$	$\{(1), (2), (3)\}$	$\lvert\check{S}_{3,3}\rvert=1$	$\check{S}_{3,3}=1$

のようになる．$n>0$のとき $A=\{1, \ldots, n\}$ の上記のような円順列分解 $\{\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_k\}(k=1, \ldots, n)$ は A 上の置換を漏れなく重複なく1つずつ与える．例えば$\{\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2\}=\{(2), (1, 3)\}$ についていえば，対応する置換は $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ である．したがって，

(25.1) $\sum_{k=0}^{n}|\check{S}_{n,k}|=n!$

である．また $1\cdot n_1+2\cdot n_2+\cdots=n$, $n_1+n_2+\cdots=k$ のとき

$$0\cdot n_1+1\cdot n_2+\cdots=n-k$$

であるから，円順列分解 $\{\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_k\}(k=1, \ldots, n)$ に対応する置換の偶奇と $n-k$ の偶奇は一致する．したがって，

$$\sum_{k=0}^{n}\check{S}_{n,k}=0 \quad (n\geq 2)$$

である．

第2種の Stirling 数 $\hat{S}_{n,k}$ は基数 n の集合 A を k 個の類に類別する仕方の数である．例えば $n=4$ のときは

$k=0$ なし $\hat{S}_{4,0}=0$

$k=1$  $\hat{S}_{4,1}=1$

$k=2$  $\hat{S}_{4,2}=7$

$k=3$　　$\hat{S}_{4,3}=6$

$k=4$　　$\hat{S}_{4,4}=1$

のようになる．したがって，

(25.2)　$\sum_{k=0}^{n}\hat{S}_{n,k}=\hat{B}_n$

である．また Bell 数のときと同様

(26)　$\check{S}_{0,0}=\hat{S}_{0,0}=1$

である．

$\check{S}_{n,k}$，$\hat{S}_{n,k}$ の回帰関係（漸化式）はそれぞれ

(27.1)　$\check{S}_{n+1,k}=\check{S}_{n,k-1}-n\check{S}_{n,k}\quad(1\leq k\leq n)$，

(27.2)　$\hat{S}_{n+1,k}=\hat{S}_{n,k-1}+k\hat{S}_{n,k}\quad(1\leq k\leq n)$

で与えられる．

そこで(24.1)と(24.2)を用いて $\check{S}_{n,k}$，$\hat{S}_{n,k}$ の Euler-Cauchy の連続化を考える．まず第2種の方から始めて，(24.2)から

(28)　$$\frac{\hat{S}(s,w)}{s!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{(e^x-1)^w}{w!}x^{-s-1}dx\quad(\sigma=\Re s>0)$$

とする．右辺を部分積分して

$$\begin{aligned}\hat{S}(s,w)&=\frac{s!}{w!}\frac{1}{2\pi i}\left\{\left[(e^x-1)^w\left(-\frac{1}{s}\right)x^{-s}\right]_{C'}+\frac{w}{s}\int_{C'}(e^x-1)^{w-1}e^x x^{-s}dx\right\}\\&=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(w)}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(e^x-1)^{w-1}e^x x^{-s}dx\end{aligned}$$

となるから

(29)　$$\begin{aligned}\ddot{\mathrm{O}}(s,w)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(e^x-1)^{w-1}e^x x^{-s}dx\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{w-1}e^x x^{w-s-1}dx\end{aligned}$$

と置けば

(30)　$$\hat{S}(s,w)=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(w)}\ddot{\mathrm{O}}(s,\mathrm{w})$$

となる．$\ddot{\mathrm{O}}(s,w)$ は $(s,w)\in\mathbb{C}^2$ で正則であるから，$\hat{S}(s,w)$ は $\mathbb{C}^2$ で有理型である．

$\Gamma(s)$ は $s=0,-1,-2,\ldots$ に極を持つので $\hat{S}(s,w)$ は $s=0,-1,-2,\ldots$ で singular，また $w-s=1,2,\ldots$ は $\ddot{\mathrm{O}}(s,w)$ の零点，$w=0,-1,-2,\ldots$ は $1/\Gamma(w)$ の零点となるので，$(s,w)=(n,k)\in(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N})\times\mathbb{Z}$ はすべて $\hat{S}(s,w)$ の不確定特異点となる（$\mathbb{Z}$ は整数全体からなる集合）．したがって値 $\hat{S}(0,0)$ は2変数関数の立場からは定義されない．勿論 $n\in\mathbb{N}, 0\le k\le n$ のときは

$$\hat{S}(n,k)=\hat{S}_{n,k}$$

である．

しかるに w を整数 k に固定して，s の1変数関数 $\hat{S}(s,k)$ を考えるならばこれは整関数である．即ち $s=0,-1,-2,\ldots$は除去可能な特異点となる．この立場を「1変数の立場」ということにすれば，$w=0,-1,-2,\ldots$のとき $1/\Gamma(w)=(w-1)¡=0$ であるから，1変数の立場では

$$\hat{S}(s,0)=\hat{S}(s,-1)=\hat{S}(s,-2)=\cdots=0$$

となる．$k\in\mathbb{N}$ に対しては後出の(34)より

$$(31)\quad \hat{S}(s,k)=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{k}\binom{k-1}{n-1}(-1)^{n-1}n^{s-1}\quad (k\in\mathbb{N}, 1\text{変数の立場})$$

が得られる．

$\ddot{\mathrm{O}}(s,w)$ は有名なリーマン(Riemann)のゼータ(zeta)関数

$$\zeta(s)=1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+\cdots\quad(\sigma>1)$$

と関係がある．$\zeta(s)$ は

$$(32)\quad \zeta(s)=-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{C'}\frac{e^x}{e^x-1}x^{s-1}dx$$

なる積分表示をもち，$s=1$ に1位の極を持ち，$\mathbb{C}\backslash\{1\}$ で正則な関数に解析接続される．まず(29)，(32)より

$$(33)\quad \ddot{\mathrm{O}}(s,0)=-\frac{\zeta(1-s)}{\Gamma(s)}$$

が得られる．一般的には

$$(34)\quad \ddot{\mathrm{O}}(s,w)=\frac{\sin\pi(w-s)}{\pi}\Gamma(1-s)\sum_{n=1}^{\infty}\binom{w-1}{n-1}(-1)^{n-1}n^{s-1}\quad(\Re s<\Re w)$$

である．証明は読者の演習問題としよう．特に $w=0,\ -1,\ -2,\dots$ に対して

$$(35)\quad \ddot{\mathrm{O}}(s,-k)=\frac{(-1)^{k-1}}{k!\,\Gamma(s)}\sum_{m=0}^{k}|\check{S}_{k,m}|\zeta(-s-m+1)\quad (k\in\mathbb{N}_0)$$

が成立する．w が自然数のときは(34)の右辺が有限級数になる．

回帰関係(27.2)の連続化

$$(36)\quad \hat{S}(s+1,w)=w\hat{S}(s,w)+\hat{S}(s,w-1)$$

や，(25.2)の連続化

$$(37)\quad \hat{B}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{S}(s,k)\quad (1\text{ 変数の立場})$$

などは容易に導くことができる．また(36)の拡張として 1 変数の立場ではあるが，加法公式

$$(38)\quad \hat{S}(s+w,r)=\sum_{k=1}^{r}\hat{S}(s,k)S(w,r,r-k)\quad (s,w\in\mathbb{C},\ r\in\mathbb{N})$$

を得ることができる．ここに $S(w,r,q)(w\in\mathbb{C},\ r\in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{N}_0)$ は

$$S(w,r,q)=\frac{1}{q}\sum_{\nu=0}^{q}(-1)^{\nu}\binom{q}{\nu}(r-\nu)^{w}$$

とする．(37)，(38)より $\hat{B}(s)$ の加法公式

$$(39)\quad \hat{B}(s+w)=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{S}(s,k)\cdot\frac{1}{e}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(k+\nu)^{w}}{\nu!}\quad (s,w\in\mathbb{C})$$

が得られる．

次に第 1 種の Stirling 数 $\check{S}_{n,k}$ の連続化を考える．(24.1)から

$$\frac{\check{S}_{n,k}}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{1}{k!}\{\log(1+x)\}^{k}\frac{dx}{x^{n+1}}$$

である．そこで $y=\log(1+x)$ と置けば

$$\check{S}_{n,k}=\frac{n!}{k!}\frac{1}{2\pi i}\int_{C}y^{k}(e^{y}-1)^{-n-1}e^{y}dy$$

となる．そこで $n\to s$，$k\to w$，$C\to C'$ なる変更を行って

$$(40)\quad \check{S}(s,w)=\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(w+1)}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}x^{w}(e^{x}-1)^{-s-1}e^{x}dx$$

とするのである．これは当初の Euler-Cauchy の連続化とは少し異なるが，目

的の「自然な」拡張の範疇を出ないものと思う．$\ddot{\mathrm{O}}(s, w)$ の定義(29)により

(41)　$\check{S}(s, w)=\dfrac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(w+1)}\ddot{\mathrm{O}}(-w, -s)$

を得る．また(30)，(41)とガンマ関数の相反公式により

(42)　$\check{S}(s, w)=\dfrac{\sin\ \pi w}{\sin\ \pi s}\hat{S}(-w, -s)$

が得られる．即ち第1種の Stirling 数の「自然な」拡張は第2種の Stirling 数の Euler-Cauchy の連続化に帰着される．

4．ベルヌイ(Bernoulli)数の連続化とゼータ関数

通常ベルヌイ多項式 $B_n(x)$ およびベルヌイ数 B_n は

(43)　$\dfrac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\dfrac{t^n}{n!}$，$B_n=B_n(0)$

で与えられる．具体的な数値は

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\cdots$$

である．本稿では B_n の代りに

(44)　$\tilde{b}_n=B_n(1)$，$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\tilde{b}_n}{n!}x^n=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$

として $\{\tilde{b}_n/n!\}$ の Euler-Chauchy の連続化を考える．尚 $\tilde{b}_n$ は $n=1$ のとき $\tilde{b}_1=\dfrac{1}{2}$となることを除いて，B_n と一致する．

$$\frac{\tilde{b}_n}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^x}{e^x-1}x^{-n}dx$$

であるから $n\to s$，$C\to C'$ なる変更を行って

(45)　$\dfrac{\tilde{b}(s)}{s!}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'}\frac{e^x}{e^x-1}x^{-s}dx$

とする．これは $\zeta(s)$ の積分表示(32)とほとんど変りがない．即ち

(46) $\tilde{b}(s)=-s\zeta(1-s)=-s\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}\quad(\sigma<0)$

である．ということは $\zeta(s)$ は $\{\tilde{b}_n/n!\}$ の Euler-Chauchy の連続化から得られるということである．こう考えることの利点が何かあるのかと問われれば，はなはだ心もとないが，$\tilde{b}_n$ について n 一般に成立するある種の性質は $\zeta(s)$ に反映されるであろうことが予感される．実際 $\tilde{b}_n$ の回帰関係

(47) $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\tilde{b}_k=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\tilde{b}_{n-k}=n$

（これは(44)からすぐに導かれる）は連続化されて

(48) $\sum_{k=1}^{\infty}\binom{s}{k}\{\tilde{b}(s-k)+s-k\}=s2^{s-1}\quad(s\in\mathbb{C})$

となる．$\zeta(s)$の式で書けば次のようになる：

(49) $\sum_{k=1}^{\infty}\binom{s}{k}(k-s)\{\zeta(1+k-s)-1\}=s2^{s-1}\quad(s\in\mathbb{C})$，

ただし左辺の和において $k=s$ となる項は1とする．

(48)の証明． $\sigma<0(s=\sigma+it;\sigma,t\in\mathbb{R})$ のとき，

$$\tilde{b}(s)+s=s-s\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}=-s\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-1}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\binom{s}{k}\{\tilde{b}(s-k)+s-k\}=-\sum_{k=1}^{\infty}\binom{s}{k}(s-k)\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-k-1}\\
&=-s\sum_{k=1}^{\infty}\binom{s}{k}\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{s}{k}k\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-k-1}\\
&=-s\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{s}{k}n^{-k}+s\sum_{k=1}^{\infty}\binom{s-1}{k-1}\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-k-1}\\
&=-s\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}-1\right\}+s\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s-1}{k}\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-k-2}\\
&=-s\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-1}\frac{(n+1)^{s}}{n^{s}}+s\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-1}+s\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-2}\frac{(n+1)^{s-1}}{n^{s-1}}
\end{aligned}$$

$$= s\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\{(n+1)^{s-1}-(n+1)^{s}\}+s\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-1}$$

$$= -s\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)^{s-1}+s\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-1} = -s\sum_{n=3}^{\infty}n^{s-1}+s\sum_{n=2}^{\infty}n^{s-1} = s\cdot 2^{s-1}$$

となり，(48)が $\sigma<0$ で成立する．

$$\tilde{b}(s)+s = O(|s|2^{\sigma}) \quad (\sigma \leq -1)$$

であるから(48)の左辺は $\mathbb{C}$ の任意の compact 部分集合で一様収束し(48)の関係は $\mathbb{C}$ 全体に解析接続される．□

参考文献

[1] 小松勇作　特殊函数（近代数学講座 9）　朝倉書店
[2] 高木貞治　解析概論　岩波書店
[3] de Bruijn, Asymptotic Methods in Analysis, North-Holland, 1970
[4] Titchmarsh, The Theory of Functions, Oxford

本稿は筆者が 1995～6 年に Salzburg 大学（墺）で行った講義のノートをまとめたものである。このようなとりとめのない研究を許してくれた環境と，それをサポートして下さった関係諸氏に謝意を表したい。