kKPまわりの変換にかんする補足

飯　田　浩　志

此の小品では，古典的な 0–1 ナップサック問題の亜種，ナップサックに詰め得る品数 $\leqslant k$ を強ゐる kKP をめぐる変換にかんする細か過ぎる補足を述べる．
キーワード: 組合せ最適化，ナップサック問題，項数制約

簡潔を旨とし，0–1 ナップサック問題（以降, 0–1KP）の定義その他詳細を此処には記さぬので，記号の意味するところ等については拙稿 [1] を参照されたい．なほ以下で → なる表記は，変換を示してゐる．特に，ナップサックに詰める品物（項）を番号 j で指し，変数 $x_j \in \{0,1\}$ が其の選択 ($x_j = 1$)/非選択を表すものとする．

kKP→CKP→0–1KP

kKP は，項数 $\leqslant k$ なら $= c$ で他は $= 0$ なる函数 $c(\sum_j x_j)$ が容量の潰れナップサック問題（CKP）と同値である．その同値性を使ふ，kKP から CKP 経由で 0–1KP への変換については拙稿 [1] でも触れた．其処では各項 j の重量 w_j について $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_n$ を仮定し，元の kKP と等価な CKP に附加する項数 $k' := \min\{k, \max\{\ell \mid \sum_{j=1}^{\ell} w_j \leqslant c\}\}$ と決めた．併し，抑 $k' < k$ なら，いかんせん k ヶは這入らぬから，変換せずとも制約 $\sum_j x_j \leqslant k$ を忘れて 0–1KP として解けば良い．つまり，$k' < k$ の場合を最初に除外すれば k' なぞ導入する必要はない（k の儘で何の問題もない）．さらに，$\max\{\ell \mid \sum_{j=1}^{\ell} w_j \leqslant c\} = k$ でも変換は無用．

kKP→E-kKP→0-1KP

拙稿 [1] の三つ目でも触れた，E-kKP を間に挟(はさ)む kKP → 0-1KP では，E-kKP に於(おけ)る凡(すべ)ての制約条件を満たす或(あ)る解が与へる価値 pmin として，元の kKP の価値最大の項に $k-1$ ヶのダミー項 (0,0) を組合せた解の価値，すなはち元の kKP に於る価値最大の項のそれを用ゐた．此れには，ナップサックに這入らぬ項なしと云ふ仮定が生きてゐる．ぢつは同仮定の下では，当初の kKP に於て Ø は最適たり得ぬから，Ø に対応する解を E-kKP で考へる必要なし．したがって kKP→E-kKP の段階で加へるダミー項 (0,0) は k ヶも要らず, $k-1$ で十分だつたと云へる．よって，最終的に得らるる 0-1KP に現はる項 (P, W) は $k-1$ ヶで済む．また此の項数削減は W を変える——$w_1 \leqslant w_2 \leqslant w_j$ $(j \geqslant 3)$ として $P := W := \max\{\sum_{j=2}^{k-1} p_j, c - w_1 - w_2\} + 1$.

参考文献

[1] 飯田，三種の kKP→□→0-1KP まとめ．Discussion paper series no. 173, 小樽商大 CBC, pp1–5, 2015年11月, http://hdl.handle.net/10252/5495; Three kinds of kKP→□→0-1KP: a survey. 商學討究 **67**.1, 195–203（小樽商大, 2016年 7 月）http://hdl.handle.net/10252/00005574.