ニュー値（提携形ゲームの解）の確率的解釈について

社会情報学科　行　方　常　幸

目　次

1　はじめに

提携形ゲームとは複数人が集まって得た利益などを公平に分けるにはどうすべきか？の問に答えようとしたものである。得られた利益の分け方（解）として，種々の観点から様々な解が提唱されている。その中に最小二乗値と呼ばれるグループがある。このグループの中には良く知られたシャープレイ値や最小二乗準仁，等がある。本稿ではこの仲間であるニュー値（と呼ぶ）に関して確率的解釈を見出したのでそれを述べる。

2　提携形ゲーム

複数の参加者が集まって利益を生む状況を想定する。参加者（プレイヤーと呼ぶ）の集合を $N:=\{1,...,n\}$ とおく。N の部分集合を提携と呼ぶ。提携 S $(\subset N)$ のメンバーが集まって得ることができる利益を $v(S)$ で表し，提携 S の提携値と呼ぶ。N の部分集合から実数へのこの関数 $v: 2^N \to \Re$ を特性関数と呼ぶ。ただし，$v(\emptyset)=0$ とする。プレイヤーの集合 N と特性関数 v の組 (N,v) を提携形ゲーム[1]と呼ぶ。全体提携 N によって得られる利益 $v(N)$ を，部分提携 S の提携値 $\{v(S)|S\subset N\}$ を利用して，N のメンバーになるべく公平に分けることが，提携形ゲーム (N,v) の1つの目的である。

提携形ゲームの1点解とは提携形ゲームの集合からプレイヤーへの分け方への関数 f で次の条件を満たすものである：

$$f(N,v)=(f_1(N,v),\ldots,f_n(N,v))$$

$$\sum_{j\in N} f_j(N,v)=v(N)$$

1点解は値とも呼ばれる。

3　最小二乗値

提携形ゲームの1点解である最小二乗値は提携 S の分け方 $x\left(x=(x_1,\ldots,x_n);\ \sum_{j\in N} x_j=v(N)\right)$ への不満 $v(S)-\sum_{j\in S} x_j$ をなるべく一定にしようと試みる。もっと一般的に重みを考慮し，次の最小化問題を解く解 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ として最小二乗値は定義される：

1）譲渡可能効用を扱うので，正確には，譲渡可能効用を持つ提携形ゲームと呼ばれる。

$$\min \sum_{S:S\subset N} m_{n,s} \left(v(S) - \sum_{j\in S} x_j\right)^2$$

$$\text{s.t.} \sum_{j\in N} x_j = v(N)$$

ここで，$(m_{n,s})_{n=2,3,\ldots;s=1,\ldots,n-1}$ は非負の重みで $\sum_{s=1}^{n-1} \binom{n-2}{s-1} m_{n,s} = 1$ となるように規格化しておく[2)]。この最小化問題は陽に解けて $x = (x_1,\ldots,x_n)$ は次のように求められる：

$$x_j = \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S:j\in S\subset N\\ S\neq N}} m_{n,s} v(S) - \sum_{\substack{S:S\subset N\\ S\neq \emptyset,N}} \frac{s}{n} m_{n,s} v(S)$$

すなわち，重み $m = (m_{n,s})_{n=2,3,\ldots;s=1,\ldots,n-1}$ を持つ最小二乗値を LS^m と書くと

$$\mathrm{LS}_j^m(N,v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S:j\in S\subset N\\ S\neq N}} m_{n,s} v(S) - \sum_{\substack{S:S\subset N\\ S\neq \emptyset,N}} \frac{s}{n} m_{n,s} v(S)$$

となる。

今，$u_j := \sum_{\substack{S:j\in S\subset N\\ S\neq N}} m_{n,s} v(S)$ とおくと，$\mathrm{LS}_j^m(N,v) = u_j + \dfrac{v(N) - \sum_{k\in N} u_k}{n}$ となる。

すなわち，各プレイヤー j は，まず，u_j を貰い，残り $v(N) - \sum_{k\in N} u_k$ を全員で等分する，という分け方になっている。この意味で u_j をプレイヤー j の貢献と呼ぶことができる。$\sum_{\substack{S:j\in S\subset N\\ S\neq N}} m_{n,s} = 1$ とはかぎらないので，この貢献を提携値の期待値として解釈できない。しかし，次に述べるように，他のプレイヤーに対する自分の貢献は提携値の期待値として解釈できる。まず，最小二乗値は各プ

2） s は提携 S のメンバーの人数である。

レイヤーの貢献そのものにではなく，その差に依存することに注意し，貢献の差を次のように表現する：

$$u_i - u_j = \sum_{\substack{S:j\in S\subset N \\ S\neq N}} m_{n,s} v(S) - \sum_{\substack{S:j\in S\subset N \\ S\neq N}} m_{n,s} v(S)$$

$$= \sum_{S\in\Gamma(i+,j-)} m_{n,s} v(S) - \sum_{S\in\Gamma(j+,i-)} m_{n,s} v(S)$$

ただし，$\Gamma(i+, j-) := \{S\subset N \mid i\in S, j\notin S\}$ である。

$c_{ij} = \sum_{S\in\Gamma(i+,j-)} m_{n,s} v(S)$ とおく。これはプレイヤー i のプレイヤー j に対する貢献とみなされる。これを利用すると，$u_i - u_j = c_{ij} - c_{ji}$ となり，結局，

$$\mathrm{LS}_j^m(N,v) = \frac{v(N)}{n} + \frac{\sum_{k\in N}(u_j - u_k)}{n} = \frac{v(N)}{n} + \frac{\sum_{k\in N}(c_{jk} - c_{kj})}{n}$$

となる。$\sum_{S\in\Gamma(i+,j-)} m_{n,s} = \sum_{s=1}^{n-1} m_{n,s} \sum_{\substack{S\in\Gamma(i+,j-) \\ |S|=s}} 1 = \sum_{s=1}^{n-1} m_{n,s} \binom{n-2}{s-1} = 1$ に注意すると，プレイヤー i のプレイヤー j に対する貢献 c_{ij} は提携 S が確率 $m_{n,s}$ で生成され，その提携値 $v(S)$ をプレイヤー i のプレイヤー j に対する貢献とみなせば，提携値の期待値として解釈できる。

$m_{n,s} = \frac{1}{2^{n-2}}$ の時，最小二乗値は最小二乗準仁となり，$m_{n,s} = \frac{1}{n-1}\binom{n-2}{s-1}^{-1}$ の時，最小二乗値はシャープレイ値となる。本稿で考察するニュー値は $m_{n,s} = \frac{2s}{n(n-1)}\binom{n-2}{s-1}^{-1}$ の時の最小二乗値である。本稿でニュー値と呼ぶ最小二乗値には，従来，注意が払われてこなかった（従って，特に名前が付けられていなかった）。

4　確率的解釈

前節で最小二乗値の例として最小二乗準仁，シャープレイ値，ニュー値を，その重み m の違いとして定義した。また，プレイヤー i のプレイヤー j に対する貢献 c_{ij} も定義し，それを期待値として解釈できることも示した。この節では，この解釈を実現する提携形成過程を述べる。この確率的解釈は実際にどの値を使うかを判断する時に助けとなる。

具体的にはプレイヤー i を含みプレイヤー j を含まない提携 S の形成過程を記述し，この提携 S ができる確率が，提携の規模（人数）にのみ依存し，$m_{n,s}$ であることを示せばよい。

4．1　最小二乗準仁：$m_{n,s}=\dfrac{1}{2^{n-2}}$

プレイヤー i は「参加する」，プレイヤー j は「参加しない」の決定をする。他のプレイヤーは「参加する」または「参加しない」を等確率（確率$\frac{1}{2}$）で選ぶ。「参加する」という決定をしたプレイヤーが提携 S を形成する（図１参照）。

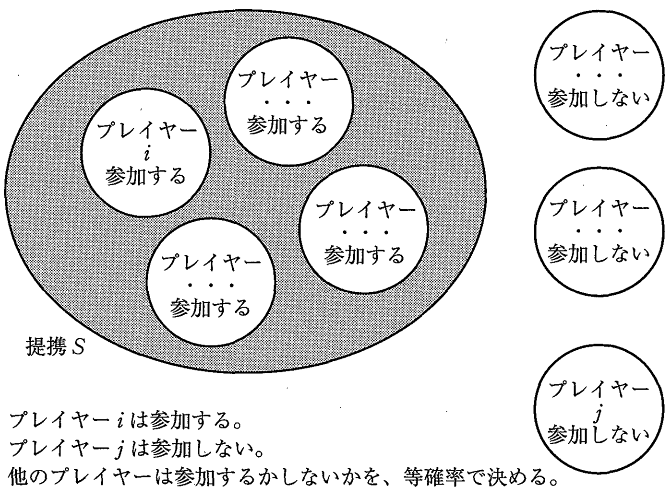

図１．最小二乗準仁における提携形成過程

「参加する」または「参加しない」を選ぶプレイヤーの人数は$n-2$人で，どちらを選ぶ確率も同じ$\frac{1}{2}$であるので，提携Sが形成される確率は$\frac{1}{2^{n-2}}$となる。

4．2　シャープレイ値：$m_{n,s}=\frac{1}{n-1}\binom{n-2}{s-1}^{-1}$

プレイヤーjを除く$n-1$人のプレイヤーがランダムに順列を作ることに参加する。プレイヤーiが到着した時にできる提携（すなわち，プレイヤーiを含みその左側にいるプレイヤーの集合）が提携Sである（図2参照）。すべての順列の個数が$(n-1)!$個であり，その中で形成された提携がSとなるのは，プレイヤーiより左にいる$s-1$人の順列の個数$(s-1)!$と，右にいる$n-s-1$人の順列の個数$(n-s-1)!$の積の$(s-1)!(n-s-1)!$個である。従って，提携Sが形成される確率は$\frac{(s-1)!(n-s-1)!}{(n-1)!}=\frac{1}{n-1}\binom{n-2}{s-1}^{-1}$となる。

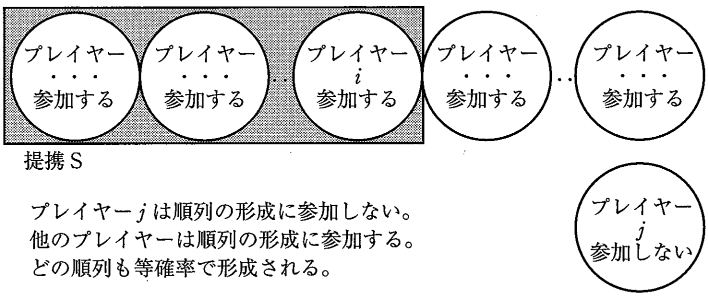

図2．シャープレイ値における提携形成過程

4．3　ニュー値：$m_{n,s}=\frac{2s}{n(n-1)}\binom{n-2}{s-1}^{-1}$

すべてのプレイヤーがランダムに順列を作ることに参加する。プレイヤーiとプレイヤーjの2人が到着した時にできる提携（ただし，プレイヤーjは除く）が提携Sである（図3参照）。すべての順列の個数が$n!$個であり，その中で形成された提携がSとなる順列の個数を求める。(1)プレイヤーiがプレイヤーjよりも左にいる場合の個数：プレイヤーjよりも左にいる（プレイヤー

i を含む） s 人の順列の個数 $s!$ とプレイヤー j よりも右にいる $n-s-1$ 人の順列の個数 $(n-s-1)!$ の積 $s!(n-s-1)!$ 個である。(2) プレイヤー i がプレイヤー j よりも右にいる場合の個数：プレイヤー i よりも左にいる $s-1$ 人とプレイヤー j を加えた s 人の順列の個数 $s!$ とプレイヤー i よりも右にいる $n-s-1$ 人の順列の個数 $(n-s-1)!$ の積 $s!(n-s-1)!$ 個である。(1) と (2) の和を $n!$ で割って，提携が形成される確率は $\dfrac{2s!(n-s-1)!}{n!}=\dfrac{2s}{n(n-1)}\dbinom{n-2}{s-1}^{-1}$ となる。

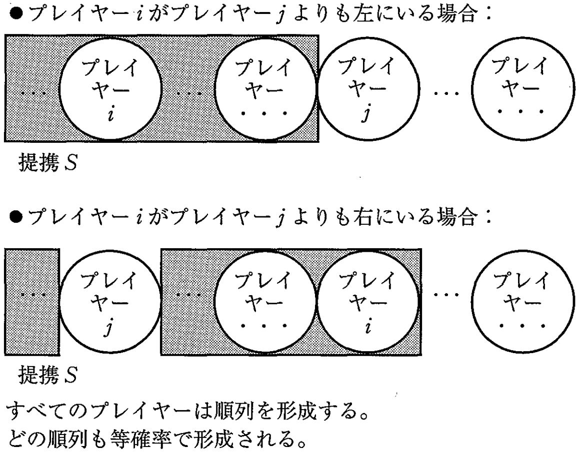

図 3．ニュー値における提携形成過程

5　数　値　例

数値例として，A，B，C，Dの 4 人からなる 4 人ゲームを取り上げる。提携値は次の表で与えられている。表に書かれていない提携の提携値は 0 とする。

提　携	AB	AC	AD	BC	BD	CD	ABC	ABD	ACD	BCD	ABCD
提携値	70	70	70	60	60	60	90	80	70	70	100

最小二乗準仁，シャープレイ値，ニュー値を計算すると，次の表のようになる。

	A	B	C	D
最小二乗準仁	$30\frac{5}{8}$	$25\frac{5}{8}$	$23\frac{1}{8}$	$20\frac{5}{8}$
シャープレイ値	30	$26\frac{2}{3}$	$23\frac{1}{3}$	20
ニュー値	$31\frac{1}{4}$	$27\frac{11}{12}$	$22\frac{11}{12}$	$17\frac{11}{12}$

もし，前節で述べた「あるプレイヤーの他のプレイヤーに対する貢献」の3つの確率的解釈の中に，考察している状況にとって，適切なものがあれば，その解を適用することが望ましいことになる。

6　終わりに

本稿では提携形ゲームの1点解である最小二乗値のグループに入る，最小二乗準仁，シャープレイ値，ニュー値の「あるプレイヤーの他のプレイヤーに対する貢献」の確率的解釈について述べた。特に，従来，注意が払われてこなかったニュー値に確率的解釈を与えた。

参考文献

Ruiz, L. M., Valenciano, F. and Zarzuelo, J. M. (1996) The Least Square Prenucleolus and the Least Square Nucleolus. Two Values for TU Games Based on the Excess Vector, **International Journal of Game Theory 25**, 113-134.

Ruiz, L. M., Valenciano, F. and Zarzuelo, J. M. (1998) The Family of Least Square Values for Transferable Utility Games, **Games and Economic Behavior 24**, 109-130.