直観確率論の基礎

――ケインズ確率論のクープマンによる數學的基礎付け――

武隈良一

一　序

パスカルとフェルマーに始まりラプラスによつて集大成された古典的確率論(1)は十九世紀に入るとともに、その舞臺

を佛蘭西から露西亜へと譲つた。そこに於ては最早昔日の初等組合せ論は行われず代つて近代解析学が縦横に驅使されたのである。立役者はチェビシェフ、マルコッフ、リヤプノフの三人であり、(2)彼等によつて現代確率論への素地が準備されたということが出來る。(3)

二十世紀に入つてからは舞臺は著しく擴大され今日では世界の多くの國々に於て確率論が研究され、その成果は最早昔日のものとは全くその俤を異にしている。研究者の中から著名な人を擧げるだけでも容易ではないが、理論として一先ず次の三つのものは之を擧げるに躊躇しない。

一、ミーゼスの頻度説
二、ケインズの直觀確率論
三、コルモゴロフの測度論的確率論

これらの理論は孰れも優れたものであり現代に於ける代表的なものである。殊に一九三三年に樹立されたコルモゴロフの理論(4)はその最たるものであり今日確率論はこの線に沿うて推進められている。

これらのうち一と三は値を取扱う確率論であるが、二はそれとは異なる。というのは一及び三は「事象の確率」を問題としており確率は數値として規定されているが、二は「命題の確實さ」を取扱い確率は必ずしも數値として表わされておらない。

從て此等を同列に並べることは妥當ではない。然し元來不確定な事象とそれに關する豫想を省察するとき、必ずしも數量化されない確率の概念が問題となりこれに關する理論の展開が必要となつてくる。かゝる折ケインズの理論はこれを展開するものとしてユニークな存在であるといえよう。

またコルモゴロフの理論が自然科学を母體として生れたのに對して　ケインズの理論は社会科学を母體としている

點を注意しておかねばならない。

孰れにせよケインズの理論は極めて示唆に富むものではあるが、數学的に適當な形式化がなされておらない點に於て理論の不鮮明さが目立ち、また若干の缺點を含んでいることは之を是正しなければならない。之を思い缺點の補正と數学的に嚴密な形式化を與えたのが一九四〇年に於けるクープマン[5]の輝かしい業蹟である。

社会科学を母體としたケインズの確率論がクープマンの裏付けを伴い今後如何に發展するかは一つの興味深い問題であると刮目されているとき、先ずケインズを探りクープマンの理論を咀嚼しておくことは、經濟学乃至社会科学の研究に現代數学が高度に驅使されている今日、一里塚をそなえるものといえよう。

1 拙稿、古典的確率論の基礎、人文研究第二輯（一九五一年一〇月小樽商科大學人文科學研究室發行）参照。
2 P. Chebyshev (1821—1894), A. A. Markov (1856—1922), A. M. Lyapunob (1857—1918)
3 G. Castelnuovo, Calcolo delle probabilità (1919) による。
4 A. N. Kolmogorov, Osnovnye ponyatiya teorii veroyatnosteĭ (1933)（確率論の基礎概念）ドイツ譯あり。
5 B. O. Koopman, The Axioms and Algebra of Intuitive Probability (Ann. of Math. 41, 1940, 269—292)

二　ケインズ確率論の概要[1]

最初にケインズの確率論を要約しておこう。ケインズ確率論の特徴は次の如くに述べられる。

(一) 序に於て述べた如く、ケインズ理論は蓋然性[1]をもつ命題が對象であり、それらの間に存する論理的關係を取扱うものである。從來の命題論理学が眞僞いずれかであるような命題だけを取扱つてきたの[2]に比べれば、これは可成り廣いものであり多値論理学[3]に屬するものである。ケインズ自身これを包含の論理（logic of implication）から蓋然性の論理（logic of probability）への移行であるといつている。從つて取扱う命題の蓋然性は眞、僞、又はその中

間の或る眞僞の度合をとることになる。

(二) 命題の蓋然性といつでも、これは或る他の特定の命題hが前提されたときにのみ意味を有するものとする。そして今或命題hが眞なりと前提されているときの命題aの蓋然性を記號 a/h で表わす。

或る命題aの蓋然性を問題とするとき人はつねにその前提hを豫想するものであつて、單にaの蓋然性が如何ということは無意味であるというのである。

(三) 命題の蓋然性といつた場合には一般に數量化されないものであるが[1]命題蓋然性の相互間には半順序（partial order）がつけられるものと假定する。

こゝに半順序とは、a/h と b/g とを考えたとき、この二つに對してそのいずれが「より蓋然性がある」か否かの比較判定がつねに可能であるとは限らないことを意味する。即ち一方が他方より「より蓋然性がある」かも知れないし、全然比較が出來ない場合もあるというのである。そして比較可能の場合に a/h が b/g より、より蓋然性があるとき、これを $a/h>b/g$ と表わすことにする。

これを用いれば確率論の統計学への應用は一層廣く行われる。例えば統計的調査又は統計推理に於て危險率といつた場合に、我々の欲するのはその數値ではなく、それのあり得べき限界であるからである。そこに於ては最早危險率という數値の存在自體が必要でなくなつているのである。

hを「散歩に出掛けた」とし、aを「無事に歸宅する」とすれば、「散歩に出掛けて無事に歸宅する蓋然性」は a/h となる。これは一般に數値で表わされない。然しbを「雷に出合つたが無事に歸える」とすれば、b/hも數値では表わされないが $a/h>b/h$ なることは明らかであろう。

また眞をI、僞をOで表わせば、つねに$O \leqq a/h \leqq I$ が成立する。

㈣ ケインズの理論は無差別性の原理(Principle of Indefference)を根本原理とするものである。無差別性の原理というのはベルヌーイ・ラプラスによる無理由の理由(Reason of no reason, Prinzip des magelnden Grundes)を改造しこれを精密に規定したものである。即ちある若干個の對立的な命題があつたとき、そのうちの孰れの命題も他の命題に對して、より蓋然性があるとする既知の理由がないならば、これらの對立的な命題は同様に蓋然性があるというのである。

ラプラスの無理由の理由をそのまゝ確率論に適用すると幾多矛盾の生ずることは周知の通りであるが、ケインズは從來の例を一々檢討し從來の適用が誤まれる原因として次の二つを掲げている。

一つは從來の確率論は蓋然性を無理に數量化しようとした點にあるという。例えば「火星に動物がいる」という命題は眞であるか僞であるかである。ところでこの命題の眞實性について既知の理由がないものとしよう。このときこの命題が眞である確率は$\frac{1}{2}$、僞である確率は$\frac{1}{2}$であるとして周知の矛盾に導くのは、[4]無理に數量化しようとした誤まつた適用であるというのである。

第二の原因として、元來は無知の情況の下に論じているのに、何時の間にか多くの知識を密輸入しているというのである。例えば袋の中に一球あるがその球の色が不明のとき、「赤である」「青である」「黄である」という確率は各々$\frac{1}{3}$であるとして矛盾に導くのは、[5]これは蓋然性を無理に數量化した上に、無知とはいゝながら、相異なる三色が同一の球の色ではあり得ないという知識を不知不識のうちに用いているからであるという。

以上を注意してケインズはラプラスによつて用いられた無理由の理由を無差別性原理によつて復活せしめた。實際ケインズの指摘した上述の二點は生ずる矛盾を救うことと少なしとはしない。然し完全に救つたと言切ることは今後の研究に俟たねばなるまい。

次にケインズは無差別の形式として次の二通りのあることを述べている。

一つは、同一の前提hに對して二つの相異なる命題x及びyがあつて兩者の蓋然性が等しい。即ち $x/h=y/h$ の場合である。

他の一つは、相異なる二つの前提に對して同一命題の蓋然性が等しい。即ち

$$x/h=x/h_1h=x/h_1$$

の場合である。こゝに hh_1 は前提hと h_1 とが共に成立つという前提を表わす。

第一の場合を選擇性（preference）の判斷といい、第二の場合を適切性（relevance）の判斷という。

なお、$x/h=x/hh_1$ が成立するとき、h_1 は x/h に對して不適切であるという。(6)

ケインズ理論の優れた點は、無差別性の原理に適切性の觀點を與えた處にある。單に選擇性だけでは建設的なものは生れてこない。また從來の確率論は a/h に於けるaのみの分析であつたが、ケインズはhの分析に着眼したものといえよう。

以上四つがケインズ理論の特徴であるが、取扱う蓋然性の比較は次の二種類に分けられている。

一、ab/h と a/h との比較

二、a/hh_1 と a/h との比較

この比較に當つて更に種々の公理を導入する必要があるが、それが問題である。ケインズは蓋然性を取扱うといゝながら、a/h を恰も數の如く取扱い種々の演算を許しているが、これは嚴密に批判されねばならぬ。クープマンの數学的基礎付けは a/h をブール環に於ける剩余類として規定した處にある。從て兩者に於ては實は取扱う命題の論理的型が相異なるものであることを注意せねばならない。(7)

1 本稿に於て「確率」といつたならば數値で表わされるものを意味し、必ずしも數値で表わされないものを「蓋然性」ということにする。從てケインズの「確率論」はケインズの「蓋然性の理論」と呼ばれねばならぬ。

2 ラッセルによつて大成された二値論理學が從來の命題論理學である。このラッセル論理學の代表的著述に次のものがある。
Whitehead, A. N. and Russell, B.: Principia Mathematica. (1910)
Hilbert, D und Ackermann, A: Grundzüge der theoretischen Logik, 2 Aufl. (1937)

3 多値論理學に就ては下の簡單な紹介が良い。杉原丈夫、多値論理學（哲學研究、第三百九十二號）

4 犬猫……等多くの動物をあげ、そのうちの少くとも一つが存在する確率は殆んど1に等しいという。

5 このとき相互に相容れない三つの確率の和が $3/2$ となり赤又は青又は黄である確率が1を越えて矛盾する。

6 不適切というのは余分又は無駄であるとの意。

7 以上主として北川敏男、直觀確率論（統計學辭典、六一頁、東洋經濟新報社發行）による。ケインズの確率論を直接その原書 A Treatise on Probability, London 1921. xi+466pp によつて敷衍してみることは彼の經濟學との關連に於て重要な意味を有する。參考文獻、山田雄三敎授、ケインズの「確率論」について——覺えがき——（ケインズ經濟學研究）
またケインズ確率論を批判したラムゼイ(Frank Plumpton Ramsey 1903—1930) の著書 The foundations of mathematics, London 1931. xviii+292pp 及び最近刊行された H. Jeffreys, Theory of Probability (1948) も十分に檢討してみる必要がある。然しそれらのためには稿を新しく起さなければならぬ。

三　記號論理學及び現代代數學による準備

クープマンの理論を理解するために本節に於て種々の準備をしておこう。

先ず取扱うものは命題であるが、これをラテン文字で表わすことにする。

命題aの否定をa′で表わし、「aにしてbである」という命題をab（又は$a \cap b$）で表わしこれを命題の連言（conjunction）又は論理積（logical product）という。次に「a又はbである」という命題を$a \cup b$で表わしこれ

を命題の選言 (disjunction) 又は論理和 (logical sum) という。

つねに僞なる命題を0で表わし、つねに眞なる命題を1で表わす。然るとき $aa'=0$, $a\cup a'=1$ となる。

「aなるときbである」というのを $a\subset b$ で表わしこれを含意という。$a\subset b$ にして $a\supset b$ なるとき $a=b$ で表わしこのときaとbとは（論理的に）等値 (logically equivalent) であるという。

集合Sの要素（又は元ともいう）の間に順序關係 $<$ が定義され、元a、b、cの間に次の關係が成立するとき

一、$a<a$

二、$a<b$, $b<a$ ならば $a=b$ なり

三、$a<b$, $b<c$ ならば $a<c$ なり

この一、二、三をそれぞれ順序關係が反射的、反對稱的、推移的であるという。

そして、Sの元の或るもの（全部でなくともよろしい）の間に順序關係が成立していてその順序關係が右の三つを滿足するとき、集合Sを半順序集合 (partially ordered set) という。

空でない集合Rに二種類の演算が與えられているとする。今その一方を加法（+で表わす）および他方を乘法（×で表わす）と呼ぶ。Rの元に對して加法と乘法が次の如く行われるとき

一、$a+b=b+a$

二、$(a+b)+c=a+(b+c)$

三、$x+b=a$ を滿足する x がRの中にある。

四、$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

五、$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$

$$c\times(a+b)=c\times a+c\times b$$

このRを環（ring）という。

Rの任意の元xに對して $x+0=x=0+x$ になるものを零元といい簡單のために0で表わす。然るとき0とxとに對してつねに$0\times x=0=x\times 0$なることが證明される。Rの中に$xe=x=ex$を滿足する元eが存在するときこのeを單位元といゝ簡單のために1で表わす。

Rの部分集合Aに屬する元をa、bとするとき、$a+b$も又Aの元になり、Rの任意の元rに對して $rA\subseteq A$（Aに屬する各元に左側からrを乘じて生ずる集合 rA がAに含まれる）が成立するとき、AをRの左イデヤルという。同樣に$Ar\subseteq A$なるとき右イデヤルという。左にして且右イデヤルであるものを兩側イデヤル又は單にイデヤルという。

Rの左イデヤルAに屬する適當な元a_1、a_2……a_nをとつたときAの如何なる元も $x_1a_1+x_2a_2+\cdots\cdots+x_na_n$ ($x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ はRの元）なる形で表わされるときAをa_1、a_2……a_nで生成された左イデヤルといい、a_1、a_2……a_nをAの生成元又は底元という。特に唯一つの生成元を有するとき左主イデヤルという。同樣なことが右イデヤル從てイデヤルについて定義できる。

Aを兩側イデヤルとするとき $x-y$ がAに屬するならば、Aを法として、xとyとは合同であるといい、$x\equiv y$, (mod A) と表わす。

Aを法としての元aに合同な元全體の集合を$\bar{a}$とし、元bについて同じものを$\bar{b}$で表わすときこれらを剩餘類というが$\bar{a}$と$\bar{b}$は共通要素を有しないか又は一致している。剩餘類$\bar{a}$と$\bar{b}$との加法及び乘法を

$$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b},\quad \bar{a}\,\bar{b}=\overline{ab}$$

によつて定義すれば、剩餘類の全體はやはり環をなしている。故にこれをAを法とする(又はAによつて分けられた)

Rの剰餘類環という。

環の元 a に於て $a^2=a$ が成立するものを一般ブール環という。一般ブール環に於ては $ab=ba$, $2a=0$ が成立している。特にそれが單位元を有するとき單にブール環という。

ブール環の初等的性質を全部列擧することは限られた紙面では困難なので特に必要なものについてのみ述べておこう。詳細は M. H. Stone, The Theory of Representations for Boolean Algebras, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 40(1936), pp. 37—111 を見られたい。以下ブール環に於ては新しい加法 $a \cup b$、乘法 ab 及び否定 a' を考えるものとする。（實はブール束を取扱うのである。）

定義、ブール環Bからブール環B′への準同型(homomorphism) $B \to B'$ というのは函數的對應 $B'=f(B)$ によつてBがB′にうつされその際 x、y をBの元とするとき

$$f(x')=(f(x))',\ f(xy)=f(x)f(y),\ f(x \cup y)=f(x) \cup f(y)$$

になるものをいう。

特に $f(x)=f(y)$ なるとき $x=y$ ならば對應は可逆にして準同型 $B' \to B$ が成立しこの場合にはBとB′とは同型(isomorphism) という。記號は $B \longleftrightarrow B'$ で表わす。

定義、ブール環Bの空ならざる部分集合Aがイデヤルであるというのは次の條件を滿足するときである。

一、a、b がAの元なるとき $a \cup b$ もAの元となる

二、a をAの元、b をBの元とするとき ab がAの元となる。

この定義は前に述べたイデヤルの定義に於て加法を $a \cup b$, 乘法を ab としたものになつている。

定理、$B \to B'$ ならば、B′の零元 $0'$ にうつされるようなBの元の全體はBのイデヤルAになつている。そして $f(a)=$

f(b) になるのは ab' と $a'b$ がともにAの元になるときであり且つこのときに限る。

さてブール環Bをいま述べたイデヤルAによつて分けると剰餘類環 B/A が得られるがその要素である剰餘類で a を含むものを a/A で表わす。この新しい剰餘類環に於ける加法乘法及び否定の記號としてBのものを用いても混亂は起らない。

$$a'/A=(a/A)',\ ab/A=(a/A)(b/A),\ a\cup b/A=(a/A)\cup(b/A)$$

しかも剰餘類環 B/A は零元 $0/A$、單位元 $1/A$ を有するブール環であることが證明される。なお $x\to x/A$ なる對應は準同型 $B\to B/A$ を表わし、これより直に次の定理が得られる。

定理、$B\to B'$ にしてB′の0′にうつされるBのすべての元の集合をAとすれば、$B'\longleftrightarrow B/A$ である。

さて以上の諸記號を確率論に於て如何に用いるかを示そう。a、b、h、k等を以て具體的命題を表わすものとする。これらの命題に否定、論理積、論理和を有限回施すことによつて幾多の命題が得られるがその全體は0及び1を有するブール環Bをなす。

Bの元h′(但し $h'\neq 1$ 即ち $h\neq 0$ とす)によつて生成された主イデヤルを(h')で表わせば、これは $h'x$ (xはBの元)なる如き元の全體からなる。

さてBの元a、bに對してab'及び$a'b$が(h')の元になるならば、aとbとはhが眞であるという假定の下に論理的に等値である。何んとなれば $ab'=h'c$ (cはBの元)なるを以て、hが眞であれば $ab'=(ab')h=hh'c=0$ 故に $a\subset b$ となる。同様に $a'b=h'd$ (dはBの元)ならばhが眞である假定の下に $a'b=0$ となり $a\supset b$ となるからである。

これにより同じ剰餘類に屬する元は論理的に等値であると考えられる。本稿に於ては以下簡單のために $a/(h')$ の代りに a/h とかくことにする。それ故 a/h は剰餘類として取扱うことにする。そしてブール環に於て作られるあら

ゆる剰餘類に於て順序∧が定義されていて半順序集合をなしている。
なお注意しておくことは $a/0=a/(1)$ は無用である。というのは0（僞なる命題）を眞と假定するからである。それ故この場合は省くことにする。また B/A に於けるAが主イデヤルでない場合も考えられるが、それは理論の現段階に於ては無用である。

四　クープマンの理論

(A)　定　義

クープマンの理論に於て用いられる諸術語を先ず定義しておこう。
「hが眞である前提の下に於けるaが、kが眞である前提の下に於けるbと同程度又はより少ない蓋然性にある（a on the presumption that h is true is equally or less probable than b on the presumption that k is true）」ということの語句が直観確率論の基本概念である。この語句を次の記號で表わす。

$$a/h \prec b/k, \quad b/k \succ a/h$$

そしてこの式を蓋然性に於ける比較（comparison in probabiliry）という。記號 a/h はケインズに負うものではあるが、クープマンに於ては全く異なつた意味に於て用いられている。というのはイデヤルによつて分けられた環の剰余類としてこの記號が用いられているのである。ケインズに於ては a/h を數として取扱うか、又は少くとも普通の算術の諸法則が滿足しているように取扱つている。
クープマンは先ず「半順序を有する命題で、ブール環の剰餘類をなすもの」として a/h を取扱い、從て第二にa及びhといつても之によつて表わされる命題の論理型（logic type）はケインズによつて意味されるものとは遙かに異

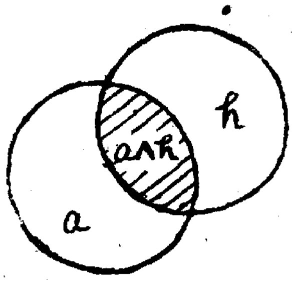
なつているのである。
a/h や b/k を eventuality（不測の事件、本稿では單に事象と譯しておく）といゝ、事象に於けるa、bを contingency（偶然性）、h、kを presumption（前提）という。そして $a/h<b/k$ をhに於けるaはkに於けるbよりも劣蓋然性である（infraprobable）ということにする。從て>は優蓋然性である（supraprobable）という。

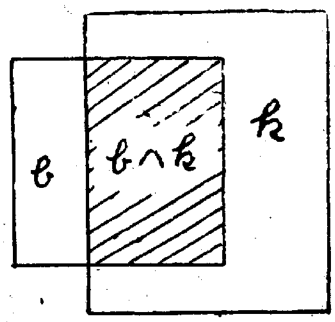
蓋然性の優劣の判定は個人と時とによつて異なるものであるが、特定の個人が特定の時に $a/h<b/k$, $b/k<c/l$ と判定したら、その同じ時に必ず $a/h<c/l$ でなければならぬし、$a'/h>b'/k$, $b'/k>c'/l$ でなければならぬ。

これは次に述べる公理T及びAに相當するものである。

(B)　公　理

蓋然性に於ける比較を行うに當つて以下に述べる公理を先ず設定する。それらの若干はその意味を理解するのに困難ではあるが、平面圖形の集合算として論理計算を考えればよい。例えば $a/h<b/k$ といつた場合には、領域aに對する領域 $a\cap h$ の面積比よりも領域bに對する領域 $b\cap k$ の面積比の方が多いという解釋を行えばよい。（hに對する $a\cap h$ の面積比が、kに對する $b\cap k$ の面積比よりも小であるといつてもよい。次圖參照）





クープマンは九つの公理を以て直觀確率論の公理としたのであるが、それら相互の關係と各々の獨立性には觸れて

おらない。

公理の前提として0及び1を有するブール環が仮定されており、それの剰餘類として事象（eventuality）$a/h, b/k$ が規定されているのである。以下九つの公理を掲げる。

公理V（自證性の公理、Axiom of Verified Contingency）　$a/h<k/k$

公理I（包含性の公理、Axiom of Implication）　$a/h>k/k$ ならば $h \subset a$

公理R（反射性の公理、Axiom of Reflexivity）　$a/h<a/h$

公理T（移動性の公理、Axiom of Transitivity）　$a/h<b/k$ にして $b/k<c/l$ ならば $a/h<c/l$ である。

公理A（反對稱性の公理 Axiom of Antisymmetry）$a/h<b/k$ ならば $a'/h>b'/k$

公理C（結合性の公理、Axioms of Composition）$a_1 b_1 h_1 \neq 0$ にして $a_2 b_2 h_2 \neq 0$ なるものとする。然るとき

C_1　$a_1/h_1 < a_2/h_2$ にして $b_1/a_1 h_1 < b_2/a_2 h_2$ ならば $a_1 b_1/h_1 < a_2 b_2/h_2$ なり。

C_2　$a_1/h_1 < b_2/a_2 h_2$ にして $b_1/a_1 h_1 < a_2/h_2$ ならば $a_1 b_1/h_1 < a_2 b_2/h_2$ なり。

公理D（分解性の公理、又はCの準逆公理、Axioms of Decomposition, Quasi—converse of C）$a_1 b_1 h_1 \neq 0$, $a_2 b_2 h_2 \neq 0$ にして $a_1 b_1/h_1 < a_2 b_2/h_2$ とする。然るとき事象(i)a_1/h_1, $b_1/a_1 h_1$ の何れか一つが、(ii)a_2/h_2, $b_2/a_2 h_2$ の何れか一つよりも優蓋然性の關係を有するとき(i)の殘りの事象は(ii)の殘りの事象よりも劣蓋然性の關係を有する。

公理P（對立前提の公理Axiom of Alternative Presumption）$a/bh<r/s$ にして $a/b'h<r/s$ ならば $a/h<r/s$ なり

公理S（細分性の公理、Axiom of Subdivision）任意のnに對して $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, b_1 b_2, \cdots\cdots, b_n$ が次の關係を有するものとする。

(1) $a_i \cap a_j = b_i \cap b_j = 0$ $(i \neq j,\ i,j = 1,2, \quad n)$

(2) $a = a_1 \cup a_2 \cup a_3 \cup \cdots\cdots \cup a_n \neq 0$

(3) $b = b_1 \cap b_2 \cap b_3 \cap \cdots\cdots \cap b_n \neq 0$

(4) $a_1 / a < a_2 / a < \cdots\cdots < a_n / a$

(5) $b_1 / b < b_2 / b < \cdots\cdots < b_n / b$

然るとき $a_1 / a < b_n / b$ である。即ちブール環の主イデヤルによつて分けられた剩餘類の全體に對して右の公理が成立し、且つ（$\vee$）なる關係が規定されているものとする。

公理RとTによれば$\vee$なる關係は半順序を定義していることが分る。從て半順序集合の理論を必要とする。

特に $a/h<b/k$ にして $a/h>b/k$ なるときは兩者は等蓋然性にあり（equiprobability）といつて、記號 $a/h \approx b/k$ を用いる。

また $a/h<b/k$ にして $a/h>b/k$ にならないとき $a/h \ll b/k$ で表わす。

式の計算に於てしばしば用いられる關係は $a/hk=ah/hk=ahk/hk$ であるが、これは剩餘環の性質から容易に導かれる。

(C) 定　理

定理一、すべての $a \neq 0$ に對して、$a/a \approx 1/1$ と $o/a \approx 0/1$ は眞である。また $ah \neq 0$ にして $ah \neq h$ ならば$0/1 \ll a/h \ll 1/1$ である。

證明、公理Vにより $a/a<1/1$ 及び $1/1<a/a$ なるを以て、$a/a \approx 1/1$ となる。これらと公理Aにより $a'/a>1'/1$ と $1'/1>a'/a$ が得られる。然るに $a'/a=aa'/a=o/a$ にして $1'/1=0/1$ なるを以て $0/a \approx 0/1$ となる。

公理Vにより $a/h<1/1$ であるが、もしも $a/h>1/1$ ならば公理Iによつて $ah=h$ となりこれは假定に反する。故につねに $a/h\leqq 1/1$ である。

さてもし $a'h=h$ ならば、$0=a(a'h)=ah$ となり假定に反する。故に今述べた證明に於て a を a' で置換えるならば、$a'/h<1/1$ が得られ $a'/h>1/1$ は否定される。そこで公理Aを用いると $a/h>0/1$ は眞となり、$a/h<0/1$ は僞となる。故につねに $0/1\leqq a/h$ である。　Q、E、D、

さて$<$を含む命題に於てすべての$<$が$\approx$によつて置換されたとき、その新しい命題を元のものの銳化 (sharpening) という。又少くとも一つの$<$が$\leqq$によつて置換されたとき、その新しい命題を元のものの强化 (strengthening) という。

また或假定の下に或結論が得られる演繹的陳述に於て假定と結論に$<$が含まれているとき、假定と結論に於て銳化を行つた新しい演繹的陳述を元のものの銳化という。これは强化についても同樣である。

我々の證明しようとする事柄の一つは、各公理に於て銳化並びに强化を行つたとき矢張りそれらの公理が成立することである。但しV、I、Rは假定と結論に於て共に$<$を含まないからこれは差控える。T、A、C、Dに就ては定理二がこれを示し、P、Sに就ては定理十一がこれを示している。

定理二、公理T、A、C、D、の銳化と强化は眞である。

證明、TとAに就ては明らかなのでこれは省略する。

C_1に就て證明しよう。いま新しく $a_1b_1h_1\neq 0,\ a_2b_2h_2\neq 0,\ a_1/h_1\approx a_2/h_2,\ b_1/a_1h_1\approx b_2/a_2h_2$ と假定して $a_1b_1/h_1\approx a_2b_2/h_2$ を證明しよう。然るときこの假定はC_1の元の假定を含むと同時に添數1と2とを交換したものをも與えるから、C_1によつて二つの結論 $a_1b_1/h_1<a_2b_2/h_2,\ a_1b_1/h_1>a_2b_2/h_2$ が得られる。これは求めるも

のである。

C_1の強化については、今新しく $a_1b_1h_1 \neq 0$, $a_2b_2h_2 \neq 0$, $a_1/h_1 \ll a_2/h_2$; $b_1/a_1h_1 < b_2/a_2h_2$ と假定して $a_1b_1/h_1 \ll a_1b_2/h_2$ を證明しよう。それにはC_1が既に證明されているので $a_1b_1/h_1 > a_2b_2/h_2$ の不成立を示せば十分である。もし之が眞なりとしてD（添數をかえて）を用いれば二つの關係 $b_1/a_1h_1 < b_2/a_2h_2$, $a_1b_1/h_1 > a_2b_2/h_2$ から $a_2/h_2 > a_1/h_1$ が得られる。これは假定の $a_2/h_2 < a_1/h_1$ に反する。

なお考えねばならぬ場合はC_1の假定に於て $b_1/a_1h_1 \ll b_2/a_2h_2$ のときであるがこれは同樣に出來るから讀者に委ねる。

C_2の場合もまたC_1と全く同樣なる故省略する。

Dに就ては次の場合だけを證明しておく。というのはそれだけが將來必要なのである。その他の場合は讀者に委ねる。即ち

$$a_1b_1h_1 \neq 0,\ a_2b_2h_1 \neq 0,\ a_1b_1/h_1 \ll a_2b_2/h_2,\ a_1/h_1 > b_2/a_2h_2$$

なるとき $b_1/a_1h_1 \ll a_2/h_2$ を證明しよう。

それには $b_1/a_1h_1 > a_2/h_2$ の不成立を示せばよい。このためにC_2（添數をかえて）を利用すると

$$a_2/h_2 < b_1/a_1h_1,\quad b_2/a_2h_2 < a_1/h_1 \text{ より } a_2b_2/h_2 < a_1b_1/h_1$$

が得られるのでこれは假定に反する。　Q、E、D、

これより述べる定理に於て、その鋭化と強化がやはり眞であるとき、そのことを附言しておこうと思うが、その場合に鋭化と強化の證明が元の定理の證明から容易に得られるときは省略することにする。

定理三、$ah \subset bh$ ならば $a/h < b/h$ であり且つ $bh \not\subset ah$ ならば $a/h \ll b/h$ である。

證明、公理RとVにより $b/h<b/h$, $a/bh<b/bh$

そこで C_1 に於て $h_1=h_2=h$, $a_1=a_2=b$, $b_1=a$, $b_2=b$ とおけば $ab/h<bb/h$ となる。これより第一の結論が得られる。

ここに $a_1b_1h_1=abh=ah$, $a_2b_2h_2=bh$ なるを以て、もしも $a_2b_2h_2=0$ ならば $ah=abh=0$ なるを以てこの場合には定理一より求める結論が得られる。

更に $bh\not\subset a/h$ と假定した場合に $ah\not\ll b/h$ 即ち $a/h>b/h$ になつたとすれば、次の關係

$b/h<a/h$, $b/h>b/h$ にDを應用することによつて $h_1=h_2=h$, $a_1=a_2=b$, $b_1=b$, $b_2=a$ とおけば $a_1b_1h_1(=bh)$ と $a_2b_2h_2(=abh=ah)$ が共に0でないことがないか又は關係 $b/bh<a/bh$ が得られる。然し $b/bh=bh/bh\approx 1/1$ なるを以てこれより公理Iによつて $bh\subset a$ 從て $bh\subset ah$ が得られるがこれは假定に反する。

もし $ah=0$ ならば、$b/h<a/h=0/h\approx 0/1$ が得られこれより公理Iによつて $bh=0\subset ah$ となるがこれは矛盾である。

最後に $bh=0$ ならば假定の $bh\not\subset ah$ により同じ矛盾が得られる。

Q、E、D、

この定理の第二の部分は第一の部分の一種の強化とみなされる。$ah=bh$ ならば $ah/h\approx bh/h$ になるという意味での鋭化は公理Rの平凡な結論である。同様な注意が次の定理に適用される。

定理四、$a\subset k\subset h$ ならば $a/h<a/k$ であり且つ $h\not\subset k$ にして $a\neq 0$ ならば $a/h\ll a/k$ である。

證明、公理VとRとから $k/h<k/k$, $a/hk<a/hk$. となる。$h_1=h$, $h_2=a_1=a_2=k$, $b_1=b_2=a$ とおいて C_1 を

用いると求める結論が得られる。こゝに $a_1 b_1 h_1 = ahk = a$, $a_2 b_2 h_2 = ak = a$ であり、もし $a = 0$ ならば結論は定理一から得られる。

更にもし $h \not\subset k$ にして $a \neq 0$ ならば、$a/k < a/h$, $a/k > a/k$ にDを應用して $h_1 = k$, $h_2 = h$, $a_1 = a_2 = k$, $b_1 = b_2 = a$ とおけば、$1/1 \approx k/k < k/h$ 從て $h \subset k$ が得られ矛盾となる。この際 $a_1 b_1 h_1 (= ak = a)$ と $a_2 b_2 h_2 (= akh = a)$ がともに0にならぬということにしてこの場合は假定により除くものとする。

定理五、(i) $a_1 b_1 h_1 = a_2 b_2 h_2 = 0$, (ii) $a_1 / h_1 < a_2 / h_2$, (iii) $b_1 / h_1 < b_2 / h_2$, ならば $a_1 \cup b_1 / h_1 < a_2 \cup b_2 / h_2$ である。なお鋭化と強化も眞である。

證明、公理Aを(ii)に應用すれば

$$a'_1 / h_1 > a'_2 / h_2 \qquad (1)$$

が成立する (i)より

$$a'_1 \cup b'_1 \cup h'_1 = 1$$

なるを以て、それに $b_1 h_1$ を乘ずると $a'_1 b_1 h_1 = b_1 h_1$ となる。故に

$$a'_1 b_1 / h_1 = a'_1 b_1 h_1 / h_1 = b_1 h_1 / h_1 = b_1 / h_1$$

となり、これは b_2 / h_2 に對しても同樣に成立する。それ故(iii)は次の如くかかれる。

$$a'_1 b_1 / h_1 < a'_2 b_2 / h_2 \qquad (2)$$

また $a'_1 b_1 h_1 \neq 0$, $a'_2 b_2 h_2 \neq 0$ と假定してもよい。何んとなれば $a'_1 b_1 h_1 = 0$ とすれば(i)から $b_1 h_1 = a'_1 b_1 h_1 \cup a_1 b_1 h = 0$ が得られ、(ii)と定理3から得られる次の關係から直接に結論が得られる。

$$a_1 \cup b_1/h_1 = a_1h_1 \cup b_1h_1/h_1 = a_1h_1/h_1 = a_1/h_1 \qquad a_1/h_1 < a_2/h_2 < a_2 \cup b_2/h_2$$

またもし $a'_2 b_2 h_2 = 0$ ならば前のように $b_2 h_2 = 0$ を導くことが出來、それにより(iii)は定理一の援助によつて既に除かれた場合 $a'_1 b_1 h_1 = 0$ をもたらす。

そこで(1)及び(2)にDを用いると（このとき a' と a'_2 は a_1 と a_2 の役割を果す）

$$b_1/a'_1 h_1 < b_2/a'_2 h_2 \qquad (3)$$

が得られる。これと公理Aにより

$$b'_1/a'_1 h_1 > b'_2/a'_2 h_2$$

が與えられる。もし $a'_1 b'_1 h_1 \neq 0$, $a'_2 b'_2 h_2 \neq 0$ ならば、この關係に C_1 を用い（$a'_2, b'_2, h_2, a'_1, b'_1, h_1$, が $a_1, b_1, h_1, a_2, b_2, h_2$ の役割を果す）且つ(1)を考慮すれば $a'_1 b'_1/h_1 > a'_2 b'_2/h_2$ となる。これに公理Aを用いると我々の定理の結論が得られる。

一方もし $a'_2 b'_2 h_2 = 0$ ならば $a_2 \cup b_2 \cup h'_2 = 1$ となり、それより

$$h_2 = h_2(a_2 \cup b_2 \cup h'_2) = (a_2 \cup b_2)h_2$$ が得られ、かくて $a_2 \cup b_2/h_2 = (a_2 \cup b_2)h_2/h_2 = h_2/h_2$ となり我々の結論は公理Vの結果となる。

最後にもし $a'_1 b'_1 h_1 = 0$ ならば（$a'_1 b_1 h_1 \neq 0$ を假定しておいて）

$$a'_1 h_1 = a'_1 b'_1 h_1 \cup a'_1 b_1 h_1 = a'_1 b_1 h_1$$

が得られ定理一によつて

$$b_1/a'_1 h_1 = a'_1 b_1 h_1/a'_1 h_1 \approx 1/1$$

となり、これを(3)と一緒にすれば $b_2/a'_2 h_2 > 1/1$ となる。これより又公理Iによつて $a'_2 b_2 h_2 = a'_2 h_2$ となりこ

れにb'_2を乗ずると $a'_2 b'_2 h = 0$ となる。これは前以て取除いておいた場合である。これで證明は完結する。

Q、E、D、

定理六、すべての $i \neq j$ に對して $a_{1i}a_{1j}h_1 = a_{2i}a_{2j}h_2 = 0$ にして、すべての $i=1,2,\cdots n$ に對して $a_{1i}/h < a_{2i}/h_2$ ならば $a_{11}\cup a_{12}\cup\cdots\cdots\cup a_{1n}/h_1 < a_{21}\cup a_{22}\cup\cdots\cdots\cup a_{2n}/h_2$ である。鋭化とすべての強化はまた眞である。

これは定理五から數学的歸納法によって導かれる。

定理七、(i) $b_1 \subset a_1$, $b_2 \subset a_2$, (ii) $a_1 / h_1 < a_2 / h_2$, (iii) $b_1 / h_1 > b_2 / h_2$, ならば $a_1 b'_1 / h_1 < a_2 b'_2 / h_2$ である。鋭化とすべての強化は眞である。

證明 (i)により$a_1 b_1 = b_1$, $a_2 b_2 = b_2$なるを以て(iii)は$a_1 b_1 / h_1 > a_2 b_2 / h_2$となる。

先ず $a_1 b_1 h_1 \neq 0$, $a_2 b_2 h_2 \neq 0$ と假定する。そしてこの關係にDを應用すると(添數を交換して)(ii)と一緒にして $b_1 / a_1 h_1 > b_2 / a_2 h_2$ が得られる。これに公理Aを應用すると次の關係

$$b'_1 / a_1 h_1 < b'_2 / a_2 h_2 \qquad (4)$$

が得られる。

さてまた $a_1 b'_1 h_1 \neq 0$, $a_2 b'_2 h_2 \neq 0$ と假定しても差支えない。何んとなれば $a_1 b'_1 h_1 = 0$ ならば $a_1 b'_1 / h_1 = a_1 b'_1 h_1 / h_1 = 0 / h_1 \approx 0 / 1$ となり我々の定理の結論は定理一の結果となる。またもし $a_2 b'_2 h_2 = 0$ ならば關係(4)により $b'_1 / a_1 h_1 < a_2 b'_2 h_2 / h_2 = 0/ h_2 \approx 0/1$ となり、これは定理一により丁度取除いておいた場合 $a_1 b'_1 h_1 = 0$ へ導かれる。それ故C_1を(4)に應用し(b'_1. b'_2をb_1, b_2の代りにおく)(ii)と一しよに考えれば我々の定理の結論が得られる。

最後に除いた場合 $a_2 b_2 h_2 = 0$ を考えよう。このとき(i)により $b_2 h_2 = 0$ となるので $b'_2 \cup h'_2 = 1$, $b'_2 h_2 = h_2$ 從

て $a_2b'_2/h_2 = a_2(b'_2h_2)/h_2 = a_2h_2/h_2 = a_2/h_2$ となる。さて $a_1b'_1 \subset a_1$ にして定理3により $a_1b'_1/h_1 < a_1/h_1$ である。それ故我々の定理に對する結論は(ii)から出てくる。

最後に $a_1b_1h_1 = 0$ ならば(i)より $b_1h_1 = 0$ にしてそれ故 $b_1/h_1 = b_1h_1/h_1 = 0/h_1 \approx 0/1$ となる。然し(iii)から $b_2/h_2 < 0/1$ なる故これより $b_2h_2 = 0$ となる。これは丁度取除いておいた場合である。　Q、E、D、

定理八、$a \subset k$, $b \subset k$, $k \subset h$ とする。然るとき次の關係の一方は他方が眞であるための必要にして且つ十分な條件である。

(i) $a/h<b/h$,　(ii) $a/k<b/k$

また鋭化と强化も眞である。

證明、(i)を假定する。$ka=a$ にして $kb=b$ なるを以て(i)と公理Rとから次の關係

$ka/h<kb/h$,　$k/h>k/h$

が得られる。さて $kah=a$ にして $kbh=b$ である。そこでこれらの一方又は兩方が0であると假定すれば直に(ii)へ導かれる。（定理一）

從てDをこの一對の關係に應用すると（k, a, h, k, b, h, を a_1, b_1, h_1, a_2, b_2, h_2 の代りにそれぞれおく）$a/kh<b/kh$ が得られる。これは $kh=k$ なるを以て求める結論(ii)である。

次に(ii)を假定する。C_1を二つの關係

$k/h<k/h$,　$a/kh<b/kh$

に應用すると（k, a, h, k, b, h, を a_1, b_1, h_1, a_2, b_2, h_2 の代りにそれぞれおく）或關係が得られるが $ka=a$, $kb=b$ なるを以てそれは(i)と一致する。こゝで再び $kah=a$, $kbh=b$ のいずれか一が0ならば結論は直に得られ

る。

Q、E、D、

定理九、$ah \neq 0$, $bh \neq 0$ とす。然るとき (i) $a/h < a/bh$ (ii) $b/h < b/ah$ に於て(i)から(ii)が得られる。$<$を$>$におきかえても矢張眞である。また鋭化と强化も眞である。

證明、(i)と公理Rとから

$$ab/h > ab/h, \quad a/bh > a/h$$

を得る。これにDを應用すると (b, a, h, a, b, h を $a_1, b_1, h_1, a_2, b_2, h_2$ の代りにそれぞれおく) これから (ii)が得られる。Dの應用は正當化される。$a_1 b_1 h_1 = abh = a_2 b_2 h_2$ であり、$abh=0$ ならば $b/ah = abh/ah = 0/ah \simeq 0/1$ となり(ii)は定理一の自明な結果となる。

この定理の殘りの證明は正に同樣に出來るので省略する。 Q、E、D、

定理十、$kh \neq 0$, $k'h \neq 0$とす。然るとき次の關係の一方は他方が眞であるための必要にして且つ十分な條件である。

(i) $a/h < a/kh$, (ii) $a/k > a/k'h$

また鋭化と强化も眞である。

證明、公理Aによれば(i)から(ii)が導かれることを示せばよいことになる。

$ah=0$ ならば $a/k'h = ah/k'h = 0/k'h \simeq 0/1$ となり、(ii)は定理一の結果となる。

$ah \neq 0$ ならば定理九が(i)に應用され($b=k$として)かくして得られた結果は公理Aにより $k'/h > k'/ah$ となる。

そこで再び定理九を應用すると (k', a_1 $>$を a_1 b_1 $<$ の代りにおく) (ii)が得られる。 Q、E、D、

定理十一、公理PとSの鋭化とすべての强化は眞である。

證明、Pを鋭化すると、假定 $a/bh \simeq r/s$, $a/b'h \simeq r/s$ はPの假定を含むを以てその結論をも含む。又一方$a/bh>$

r/s, $a/b'h>r/s$ なるを以てこれより公理Aによつて

$$a'/bh<r'/s,\ a'/b'h<r'/s$$

となる。従て再びPにより $a'/b<r'/s$ 故に再び公理Aにより $a/b>r/s$ となる。これをPの前の結論と一しよにすることによつて鋭化の結論が得られる。

Pの強化に對しては $a/bh\ll r/s$, $a/b'h<r/s$ と假定されなければならぬ。要求されているすべては

$$a/h>r/s \qquad (5)$$

の偽りを證明することにある。もしこれが眞であると假定すれば、我々の假定は公理Tの援助により、$a/b'h<a/h$ を導く。

さて定理十を應用すると——上の關係は $k=b$ とすれば(ii)と等しくなる——$a/h<a/bh$ となりこれは(5)と一しよにすれば假定に矛盾する $a/bh>r/s$ を與える。

その他の強化は自働的に進めることが出來るから省略する。

sの鋭化は鋭化された假定に含まれる＜及び＞の假定にsを二度應用すれば直に得られる。

sを強化すると、或固定された $i\ (1\leqq i\leqq n-1)$ に對して $a_i/a\ll a_{i+1}/a$ を含むという強化の假定の下に、$a_1/a\ll b_n/b$ を證明することになる。

いまこれを否定して $a_1/a>b_n/b$ になるものとすれば直に

$$a_1/a>b_1/b,\ \cdots\cdots,\ a_i/a>b_i/b$$

$$a_{i+1}/a\gg b_{i+1}/b,\ \cdots\cdots,\ a_n/a\gg b_n/b.$$

が得られ、それからは定理六（強化された）によつて矛盾が出てくる。

$1/1 \simeq a/a \gg b/b \simeq 1/1$

その他殘された場合は讀者の考察に委ねる。　Q、E、D、

定理十二、$ah \neq 0$, $a'h \neq 0$, $bh \neq 0$, $b'h \neq 0$ とす。然るとき

(i) $a/bh < a/b'h$ からは (ii) $b/ah < b/a'h$ (iii) $a/bh < a/h$ が得られる。

(i)(ii)(iii)に於て$<$を$>$におきかえても定理は眞である。銳化と強化も眞である。

證明、公理Rにより $a/b'h < a/b'h$ を得る。これに公理Pを應用して（a, $b'h$ を r, s の代りにおく）(i)と一しょに考えれば $a/h < a/b'h$ を得る。そこで定理十を應用すると（$k = b'$ として）(iii)を得る。また關係(ii)は公理Tにより得られる。　Q、E、D、

次の定理は公理Pの擴張であるが證明は直に出來るので省略する。

定理十三、$h_i h_j = 0$ $(i \neq j)$ $i, j = 1, \ldots\ldots, m$

$k_i k_j = 0$ $(i \neq j)$ $i, j = 1, \ldots\ldots, n$

$a/h_i = b/k_j$, $i = 1, \ldots\ldots, m$, $j = 1, \ldots\ldots, n$

なる假定の下に

$$a/h_1 \cup \ldots\ldots \cup h_m < b/k_1 \cup \ldots\ldots \cup k_n$$

が得られる。銳化と強化もまた眞である。

(D) 確率論の基礎

これまでの理論は數量的に表わされない蓋然性についてであつたが、これを數量的に表わされる在來の確率論に應

用してこれを基礎付けてみよう。これがクープマンの最後の目標であるがこの詳細をこゝに記すことは紙數が許さないので概略を述べておく。

先ず既に擧げた公理の外にnスケール(n-scales)という概念を導入している。

定義、nスケールとはn個の命題($u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$)の集合で次の條件を滿足するものをいう。

一、$u=u_1 \cup \ldots \cup u_n \neq 0$

二、$u_i u_j=0$ $(i \neq j)$, すべての $i,j=1,2,\ldots\ldots n$ に對して。

三、$u_i/u \approx u_j/u$, すべての $i,j=1,2,\ldots\ldots n$ に對して。

このnスケールに對して次の假定をおく。

假定、nを與えられた正整數とするとき、少くとも一つのnスケールは存在するものと認める。

この假定の下にnスケールに關する次の定理を先ず證明している。

定理十四、($u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$)をnスケール、($v_1, v_2, \ldots\ldots, v_m$)をmスケールとし、rとsを $0 \leqq s \leqq n$, $0 \leqq r \leqq m$ を滿足する整數とするとき $s/n <, =, > r/m$ なるに從て $u_{i_1} \cup \ldots\ldots \cup u_{i_s}/u <, \approx, v_{j_1} \cup \ldots\ldots \cup v_{j_r}/v$ となる。

この定理の證明は省略するが $t=0$ のとき $0/u<a/h$ になるものとすれば、次の關係

$$u_1 \cup \ldots\ldots \cup u_t/u<a/h$$

はtの少くとも一つの値($0 \leqq t \leqq n$)に對して眞である。更にこの關係を滿足するtの極大値は選ばれた特別のnスケール($u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$)とは獨立である。そこで定理十四を應用すると、一定の a/h と n が與えられたときtの値は定まるのでこれを $t(n)$ で表わすことにする。

同様に $a/h<u_1 \cup \ldots\ldots \cup u_T/u$ が眞であるようなTの極小値が、一定の a/h と n が與えられたとき定まるので、

これを $T(n)$ で表わすことにすると、明らかに

$$0 \leqq t(n) \leqq T(n) \leqq n$$ が成立する。

定理十五、次の極限はつねに存在し

$$P_*(a, h) = \lim_{n \to \infty} \frac{t(n)}{n}, \quad P^*(a, h) = \lim_{n \to \infty} \frac{T(n)}{n}$$

且つそれらは次の關係を滿足する

$$0 \leqq P_*(a, h) \leqq P^*(a, h) \leqq 1$$

定理十六、$a_1 / h_1 < a_2 / h_2$ ならば $P_*(a_1, h_1) \leqq P_*(a_2, h_2)$　$P^*(a_1, h_1) \leqq P^*(a_2, h_2)$ にして、$P^*(a_1, h_1) < P_*(a_2, h_2)$ ならば $a_1 / h_1 < a_2 / h_2$ となる。

定理十七、$P_*(a, h) + P^*(a', h) 1$

定理十八、(i) $P^*(a_1 \cup a_2, h) \leqq P^*(a_1, h) + P^*(a_2, h)$

(ii) $a_1 a_2 h = 0$ ならば $P_*(a_1 \cup a_2, h) \geqq P_*(a_1, h) + P_*(a_2, h)$

定理十九、a, b, c を $a \subset b \subset c (b, c \neq 0)$ を滿足する命題とすれば、

(i) $P_*(a, b)\ P_*(b, c) \leqq P_*(a, c) \leqq P_*(a, b) P^*(b, c)$

(ii) $P^*(a, b) P_*(b, c) \leqq P^*(a, c) \leqq P^*(a, b) P^*(b, c)$

定義 $P_*(a, h) = P^*(a, h)$ なるとき事象 a/h は評價可能 (to be appraisable) という。a/h が評價可能なるとき、共通の極限　$P(a, h) = P_*(a, h) = P^*(a, h)$　を a/h (前提 h の下に於ける偶然性 a) の (數量的) 確率とよぶ。剩餘類環に於ける半順序が完全順序 (completely ordered) なるとき、すべての事象は評價可能なることに注意し

ておこう。

a_1/h と a_2/h が評價可能ならば定理十六により $P(a_1,h_1)<P(a_2,h_2)$ から $a_1/h<a_2/h$ が導かれる。然し等式 $P(a_1,h_1)=P(a_2,h_2)$ は $a_1/h_1<,>,\approx a_2/h_2$ のいずれの一つとも全く一致している。かくして數量的確率の關係は、蓋然性に於けるより基本的な比較の不明瞭な寫しを與えるに過ぎないことが分る。例えば $ah\neq 0$ のときでさえ $P(a,h)=0$ になるという事實を思いあわされたい。

定理二十、$(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ が n スケール $(n=1, 2, \ldots)$ であつて、b が t 個の元 a_i の和即ち

$$b=a_{i_1}\cup\ldots\ldots\cup a_{i_t}\ (b=0,\ t=0 \text{ のとき})$$ ならば、b/a は評價可能にして $P(b,a)=t/n$ である。特に $a\neq 0$ なるときいつでも $0/a$ と a/a は評價可能であつて $P(0,a)=0$, $P(a,a)=1$ である。

定理二十一、a/h が評價可能なるための完全條件は、如何なる $\varepsilon>0$ に對しても

$a'/h'<a/h<a''/h''$, $P(a'',h'')-P(a',h')<\varepsilon$ を滿足する評價可能な a'/h', a''/h'' が存在することである。

定理二十二、$P^*(a,h)=0$ ならば a/h は評價可能である。$P_*(a,h)=1$ ならば a/h は評價可能である。

定理二十三、a/h が評價可能ならば a'/h も評價可能にして $P(a,h)+P(a',h)=1$ が成立する。

定理二十四、$a_1a_2h=0$ にして a_1/h と a_2/h が共に評價可能ならば $a_1\cup a_2/h$ も評價可能にして $P(a_1\cup a_2,h)=P(a_1,h)+P(a_2,h)$ が成立する。

これが全確率（total probability）の原理であつて共通部分を有しない成分の有限個の和に擴張される。

定理二十五、$a\supset b\supset c$ にして a/b と b/c とが評價可能ならば、a/c も評價可能にして $P(a,c)=P(a,b)P(b,c)$ が成立する。

定理二十六、$a\subset b\subset c$ にして a/c と b/c が評價可能、且つ $P(b, c)\neq 0$ ならば a/b は評價可能にして $P(a, c)=P(a, b)P(b, c)$ が成立する。

定理二十七、$a\subset b\subset c$ にして a/b と a/c が評價可能ならば ab'/c は評價可能にして $P(ab', c)=P(a, c)-P(b, c)$ となる。

定理二十八、a_1、a_2、h を $a_1\subset h, a_2\subset h$ を満足する命題とし、a_1/h と a_2/h とが評價可能ならば、$a_2\cup a_2/h$ が評價可能になるのは、a_1a_2/h が評價可能にして

$$P(a_1, h)+P(a_2, h)=P(a_1\cup a_2, h)+P(a_1a_2, h)$$

が成立するときであり且つこのときに限る。

かくして本節の目標へと到達した譯である。即ち以上に於て數量的確率の定義とその在來の性質が導かれたので十分滿足といえよう。用いたブール環は集合Eの部分集合の閉集合族に對應し、この族に於ては加法集合函数 $P_H(A)=P(a, h)$ が定義されていてコルモゴロフの公理を満足している。このコルモゴロフの公理からは確率の古典的理論が導かれるのである。かくして我々の目標はすべて達成されたことになる。未だ殘つているのは數列に於ける頻度との關係であるが、これはこゝでは述べない。

（昭和二十七年八月二十六日）