線形計畫法の逐次解法

（線形計畫法のルビ：リニヤー・プログラミング）

古瀬大六

序

線形計畫法 (Linear Programming) という名稱は、クープマンスの編纂になる「生産及割當の操業度分析」(Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission Monograph, No. 13, 1951.) の刊行によつて既に廣く知られるようになつているものと思われるので、ここで改めて説明することはせずに、直ちに本題に入ることとしたい。

線形計畫法とゲーム理論とが、その數学的表現に於て殆ど一致している、ということもまた、改めて論ずるまでもない周知のことがらである。けれども、それぞれの領域がそれぞれの專門的研究者を持つているためであろうか、この二つの領域の間にはかならずしも完全な知識の交流が行われているとは言えない點が見られるようである。

ここでは、そのような問題の一例として、逐次解法のそれを取り上げて考えてみよう。ゲーム問題の一般的解法としては、既に Simplex Method が考案されており、また、從來その缺陥と思われていた degeneracy の問題も、最近になつて完全な解決策が與えられたるようになつた。その線形計畫法への適用もまた、チャーンズの論文[1]によつて、

完成の域に達したものと考えてよいであろう。

ゲーム問題の今一つの解法は、ブラウン及びノイマンの逐次解法であるが、それの線形計畫法への適用については、現在のところ全く論ぜられていない狀況である。この論文に於ては特にこの點を取上げて考えてみたい。クープマンスは既に、線形計畫法が何等かの逐次解法を持つに違ないことを、市場機構への類推を通じて、直觀的に豫想していたのではないか、[3]と思われるが、その具體的解法を與えることはできなかつた。他方、ノイマンは、ゲームについての聯立微分方程式による解法（それは勿論直ちに逐次解法に轉化させることができる）を數学的に嚴密に證明したけれども、それの線形計畫法への適用、從つて、それと市場における價格變動を通じての需給均衡成立の過程との間の關聯については、一言もふれていない。

筆者の意圖は、このノイマンの解法を線形計畫法の形に書き改めることによつて、その經濟学的意味を明かにし、また線形計畫法を具體的に解くという問題に對して何等かの貢献をしよう、という二つの點にあるのである。

1 Charnes, A., "Optimality and Degeneracy in Linear Programming," Econometrica, April, 1952, p.p. 160—170.
2 Brown, G. W. and Neumann, J. von, "Solution of Games by Differential Equations," Contributions to the Theory of Games, edited by Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., 1950, p.p. 73—79.
3 Koopmans, T. C., "Analysis of Production As an Efficient Combination of Activities," Activity Analysis of Production and Allocation, edited by Koopmans, Cowles Commission Monograph, No. 13, 1951, Chapter III, p.p. 93—95.

一 ゲーム問題の逐次解法

總得點零の二人ゲーム (zero sum uwo person game) の逐次解法には、筆者の知る限り、二つの方法がある。その一つはブラウンの Fictious Play[1] による方法であり、他の一つは前節にも簡單に觸れておいたブラウン及びノイ

マンの聯立微分方程式による方法である。ブラウンによれば、この二つはは質的には同一の解法であるとのことであるが、[2]肝心のブラウン自身がその證明を與えておらず、筆者自身にもそれだけの餘暇も能力も持ち合せがないので、正しい解答はその道の專門家に御願するより他はない。

第一のブラウンの Fictious Play による方法を簡單に説明すれば次の通りである。則ちそれは、maximizer と minimizer とが、その game matrix の一つの行又は列をそれぞれ一つの pure strategy と見做して交互にその手を決定し、且つその都度 game matrix の數値を累積的に修正して行く方法である。その結果として得られるそれぞれの pure strategy の頻度の比率が、極限に於て optimal mixed strategy の値に收斂することになるのであるが、その誤差と play の回數との積が大體一定であるために、最初のうちは非常によく收斂するけれども、間もなくその收斂速度が減退して、極めて能率の惡い計算方法になつてしまう、[3]という大きな缺陷を持つている。ブラウン自身、この方法の數學的證明を與えておらず、單にその脚註に於て、ロビンソンによる收斂性の證明が近く The Annals of Mathematics 誌上に掲載されるであろう、と附記しているだけであり、[4]筆者もまた右の論文の存在を確認しておらないので、殘念ながら、これ以上詳しく論ずることはできない。

然し、一つ氣にかかることは、二つ以上の optimal pure strategy が存在する場合に、その中の何れを選ぶべきか、という點である。ブラウン自身は何等の理由をも示すことなしに、一番左側の手を選んでいる。[5]この左右關係は、問題の本質とは全く無關係に、偶然的に決定されるのであるから、彼のこのような選び方もまた、全く恣意的と言わなければならない。これが正當な方法として合理化されるためには、選び方の如何が問題の答えに全く何らの影響をも及ぼさない、ということを豫め積極的に證明しておく必要があるのに、彼はこの點についても沈黙しているのである。これがまた例の simplex method に於ける degenerdcy の存在と何等かの關聯を持つているかもしれない

のであるけれども、その解決はやはり專門の數学者の手を待たなければならないであろう。第二のブラウン及びノイマンの聯立微分方程式法は概略次の通りである。先ず、與えられた任意の game matrix B に對して左の如き新たな game matrix A をつくる。

$$A = \begin{vmatrix} 0 & B & -1 \\ -B' & O & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

この新しいゲームAの Optimal mixed strategy (x_i, y_i, λ) を知れば、もとのゲームBの Optimal mixed strategy は、maximizer 及び minimizer についてそれぞれ、

$$\frac{x_i}{\Sigma x_i} \; ; \; \frac{y_i}{\Sigma y_i}$$

の形で與えられることになる。それ故、Bを解く代りにAを解くならば、Bの解は一義的に決定できるわけである。この新しい game matrix Aは、その對稱的位置にある二要素の値が互に符號を異にし且つその絶對値が同一である、則ち $a_{ji} = -a_{ij}$ $(i \neq j)$ が成立つ、という特性を具えている。この所謂 anti-symmetric な性質を利用することによつて、Aの optimal mixed strategy をば、左の聯立微分方程式の $t \to \infty$ に於ける各變數の收斂値として求めることができる。

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi(u_i) - \phi(x) \cdot x_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

但し、

$$u_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

$$\varphi(u_i)=\mathrm{Max}(o;u_i)$$

$$\phi(x)=\Sigma\varphi(u_i)$$

この聯立微分方程式は、$\varphi(u_i)$という特殊な非線形的要素を含んでいるために、通常の方法でその一般的解を求めることは困難であるが、任意の初期條件 $x_i(0)$（但し$\Sigma x_i(0)=1$）から出發すれば、時間の經過とともに必ず或る有限値x^0_iに收斂し、その極限度が同時にゲームAの optimal mixed strategy を表わす、ということをブラウン及びノイマンの論文は證明している。ここでその詳細を繰返すことは筆者の最初の意圖を超えることになるので、讀者自ら原論文を參照されるよう希望する。このような簡單には解けない微分方程式を與えてみても、現實に解を求めるという吾々の目的には役立たないのではないかと考えられるかもしれない。然し、この式を近似的に定差方程式で表わすことによつて、これを逐次解法の問題に轉化させることもできるし、またその論文の冒頭に於て彼等自身が言つているように、これを digital computer 又は analogue computer にかけることによつて、機械的・電氣的に容易に解くことができるのである。この點を考慮に入れるならば、この聯立微分方程式による表現方法を與えることは、具體的解法の上での一つの大きな前進を意味するものと考えてよいであろう。

1 Brown, G. W., "Iterative Solution of Games by Fictious Play," Activity Analysis of Production and Allocation, 1951, p.p. 374—376.

2 上記論文の帽頭に、この Fictious Play 法が或種の微分方程式に關係をもつこと、それについてはノイマンとの協同論文中で論述されていること、を指摘しているが、前節註(2)の論文がそれに該當するものと思われる。

3 Brown, G. W., op. cit., p. 375.

4 Ibid., p. 375, footnote.

5 Ibid., p. 376, second line and Table II.

6　Brown, G. W. and Neumann, J. von, "Solution of Games by Differential Epations," Contributions to the Theory of Games, 1950, p.p. 73～79.

「附記」　この職立微分方程式を直接解くことは、面倒ではあるが、不可能ではない。その解法の一例については、第五節の註(5)を参照のこと。

二　ゲームと線形計畫との關係

任意の zero sum two person game は、これを或る種の線形計畫法の問題に必ず轉化させることができるし、また逆に、任意の線形計畫法の問題を或る種の zero sum two pereon game に飜譯することも可能である。

前節にも述べたように、任意の game matrix B を持つ zero sum two person game は、左の如き anti-symmetric game matrix A を持つ一つのゲームに轉化させることができるのであるが、

$$A = \begin{vmatrix} 0 & B & -1 \\ -B' & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

それは、とりもなおさず、

$$Ax \leqq 1 \text{ , } x \geqq 0$$

なる條件の下に、Σx を最大ならしめよ、という一つの線形計畫法の問題に外ならない。[1]

また、

$$Ax \leqq b \text{ ; } x \geqq 0$$

なる條件の下で、cx を最大ならしめよ、という線形計畫法の問題は、

$$B = \begin{vmatrix} 0 & A & -b \\ -A' & 0 & c \\ b' & -c' & 0 \end{vmatrix}$$

なる型の或る種の zero sum two person game の問題に轉化させることができる。[2]

則ち、ゲームと線形計畫とは、anti-symmetric game という一つの中間項を經由して、互に轉化し合うことができるわけであり、從つて、その一方についての定理或は解法は、必ずこれを他方についての定理或は解法に飜譯することができる筈である。

たとえば、ゲームの理論に於ける所謂 duality の問題を、線形計畫法の場合に飜譯するならば、左の如くなるであろう。則ち、

$$Ax \leqq b \ , \ x \geqq 0 \ , \ \delta = cx$$

に於ける δ の最大値は、それと dual な關係にある、

$$A'u \geqq c \ , \ u \geqq 0 \ , \ \delta = bu$$

なる問題に於ける δ の最小値に必ず等しい。[3]

この duality の意義は、殊に線形計畫法に於て、極めて重要である。線形計畫法が一つの市場均衡模型を與える、というサミュエルソン理解[4]はこれから生れたものであり、u が分權的管理組織に於ける部門間の內部振替價格 (shadow price or internal price) を意味する、というクープマンスの解釋[5]もまた、この双對性 (duality) に由來しているのである。筆者の問題とする逐次解法もまた、この双對性を有效に利用した方法に外ならない。

1 Gale, D., Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., "Linear Programming and Theory of Games," Activity Analysis of Production

and Allocation, ed. by T. C. Koopmans, 1951, Chap. XIX, p.p. 327—328.
2 Ibid.
3 Ibid., p. 322, Corollary.
4 Samuelson, P. A., Market Mechanisms and Maximization, 1949.
5 Koopmans, T. C., "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities," Activity Analysis of Production and Allocation, 1951, Chap. III, p.p. 65, 93—95.

三 線形計畫の fictious play 解法

問題の直觀的理解を容易にするために、一つの具體例として、次のような線形計畫法の問題を考えてみよう。一企業があつて、生産設備として二つの機械を持ち、二種の製品を生産している。製品Aを一單位生産するにはIの機械を三時間とIIの機械を四時間と使わなければならず、また製品Bを一單位生産するためには、Iの機械を五時間とIIの機械を二時間と使用しなければならない（技術的生産函數）。何れの機械も、その一日の最大使用時間は十時間を超えることができず、且つ製品Aの販賣單價は一ドル、製品Bのそれは二ドルであるとするならば、最も有利な製品組合せ法は如何？又、その場合の利潤は何ドルであるか？右の問題を線形計畫法の形に表現すればそれは、

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqq 10 \end{cases}$$

$$x_1 \geqq 0\ ,\ x_2 \geqq 0$$

なる條件の下で、

$$x_1 + 2x_2$$

を最大ならしめるところの x の値を求む、という問題に書き改められる。従つて、この技術マトリックス

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

を、前節の方法により anti-symmetrize すれば、それはまた、

MINIMIZER

MAXIMIZER i \ j	1	2	3	4	5
1	0	0	3	4	—10
2	0	0	5	2	—10
3	—3	—5	0	0	1
4	—4	—2	0	0	2
5	10	10	—1	—2	0

なる game matrix を持つ zero sum two person game に翻譯される。

このゲームの optimal mixed strategy を先ず第一に、fictious play の方法で求めてみると次表の如くなる。

n	i_n	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 5	j_n	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5
1	1	0	0	3	4	−10	5	−10	−10	1	2	0
2	4	−4	−2	3	4	− 8	5	−20	−20	2	4	0
3	4	−8	−8	3	4	− 6	1	−20	−20	− 1	0	10
4	5	2	2	2	2	− 6	5	−30	−30	0	2	10
5	5	12	12	1	0	− 6	5	−40	−40	1	4	10
6	5	22	22	0	− 2	− 6	5	−50	−50	2	6	10
7	5	32	32	− 1	− 4	− 6	5	−60	−60	3	8	10
8	5	42	42	− 2	− 6	− 6	4	−56	−58	3	8	8
9	4	38	40	− 2	− 6	− 4	4	−52	−56	3	8	6
10	4	34	38	− 2	− 6	− 2	4	−48	−54	3	8	4
11	4	30	36	− 2	− 6	0	4	−44	−52	3	8	2
12	4	26	34	− 2	− 6	2	4	−40	−50	3	8	0
13	4	22	32	− 2	− 6	4	4	−36	−48	3	8	− 2
14	4	18	30	− 2	− 6	6	4	−32	−46	3	8	− 4
15	4	14	28	− 2	− 6	8	4	−28	−44	3	8	− 6
16	4	10	26	− 2	− 6	10	4	−24	−42	3	8	− 8
17	4	6	24	− 2	− 6	12	4	−20	−40	3	8	−10
18	4	2	22	− 2	− 6	14	4	−16	−38	3	8	−12
19	4	−2	20	− 2	− 6	16	4	−12	−36	3	8	−14
20	4	−6	18	− 2	− 6	18	1	−12	−36	0	4	− 4
21	4	−10	16	− 2	− 6	20	1	−12	−36	− 3	0	6
22	5	0	26	− 3	− 8	20	4	− 8	−34	− 3	0	4
23	5	10	36	− 4	−10	20	4	− 4	−32	− 3	0	2
24	5	20	46	− 5	−18	20	4	0	−30	− 3	0	0

25	1	20	46	−2	−14	10	4	4	−28	−3	0	−2
26	1	20	46	1	−10	0	4	8	−26	−3	0	−4
27	1	20	46	4	−6	−10	5	−2	−36	−2	2	−4
28	4	16	44	4	−6	−8	5	−12	−46	−1	4	−4
29	4	12	42	4	−6	−6	4	−8	−44	−1	4	−6
30	4	8	40	4	−6	−4	4	−4	−42	−1	4	−8
31	4	4	38	4	−6	−2	4	0	−40	−1	4	−10
32	4	0	36	4	−6	0	4	4	−38	−1	4	12
33	1	0	36	7	−2	−10	5	−6	−48	0	6	12
34	4	−4	34	7	−2	8	5	−16	−58	1	8	12
35	4	−8	32	7	−2	−6	1	−16	−58	−2	4	−2
36	4	−12	30	7	−2	−4	1	−16	−58	−5	0	8
37	5	−2	40	6	−4	−4	4	−12	−56	−5	0	6
38	5	8	50	5	−6	0	4	−8	−54	−5	0	4
39	5	18	60	4	−8	0	4	−4	−52	−5	0	2
40	5	28	70	3	−10	0	4	0	−50	−5	0	0
41	1	28	70	6	−6	−10	5	−10	−60	−4	2	0
42	4	24	68	6	−6	−8	5	−20	−70	3	4	0
43	4	20	66	6	−6	−6	4	−16	−68	−3	4	−2
44	4	16	64	6	−6	−4	4	−12	−66	−3	4	−4
45	4	12	62	6	−6	−2	4	−8	−64	−3	4	−6
46	4	8	60	6	−6	0	4	−4	−62	−3	4	−8
47	4	4	58	6	−6	2	4	0	−60	−3	4	−10
48	4	0	56	6	−6	4	4	4	−58	−3	4	−12
49	1	0	56	9	−2	−6	5	−6	−68	−2	6	−12
50	4	−4	54	9	−2	−4	1	−6	−68	−5	2	−2

右の表の$.i_n$及び$.j_n$の頻度を n=10, 20, 30, 40, 50 の各々の場合について計算し、それを5の頻度で除すことによつて、u_1、u_2、x_1、x_2の近似値を求めれば、

頻　度　表

n ＼ ij	1	2	3	4	5
10	2	0	0	7	11
20	3	0	0	26	11
30	7	0	0	37	16
40	10	0	0	48	22
50	13	0	0	62	25

近　似　解

n	u_1	u_2	x_1	x_2
10	0.18	0	0	0.64
20	0.27	0	0	2.36
30	0.44	0	0	2.31
40	0.45	0	0	2.18
50	0.52	0	0	2.48
正解	0.50	0	0	2.50

この fictious play 法は精度は悪いけれども、計算が單純な加減法だけで極めて簡單であり、且つ機械的に計算を續けて行けばよい、という利點を備えている。從つてそれは、より精密な方法を使用する際に、解の大さに大體の見當をつけるための手段として有效であろう。また大して精度を要求しない場合には、以上の手續を簡單な electronic な digital computer とリレーとを使うことによつて、自動化し高速化することも可能であろう。Analog を作ることも勿論可能であろうけれども、得點表中の最大數、最小數を判定する際に、その差が僅少であると、誤つた解が求められる心配があるから、Analog 化するにはあまり適當な計算法ではない。

四　線形計畫法の微分方程式解法

第一節に於て述べたように、ブラウン及びノイマンは、anti-symmetric game を一つの聯立微分方程式の形で表わすことができることを證明した。本節では、それを線形計畫法の問題として考えた場合に、方程式の形をどのように改めたらよいか、について考えてみたい。

前節と同一の實例について話を進めることとする。前節に示した anti-symmetric game matrix に於ける maximizer の mixed strategy を第一列から順次に v_1、v_2、v_3、v_4、v_5で表わし、(symmetric であるから minimizer の mixed strategy をとつて考えても、その optimal value は全然同一値をとる)、もとの線形計畫に於ける二財の生産量を表示する二つの變數をそれぞれ x_1、x_2、その dual proplem に於ける內部振替價格を表わす他の二つの變數をそれぞれ u_1、u_2とすれば、これらの間には次のような關係が成立つ。

$$\frac{v_1}{v_5} = u_1 , \quad \frac{v_2}{v_5} = u_2$$

$$\frac{v_3}{v_5} = x_1 , \quad \frac{v_4}{v_5} = x_2$$

ここで、第一節に示した聯立微分方程式を再び記すならば、

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = \varphi(z_1) - \phi(v).\, v_1 \\[2ex] \dfrac{dv_2}{dt} = \varphi(z_2) - \phi(v).\, v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_3}{dt} = \varphi(z_3) - \phi(v).\, v_3 \\ \dfrac{dv_4}{dt} = \varphi(z_4) - \phi(v).\, v_4 \\ \dfrac{dv_5}{dt} = \varphi(z_5) - \phi(v).\, v_5 \end{cases}$$

但し、

$$\varphi(z_i) = \mathrm{Max}\,(0, z_i)$$

$$\begin{cases} z_1 = (3v_3 + 4v_4) - 10v_5 \\ z_2 = (5v_3 + 2v_4) - 10v_5 \\ z_3 = (-3v_1 - 5v_2) + v_5 \\ z_4 = (-4v_1 - 2v_2) + 2v_5 \\ z_5 = (10v_1 + 10v_2) - (v_3 + 2v_4) \end{cases}$$

$$\phi(v) = \Sigma\varphi(z_i)$$

ここへ上記の v と u、x との關係を代入して v_1、v_2、v_3、v_4 を消去するならば、

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} v_5 + \dfrac{dv_5}{dt} u_1 = \varphi(z_1) - \phi(x).\, u_1 v_5 \\ \dfrac{du_2}{dt} v_5 + \dfrac{dv_5}{dt} u_2 = \varphi(z_2) - \phi(x).\, u_2 v_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} v_5 + \dfrac{dv_5}{dt} x_1 = \varphi(z_3) - \phi(x).\,x_1 v_5 \\ \dfrac{dx_2}{dt} v_5 + \dfrac{dv_5}{dt} x_2 = \varphi(z_4) - \phi(x).\,x_2 v_5 \\ \dfrac{dv_5}{dt} = \varphi(z_5) - \phi(x).\,v_5 \end{cases}$$

但し

$$\begin{cases} z_1 = (3x_1 + 4x_2 - 10)\,v_5 \\ z_2 = (5x_1 + 2x_2 - 10)\,v_5 \\ z_3 = (-3u_1 - 5u_2 + 1)\,v_5 \\ z_4 = (-4u_1 - 2u_2 + 2)\,v_5 \\ z_5 = (10u_1 + 10u_2 - x_1 - 2x_2)\,v_5 \end{cases}$$

と書き改められる。

更に右の dv_5 / dt を表わす第五式を整頓して

$$\left\{ \frac{dv_5}{dt} + \phi(x).\,v_5 \right\} = \varphi(z_5)$$

とした上で、残りの四つの式に代入すれば、

$$\frac{du_1}{dt} v_5 = \varphi(z_1) - u_1 . \varphi(z_5)$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{du_2}{dt} v_5 &= \varphi(z_2) - u_2 \cdot \varphi(z_5) \\
\frac{dx_1}{dt} v_5 &= \varphi(z_3) - x_1 \cdot \varphi(z_5) \\
\frac{dx_2}{dt} v_5 &= \varphi(z_4) - x_2 \cdot \varphi'(z_5)
\end{aligned}
\right.
$$

となる。ここで、上記の z_5 を殘りの四個の z_1、z_2、z_3 及び z_4 を以て表わすならば、

$$z_5 = z_1 u_1 - z_2 u_2 - z_3 x_1 - z_4 x_2$$

となり、更に

$$z_1 = (3x_1 + 4x_2 - 10) v_5 = \epsilon_1 v_5$$

$$z_2 = (5x_1 + 2x_2 - 10) v_5 = \epsilon_2 v_5$$

$$z_3 = (-3u_1 - 5u_2 + 1) v_5 = \pi_1 v_5$$

$$z_4 = (-4u_1 - 2u_2 + 2) v_5 = \pi_2 v_5$$

と置くならば、

$$z_5 = -(\epsilon_1 u_1 + \epsilon_2 u_2 + \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2) v_5$$

となるから、この z_1、z_2、z_3、z_4、z_5 を右の四式に代入すれば、

$$
\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= \varphi(\epsilon_1) - u_1 \varphi(-\epsilon_1 u_1 - \epsilon_2 u_2 - \pi_1 x_1 - \pi_2 x_2) \\
\frac{du_2}{dt} &= \varphi(\epsilon_2) - u_2 \cdot \varphi(-\epsilon_1 u_1 - \epsilon_2 u_2 - \pi_1 x_1 - \pi_2 x_2)
\end{aligned}
$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \varphi(\pi_1) - x_1 \cdot \varphi(-\epsilon_1 u_1 - \epsilon_2 u_2 - \pi_1 x_1 - \pi_2 x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \varphi(\pi_2) - x_2 \cdot \varphi(-\epsilon_1 u_1 - \epsilon_2 u_2 - \pi_1 x_1 - \pi_2 x_2) \end{cases}$$

但し

$$\epsilon_1 = 3x_1 + 4x_2 - 10$$

$$\epsilon_2 = 5x_1 + 2x_2 - 10$$

$$\pi_1 = 1 - (3u_1 + 5u_2)$$

$$\pi_2 = 2 - (4u_1 + 2u_2)$$

となつて、總てのゲーム變數vは消去されu_1、u_2、x_1、x_2の四つの線形計畫變數を持つ四個の線形計畫聯立微分方程式に改められる。

ここに新しく定義された四つの從屬變數、ϵ_1、ϵ_2、π_1、π_2こそは、サミュエルソンの市場機構的解釋に於ける、各資源の超過需要、並に各製品別の利益額に外ならない。この新しく書き換えられた線形計畫微分方程式の經濟的意味については、次節に於て更に詳しく説明するであろう。

五　線形計畫の市場模型的解釋

前にも一言觸れておいたように、線形計畫法に對して、市場模型的解釋を最初に與えたのはサミュエルソンであり、それを更に一般化して分權的管理機構の問題としてとらえたのがクープマンスである。

この二人は何れも、線形計畫法がゲームの場合と同樣に duality を持つこと、則ち、生産擔當者の利潤を最大ならしめるところの生産量を決定する、という問題を解くことは、同時に、それに必要な生産要素の管理者がその要素價格の變動過程を通じてその諸要素の賣上金額を最小ならしめる、という問題を解くことに他ならないことを理解していた。また、この dual problems から、生産量と要素價格とを變數とする一つの函數を構成して、この函數の minimax-solution として最大利潤生産量を求めることができること、更にこれを經濟的に解釋するならば、生産量はこの函數の maximizer として働き、要素價格はその minimizer として機能すること、從つて生産擔當者と要素供給者との間に一種の自由交換市場を想定して、その市場均衡點を模索的に求めるならば、それはとりもなおさずこ解を與えることになる、と考えたのである。

然しながら、彼等が證明し得たことは、單に、線形計畫法の解と、その自由交換市場模型の解、則ちその最終均衡點、とが一致すること、だけであつた。例えばクープマンスは次のように言つている。「私はこれらの規約（市場模型に於ける各生産擔當者及び生産要素管理者の行動についての規約）の動學的な面を明確にすることを故意に避けてきた。儲つている生産部門の管理者が一體その注文をどれだけふやすべきであるか、或はまた、供給不足又は供給過剩の狀態にある商品の管理者がその價格をどれだけ上下すべきであるか、については私は何も明示しなかつた。また、一時的不均衡に際して、供給不足の商品をどのように各管理者に割當てるべきであるか、という點についても全く觸れなかつた。然し、吾々の目的がもし、或るnon-optimalな初期狀態から出發して自動的に efficient point を探し當てるような一つの配分模型を設計するということにあるならば、これらの問題は極めて重大な意味をもつ。だが、吾々の現在の目的は、總てのプレヤーがこの規範に從う限り、一旦到達された efficient point は引續き保持される、ということを示しさえすればよいのである。」[1]として、その具體的行動方程式を明示しその收斂條件を論ずるこ

とを避けている。他方サミュエルソンは、これよりも幾らか積極的に、若干の聯立微分方程式を與えている。サミュエルソンは先ず最初に、市場均衡の經濟学的意味から出發して、次の如き簡單な聯立微分方程式を考える。(2)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_1 \pi_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \alpha_2 \pi_2 \\ \dfrac{du_1}{dt} = \beta_1 \epsilon_1 \\ \dfrac{du_2}{dt} = \beta_2 \epsilon_2 \\ x_1, x_2, u_1, u_2 \geqq 0;\ \alpha_1 \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0 \end{cases}$$

則ち、このモデルに於ては、各生産擔當者はその部門利潤に正比例してその生産量を増加させ、各生産要素保管者はその超過需要量に正比例してその價格を引上げる。この聯立微分方程式が收斂性を缺くことは彼自身もこれを認めており、ただ、初期値が均衡値に近い場合には、各數數の時間的平均値をとることによつて、その均衡値を求めることができるであろう、(3)と附記しているけれども、數学的證明を全然與えていないので、その點をもう少し嚴密に説明しておきたい。

右の線形計畫問題に於ける技術マトリックスを一般的に

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

で與え、生產要素の最大供給量をb_1、b_2、生產物の販賣價格をc_1、c_2とするならば、上記の聯立微分方程式の特性方程式は、

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \alpha_1 a_{11} & \alpha_1 a_{21} \\ 0 & \lambda & \alpha_2 a_{12} & \alpha_2 a_{22} \\ -\beta_1 a_{11} & -\beta_1 a_{12} & \lambda & 0 \\ -\beta_2 a_{21} & -\beta_2 a_{22} & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \lambda^4 + (\alpha_1 \beta_1 a_{11}^2 + \alpha_2 \beta_1 a_{12}^2 + \alpha_1 \beta_2 a_{21}^2 + \alpha_2 \beta_2 a_{22}^2)\lambda^2 + (a_{11} a_{12} - a_{12} a_{21})^2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 = 0$$

これを解けば

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}}$$

但し、

$$A = \alpha_1 \beta_1 a_{11}^2 + \alpha_2 \beta_1 a_{12}^2 + \alpha_1 \beta_2 a_{21}^2 + \alpha_2 \beta_2 a_{22}^2$$

$$B = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})^2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2$$

然るにα、βは何れも正であるから、

$$A \geqq 0, \quad B \geqq 0$$

更にまた、

$$A^2 - 4B = (\alpha_1 \beta_1 a_{11}^2 - \alpha_2 \beta_2 a_{22}^2)^2 + (\alpha_2 \beta_1 a_{12}^2 - \alpha_1 \beta_2 a_{21}^2)^2$$
$$+ 2\alpha_1 \alpha_2 (\beta_1 a_{11} a_{12} + \beta_2 a_{21} a_{22})^2 + 2\beta_1 \beta_2 (\alpha_1 a_{11} a_{21} + \alpha_2 a_{12} a_{22})^2 > 0$$

であり、従つて、

$$A^2 \geqq A^2 - 4B > 0$$

$$\therefore\ A \geqq \sqrt{A^2 - 4B}$$

それ故、$A - \sqrt{A^2 - 4B} = C,\ A + \sqrt{A^2 - 4B} = D$ とおけば、

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{-C}{2}} \text{ or } \pm\sqrt{\frac{-D}{2}}\ ;\ C > 0,\ D > 0$$

となる。従つて特性根λは四つの純虚根を持ち、實數部分を含まぬ故に、このサミュエルソンのモデルの各變數は非減衰振動をし、收斂性をもたないことが證明されたことになる。然し、以上の證明過程では各變數x、uの變域についての制約を考慮せずに論議を進めたのであるから、この非負値條件を入れて考えたならば一體どういう結果になるのか改めて考えてみなければならない。

假に、或る正の初期値から出發して非減衰振動を續けるうちに、先ず最初にx_1が零になつたとすれば、それ以後$dx_1/dt > 0$となるまでの期間、x_1はコンスタントに零として扱われなければならないことになり、その際の特性根λは、

$$\begin{vmatrix} \lambda & \alpha_2 a_{12} & \alpha_2 a_{22} \\ -\beta_1 a_{12} & \lambda & 0 \\ -\beta_2 a_{22} & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore\ \lambda^3 + (\alpha_2 \beta_1 a_{12}^2 + \alpha_2 \beta_2 a_{22}^2)\lambda = 0$$

$$\therefore \lambda = 0 \text{ or } \pm\sqrt{-(\alpha_2\beta_1 a_{12}^2 + \alpha_2\beta_2 a_{22}^2)}$$

となる。根號内は必ず負であるから、λは實數部分を持たず、從つて殘りの三變數x_2、u_1、u_2が依然として非減衰振動を續けることになる。他のx_2、u_1、u_2が零となつた場合の特性方程式もまた、それぞれ、

$$\lambda^3 + (\alpha_1\beta_1 a_{11}^2 + \alpha_1\beta_2 a_{21}^2)\lambda = 0$$

$$\lambda^3 + (\alpha_2\beta_2 a_{22}^2 + \alpha_1\beta_2 a_{21}^2)\lambda = 0$$

$$\lambda^3 + (\alpha_1\beta_1 a_{11}^2 + \alpha_2\beta_1 a_{12}^2)\lambda = 0$$

となるから、何れの場合にも收斂性を持たない。

更に二つ以上の變數が零となる場合を考えてみても、非負値條件を附加するだけでは、決してこの聯立微分方程式を收斂させることはできないのであつて、單にそれはその時々の波形を變える效果を持つにすぎないのである。そこでサミュエルソンは、收斂條件を確保するために次のような修正式を提案する。(4)

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = \alpha_1 \epsilon_1 - (-K_{11}\pi_1 x_1 - K_{12}\pi_2 x_2) \\ \dfrac{du_2}{dt} = \alpha_2 \epsilon_2 - (-K_{21}\pi_1 x_1 - K_{22}\pi_2 x_2) \\ \dfrac{dx_1}{dt} = \beta_1 \pi_1 - (M_{11}\epsilon_1 u_1 + M_{12}\epsilon_2 u_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \beta_2 \pi_2 - (M_{21}\epsilon_1 u_1 + M_{22}\epsilon_2 u_2) \\ x_1, x_2, u_1, u_2 \geqq 0,\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0 \end{cases}$$

その經濟的意味は直觀的に明かである。則ち、生産要素が需要超過である場合（$\varepsilon_i > 0$）にはその價格 u_i は引上げられるのであるが、全部の需要者が悉く利潤を得ているときには、（$\pi_1, \pi_2 > 0$）その引上割合を高めることによつて均衡への收斂速度を速め、また、需要者側は製品一個當りの利潤が π_i であるときはそれに比例してその生産量 x_i を増加せしめ從つて諸要素の購入量を増加せしめるのであるが、その際に供給者の側に一般的な供給超過があるときは（$\varepsilon_1, \varepsilon_2 < 0$）、それだけ生産量 x の増加割合を割すことによつて速く收斂させよう、というのがその狙である。

果してこの聯立微分方程式が收斂するかどうかの證明は、彼自身もそれを後日に譲つているし、[6] 筆者の數學的能力もまたこれを解くに充分ではない。その特性方程式は特性根 λ についての四次式となるばかりでなく、その中には α_1、α_2、β_1、β_2、M_{11}、M_{12}、M_{21}、M_{22}、K_{11}、K_{12}、K_{21}、K_{22} の實に十四個の係數を含み、その値が何れも安定條件に影響してくるのであるから、數値計算法によつて解くとしたならば、恐らく一ケ年位の勞力を必要とするのであろう。

そこで、差當つてこの問題は一應未解決のままとして置いて、何か他に完全に收斂するような式はないかどうかを檢討してみることにしたい。

そこで脚光を浴びて登場してくるのが第四節にのべたブラウンとイノマンの聯立微分方程式である。彼等はそれを專らゲーム問題の形で與えたのであつたが、筆者は既にこれを線形計畫法の問題に轉換した形で示して置いた。それを再び掲げるならば、

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \varphi(\varepsilon_1) - \varphi(-\varepsilon_1 u_1 - \varepsilon_2 u_2 - \pi_1 x_1 - \pi_2 x_2)\cdot u_1 \\ \frac{du_2}{dt} &= \varphi(\varepsilon_2) - \varphi(-\varepsilon_1 u_1 - \varepsilon_2 u_2 - \pi_1 x_1 - \pi_2 x_2)\cdot u_2 \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \varphi(\pi_1) - \varphi(-\epsilon_1 u_1 - \epsilon_2 u_2 - \pi_1 x_1 - \pi_2 x_2) \cdot x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \varphi(\pi_2) - \varphi(-\epsilon_1 u_1 - \epsilon_2 u_2 - \pi_1 x_1 - \pi_2 x_2) \cdot x_2 \end{cases}$$

となる。

この第二項の括弧の中を更に書き改めるならば、

$$-(\epsilon_1 u_1 + \epsilon_2 u_2 + \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2) = (b_1 u_1 + b_2 u_2) - (c_1 x_1 + c_2 x_2)$$

となる。この $(c_1 x_1 + c_2 x_2)$ は、線形計畫に於て最大ならしむべき値（總賣出金額）であり、$(b_1 u_1 + b_2 u_2)$ はその dual problem に於て最小ならしむべき値（生產要素總評價額）である。duality の定理により、この兩者の値は均衡點に於ては一致するから、その差引額 $(b_1 u_1 + b_2 u_2) - (c_1 x_1 + c_2 x_2)$ は必然的に零となり、それ以外の點に於ては、正値又は負値をとる。從つてそれは、體系が全體として均衡點から離れている程度を測定する一般的指標であると考えることができる。これは前記のサミュエルソンの式に比べて多くの利點を持つている。第一にそれは、サミュエルソンの場合のように、α、β、M、K等の多數の常數を如何に定めたらよいかという問題で惱まされる心配がないし、また變數u、xの初期値が非負値でありさえすれば、u、xの而後の値も絕對に負とはなり得ないような構造になつている[6]ために、特に非負値條件に氣を配る必要もない。

其他にも種々の形の聯立方程式を考えることができるであろう。[7]その何れを選ぶべきかは、計算の目的と、それに使はれる計算裝置の型とによつて種々異つてくるに違ない。何れにしても、その收斂が速かであると同時に、費用のかからない方式を選び出さなくてはならない。この問題は一種の Servomechanism の design の問題として、別個

に取上げられるべきものと思われるので、ここでは深く立入ることは避けたい。

(1) Koopmans, T. C., "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities," Activity Analysis of Production and Allocation, 1951, Chap. III, p. 94.

(2) Samuelson, P. A., Market Mechanisms and Maximization, 1949, p. 76（彼の取扱つている問題は、必要な栄養を最低費用で確保するには食品の配分を如何にすべきかという所謂 diet problem であり、従つてそれは minimization problem である。それ故、本論文ではこれを一般の maximization problem に飜譯して示してあるので、式の形は原文と多少異つている点に注意されたい。）

(3) Ibid., p. 77, footnote（諸變數の中の一つ以上が零となる場合には、その時間的平均値と正しい解とは必ずしも一致しないであろう。）

(4) Ibid., p. p. 77—78（これも最小問題を最大問題の形に直して示した。）

(5) Ibid., p. 78（次の式を解いてみよう。

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \varphi(3x_1 + 4x_2 - 10) + \varphi(10u_1 + 10u_2 - x_1 - 2x_2) \cdot u_1 \\ \dot{u}_2 = \varphi(5x_1 + 2x_2 - 10) + \varphi(10u_1 + 10u_2 - x_1 - 2x_2) \cdot u_2 \\ \dot{x}_1 = \varphi(1 - 3u_1 - 5u_2) + \varphi(10u_1 + 10u_2 - x_1 - 2x_2) \cdot x_1 \\ \dot{x}_2 = \varphi(1 - 4u_1 - 2u_2) + \varphi(10u_1 + 10u_2 - x_1 - 2x_2) \cdot x_2 \end{cases}$$

先ず、四變數の初期値を何れも1と置けば、

$$\varphi(\epsilon_1) = \varphi(-3) = 0,\ \varphi(\epsilon_2) = \varphi(-3) = 0$$

$$\varphi(\pi_1) = \varphi(-7) = 0,\ \varphi(\pi_2) = \varphi(-4) = 0$$

$$\varphi(10n_1 + 10u_2 - x_1 - 2x_2) = \varphi(17) = 17$$

故に ϵ_1, ϵ_2, π_1, $\pi_2 < 0$ なる期間中は、右の聯立方程式の中から $\varphi(\epsilon)$, $\varphi(\pi)$ を除くことができる、則ち、

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1(x_1 + 2x_2 - 10u_1 - 10u_2) \\ \dot{u}_2 = u_2(x_1 + 2x_2 - 10u_1 - 10u_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1 + 2x_2 - 10u_1 - 10u_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(x_1 + 2x_2 - 10u_1 - 10u_2) \end{cases}$$

この四式は同形であり且つ初期値を等しくするから、$u_1 = u_2 = x_1 = x_2$ と置けば

$$\dot{u}_1 = -17u_1^2$$

$$\therefore \int u_1^{-2}\,du_1 = 17\int dt$$

$$\therefore -\frac{1}{u_1} = -(17t+C)$$

初期條件 $u_1(0)=1$ を入れれば $C=1$ となる故

$$u_1 = \frac{1}{17t+1} = u_2 = x_1 = x_2$$

則ち各變數何れも時間の經過につれて1から0に近附く。然しその途中で $\in$, π が零となればその動き方は變らなければならない。それらが0となる時点 y を求めると、

$$\in_1 = 7y - 10,\ \in_2 = 7y - 10,\ \pi_1 = 1 - 8y,\ \pi_2 = 2 - 6y$$

$$10u_1 + 10u_2 - x_1 - 2x_2 = 17y$$

故に $y = {}^1/_3$ 則ち $t = {}^2/_{17}$ の時点（$u_1, u_2, x_1, x_2 = {}^1/_3$）で先ず π_2 が零となる。從つてそれ以後に於ては

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1(x_1 + 2x_2 - 10u_1 - 10u_2) \\ \dot{u}_2 = u_2(x_1 + 2x_2 - 10u_1 - 10u_2) \\ \dot{x}_1 = x_1(x_1 + 2x_2 - 10u_1 - 10u_2) \\ \dot{x}_2 = 2 - (4u_1 + 2u_2) + x_2(x_1 + 2x_2 - 10u_1 - 10u_2). \end{cases}$$

となる。u_1, u_2, x_1 は t に關して全く同形であるから、$u_1 = u_2 = x_1$ とおけば、

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1(2x_2 - 19u_1) = \dot{u}_2 = \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 = 2 - 6u_1 + x_2(2x_2 - 19u_1) \end{cases}$$

第一式をもう一度微分した上で第二式を代入すれば

$$\ddot{u}_1 - 2\frac{\dot{u}_1^2}{u_1} + 12u_1^2 - 4u_1 = 0$$

この非線形方程式は、直接積分はできないけれども、Liénard Method によつて圖解積分することができる。斯くして得られた $x_2(t)$, $x_1(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ から再び π、ε の符號が變る時点を求めて同様の計算を繰り返せばよい。）

(6) 右邊第一項は必ず非負であるし、また第二項の $\varphi(\sigma)$ は非負、従つて $-\varphi(\sigma)$ は負であるけれども、$x=0$ となれば第二項全体が零となつてしまうので、それ以後は du_1/dt は負値をとり得ない、従つて初期値が正である以上、その將來の値もまた必ず正又は零となる。

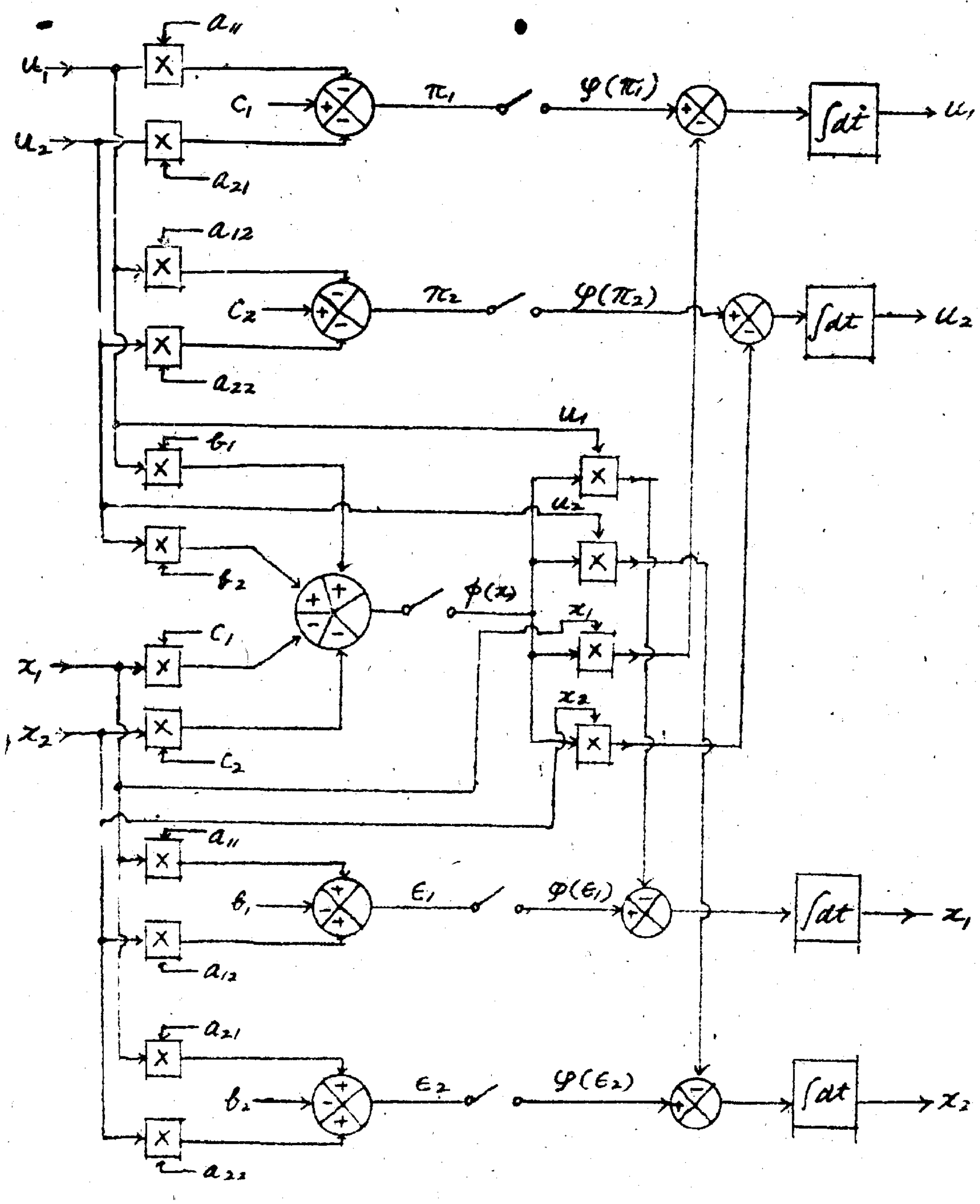
(7) 例えば、次の如き方程式を考えることもできる。

$$\dot{u}_1 = \alpha_1 \epsilon_1 + \lambda_1 \dot{\epsilon}_1$$
$$\dot{u}_2 = \alpha_2 \epsilon_2 + \lambda_2 \dot{\epsilon}_2$$
$$\dot{x}_1 = \beta_1 \pi_1 + \mu_1 \dot{\pi}_1$$
$$\dot{x}_2 = \beta_2 \pi_2 + \mu_2 \dot{\pi}_2$$

六、Analog Computer による解法

ブラウン及びノイマンの聯立微分方課式は、現實の線形計畫問題を解く手段として直接に役立つものではない。この非線形微分方程式を直接解くことは、不可能ではないにしても、非常に困難である。

そこで考えられる計算法としては、前にも簡單に觸れて置いたように、定差方程式によつて逐次的に解くか、または、この方程式と等價な Analog Computer[1] を使つて解くか、二つの方法しかないであろう。定差方程式による近似解法では、誤差を少くしようとすれば時間間隔を短くとらねばならず、従つて計算回數が多くなつて手に負えなくなる心配がある。筆者がある實例について計算した場合でも、收斂速度は極めて緩漫であつた。Electro-Analog で



あれば速度の點は問題にならない。選擇の基準は主として製作原價の高低に置かれることになる。

ブラウン・ノイマン式に等價な Analog Computer の概念圖を描くならば、左の如くなるであろう。

これを機械的に解くことも可能であるが、費用の點では電子管回路が一番安價につくので、以下に於ては Electronic Analog Computer について考

えてみたい。

積分回路、常數乘算回路、加算回路は、抵抗、コンデンサー、増幅器の組合せによつて容易に作製することができる。[2]困難なのは變數乘算回路と負電壓遮斷回路とである。變數間の掛け算には種々の方法があるが、何れも精度が悪く、ブラウン管を使う爲に回路が複雑化する。筆者の素人考えであるが、若し完全に直線的な特性曲線を持つ三極管又はトランジスターが手に入るならば、掛けらるべき二數をそれぞれグリッド電壓、プレート電壓として入れることにより、二變數の積をプレート電力として取出すことができるであろう。

負電壓遮斷装置としてはトランジスター或は通常の三極管を使えばよいが、何れもやはりその特性曲線が完全に直線的でなくてはならない。則ち、その動作點をプレート電流零の座標上に來るようにグリッドバイアスを調整するならば、一種のB級増幅を行うことになつて、グリッド電壓の正値部分に對してはプレート電流を、負値部分に對しては常に零のプレート電流を導くことができるであろう。サイラトロンとリレーの組合せによる方法は、その比例性及び遮斷性の點では完全であつても、動作時間を多く要するので面白くない。また、積算の場合と同様に、ブラウン管と光電管との組合せによつて負電壓を遮斷することも可能であるが、やはり費用と精度の點が問題であろう。

筆者はまだこの Analog Computer の問題について充分な勉强をしたわけではなく、言はば素人の空想の域を出ないのであるから、今後更に充分な研究を積んだ上で、出來るだけ安價で而も精度の高い Programming Analog Computer を考案したいと考えている次第である。アメリカ合衆國では、例の大仕掛けな digital electronic computer を線形計畫法に適するように改造したもの (the "Scoop Machine") を設計中であるとのことであるが。[4]それと併行して、このような簡易計算装置を作成するのも決して無意味なことではなく、それはそれなりの存在意義を持つものと信ずる。

1 Korn and Korn, Electronic Analog Computers, 1952.（景氣變動モデルへの應用としては、Smith and Erdley, "An Electronic Analogue for an Economic System," Electrical Engineering, April 1952, p.p. 362—36.）

2 Pickens, D. H., "Electronic nalog Computer Fundamentals," Review of Scientific Instruments, Dec. 1951.

3 野村民也「電子管式微分解析機」生產研究、昭和廿七年四月、頁二六—二七。

4 Wood, M. K., "Research Program of Project Scoop." Symposium on Linear Inequalities and Programming, 1952, p. 13.

（終）