環　の　根　基

武　隈　良　一

環に於ける根基の新しい研究が1942年 S.Perlis(55)[*] によつて始められN. Jacobson(31) によつて一應大成されて以來今日では非結合環の場合は勿論のことその他の代數系に於ても根基の研究が華々しく展開されている。それらの現狀に就て述べようとするのが筆者の意圖であるが，今は環の場合に限つて根基の研究を述べておく。環以外の場合に就ては後日に之を約する。

§ 1. 根基の古典的定義と最近の定義

有限個の底を有する代數（algebra）又はもつと一般に降鎖律（d.c.c.）を滿足する環の根基は，始め極大巾零兩側いでやるとして定義され（例えば Albert (1) 23頁定理 7 を見よ），これはすべての巾零左，右，兩側いでやるを含むものである。van der Waerden はその著書 (61) 143 頁に於てこれを一寸變形して，根量（Wurzelgroesse, 巾零兩側いでやるを生成する元）の全體

* 括弧内の番號は後掲文献の番號を示す。

を根基と定義したがこれはやはりすべての巾零右，左いでやるを含むものである。

Koethe (40) は根基の定義を擴張して，すべての片側巾零元いでやる (Nilideal) を含む極大兩側巾零元いでやるを以て根基と名付けたが，これはすべての巾零いでやるの合併になることが證明される。(Deuring, (18) 11頁)

以上は根基の定義の濫觴であるがこの外にも定義の仕方が幾通りもあつて一般には古典的定義は次の三つに分類される。

1. すべての巾零右（左）いでやるの合併
2. 適當に選ばれた極大いでやるの積
3. すべの固有の巾零元の集合

第一のものは今述べたものでこれは在來最も多く用いられたものである。第二のものは環が單位元を有するとき甚だ便利であり今日でもこの定義によることが多い。根基をすべての左（右）極大いでやるの積として定義することは Jacobson の著書 (30) 66頁定理18に詳しいが，この定義は I. E Segal (58) (59) も局所こむぱくと群に於て用いている。第三のものは I. Gelfand (20) による單位元を有する可換複素 Banach 代數に於て用いられた。彼は根基を一般巾零元 (generalized nilpotent element) の集合として定義し，それがすべての極大いでやるの積に等しいことを證明した。

然し以上三通りの定義は環に於ける有限性の假定を除去するとき同値になるかどうかは分らない。

さて古典的定義から新しく一歩を踏み出したのは實に 1942 年に於ける Perlis (55) である。彼は單位元を有する有限次代數の根基は，g+h がすべての正則な (regular) g に對して正則になる如き h の全體であることを證明した。そして單位元を有しない代數に對しては準正則元 (puasi-regular element) の概念を導入し，すべての準正則元 x とすべてのすかーらーαに對して x+αr が準正則になるときそしてそのときに限り r は根基の元であることを證明した。そしてついでながら M. Hall (24) によつて研究された有界代數 (bounded algebra) にこれを應用したのである。

翌年1943年に R. Baer(6) は右準正則元のみを含む右いでやるを生成する元Zの全體は右いでやるになることがすべての環に就て成立することを證明した。また同年に M. Zorn と E. Hille((25), 475頁) は Perlis に刺激されて，根基に關する Gelfand の研究を單位元を有する非可換代數の場合に擴張した。即ち固有準巾零元 (properly quasi-nilpotent element) を定義してこれの全體を根基と名付けた。これはやはり兩側いでやるでありすべての左 (右) 極大いでやるの積に等しいのである。

最後に1944年に Jacobson(31) は Zorn と Hille の結果を知らずにPerlis の理論を大成したのである。これを次節以下に述べよう。

§ 2. Jacobson による根基の定義

Jacobson によれば先ず環Rの根基に於ては次の二つの重要な性質が成立しているという。

(1) 根基Nは兩側いでやるでR－Nが半單純 (即ち根基が0) である。

(2) d. c. c. が成立する半單純環の構造は既に明らかにされている。

從て根基の定義を如何に擴張しようとも，これらの二性質に抵觸しないようにしなければならない。それ故この見地から眺めるとBae(r6)及びLevitzki (41) (42) による巾零元いでやるの研究は半單純環の構造論へと導かれないので，巾零元いでやるの概念を用いて根基を定義することは放棄しなければならないという。〔但しこれらの人々による研究は他の觀點からはまた意義深きものであり，一外に捨て去らるべきものではない。Hopkins (27), Brauer(10), Levitzki (43), (44), (45)〕

かく述べた後に Jacobson はこれよりも Perlis (55) の準正則を用いた根基の定義，單位元を有する代數に對する Jacobson(30), Birkhoff(7), Segal (59)等による極大左 (右) いでやるの積としての根基の定義の方がより適切であると述べている。なおこの準正則の概念は Kaplausky(34) によつても後に用いられた。以下 Jacobson (31) の根基の定義に就て述べよう。(定義及び定理の番號は(31)のものと同じ。)

定義1. 環Rの元Zに對して

$$Z+Z'+ZZ'=0$$

を満足するZ′が存在するならば，Zを右準正則元といい，Z′をZの右準逆元という。

もしRが單位元1を有するならば，Zが右準正則元であることと，1+Zが右逆元1+Z′を有することとは同値である。

またRの元をZとしXがR全體を動くとき，元X+ZXの全體{X+ZX}は右いでやるをなすがこのことを用いると次の如くにも定義される。

定義1a. Rの元Zが右準正則元であるとは{X+ZX}がRに一致することである。

次に右いでやるIのすべての元が右準正則であるとき，Iはは準正則いでやるであるということにすれば，二つの準正則右いでやるの和はまた準正則右いでやるになることが容易に證明される。

今NをRのすべての準正則右いでやるの合併とすれば，Nは勿論右いでやるであるがその上に兩側いでやるであることが證明され次の定理が得られる。

定理1. Rを任意の環とするときRのすべての準正則右いでやるの合併Nは（右）準正則兩側いでやるである。

定義2. 環の根基Nとはすべての準正則右いでやるの合併をいう。（これを今後J根基とよぶことにする。）

注意。Nはzi+zaが，すべての整數iとRのすべての元aに對して，右準正則元になる如き元zの集合である。それ故Rが1を有するときは1+zaが右逆元を有する如き元zの全體がNであるともいえる。

以上の議論は左についても成立し，左根基N′が導かれる。右及び左準正則のときには單に準正則という。

補題1. Zが準正則元ならばZの右（左）準逆元Z′は左（右）準逆元ともなりこのZ′は一意的に決定してZと交換可能になる。

このZ′のことをZの準逆元という。

さて環に於てはNとN′とは一致することが證明され次の定理が成立する。

定理 2. 環RのJ根基はRのすべての準正則左いでやるの合併である。

なおNの元は補題 1 により準正則である。

§ 3. J根基の性質

環RがJ根基Nに等しいときJ根基環といい，N=0 なるときRは Jacobson の意味で半單純（略してJ半單純）という。然るとき次の定理が成立する。

定理 1. （(31) 304頁，定理4.）NがRのJ根基ならば，$\bar{R}=R-N$は J半單純である。

定理 2. （同上．定理5.）J根基は環のすべての巾零元右（左）いでやるを含む。

系.（同上．系） $RzR \leqq N$ なる如き元zはNに含まれる。

この系を用いるとzがNの元であるための完全條件（必要にして且つ十分なる條件）はza(az)がRに於けるすべてのaに對して右（左）準正則であることになる。即ちかくの如きzの全體がNということになる。なおこの定義に於てはRに必ずしも單位元が存在しておらなくともよろしい。

さてまたJ根基の元は必ずしも巾零である必要はない。（それ故J根基は古典的根基よりも擴張されている。）例えばRをp進整數の環とすればN=pRとなるがRの元はもともと全部巾零ではないのである。

定理 3. （同上．305頁定理6.）Nの部分環をMとし，Mの元をzとすれば適當な正整數hに對して

$$z^{h-1}M > z^{h}M \quad 又は \quad z^{h}=0$$

となる。

注意。　これによるとJ根基は0ならざる巾等元を含まないことになる。

定理 4. （同上．306頁定理9.）Rに於ける右（左）いでやるに對して降鎖律が成立するときはRのJ根基Nは巾零になる。

この定理と定理 2 によれば，J根基の巾零元いでやるはすべて巾零になり，J根基Nはすべての巾零いでやるの合併として定義される古典的根基と一致することになる。即ち降鎖律が成立するときJ根基は古典的根基となる。

次にJ根基Nに含まれる右いでやるMに對しては次の定理が成立する。

定理5.（同上. 定理10）J根基Nに含まれる右いでやるMが有限底を有するならば，$MN<M$か又は$M=0$である。

この定理は後に東屋氏(5) 中山教授(51) によつてもつと一般な立場から論ぜられた。

以上はJ根基の簡單な性質であるが，これと古典的定義の第二種即ち極大いでやるの積としての根基との關係を明らかにした Jacobson の研究をさらに概説しておこう。

まずIをRのいでやるとする。Rの元をaとするときaによつて定められる右乘法$x\to xa$ は $M=R-I$ に於ける自己準同型$\bar{a}$をひきおこす。即ち寫像$\bar{a}$は類$x+I$を$xa+I$にうつす。この$\bar{a}$なる元の全體はMの自己準同型環の部分環$\bar{R}$をなし，$a\to\bar{a}$なる對應はRと$\bar{R}$との間の準同型である。そしてこの準同型の核は兩側いでやる$(I:R)$であつてこれをRに關するIの商という。明らかに$R(I:R)\leqq I$にしてRが1を有するならば$(I:R)$はIに含まれるRの最大兩側いでやるである。そして$\bar{R}\cong R-(I:R)$が成立する。

Iが極大ならばMは$\bar{R}$に關して既約即ち極小加群になる。これにより自己同型環$\bar{R}$に於て振舞う群Mが既約ならば，$\bar{R}$は既約であるということに定義すれば次の定理が得られる。

定理6.（同上. 310頁定理17）準同型の既約環はJ半單純である。

これより次の重要な系が得られる。

系.（同上. 系）Iが極大右いでやるならば$(I:R)$はRのJ根基Nを含む。

次に Zorn の極大原理を用いて次の補題が證明される。

補題1.（同上. 補題3）aをRの右準正則元でないとすれば，右いでやる$\{x+ax\}$を極大右いでやるに含ましめることが出來る。

これを用いて次の諸定理と系が得られる。

定理7.（同上. 311頁定理18）Rが極大右いでやるを含む環で，ΠIがこれらの極大右いでやるの積ならば，$\Pi I\leqq N$にしてまた$RN\leqq\Pi I$である。

系1.（同上系1）RがJ根基環でなく，ΠIがRの極大右いでやるの積ならば，ΠI<N にして RN≦ΠI である。

系2.（同上.系2）Rが單位元を有する環ならば，RのJ根基はRの極大右いでやるの積である。

定理7からは，Rが極大右いでやるを含むならばΠI は兩側いでやるになることが導かれる。

そこで結論として次の定理が得られる。

定理8.（同上.312頁定理20）Rを極大右いでやるを含む環とすれば，RのJ根基は積 Π(I:R)であつて，こゝにIはRのすべての極大右いでやるを動くものとする。

系.（同上.系）RがJ根基環でないならば，Nは積Π(I:R)である。こゝにIはRのすべての極大右いでやるを動くものとする。

以上の結果は左いでやるに對しても成立する。定理7の系2から得られる興味深い結果は，Rが單位元を有するときRの極大右いでやるの積と極大左いでやるの積とが一致することである。

Jacobson は更に進んで原始環（primitive ring）の研究を行つたが，これは古典的場合に於ける單純環に相當するものである。

定義.（同上.312頁定義）商（I:R）が0になる如き極大右いでやるIをRが含むときRを原始環という。

この定義によれば R/(I:R) は明らかに原始環なるを以て定理8は次の如く言換えられる。

定理9.（(11)46頁序）RのJ根基は，R/B が原始的なる如き，Rの兩側いでやるBの集合の積である。

原始環に就て詳說する余裕はないが次に結果だけを掲げておこう。

定理10.（(31)312頁定理21）Rが原始環なるための完全條件はRが準同型既約環に同型であることである。

定理11.（同上.314頁 定理24系）右いでやるに對して降鎖律を滿足する原始環は單純である。

最後にJ半單純環の構造を述べておこう。

定理12. (同上. 定理25) RがJ半單純ならば, R−B が原始的で, $\Pi B=0$ なる如き兩側いでやるBをRが含む。

定理13. (同上 定理26) J半單純環に於けるいでやるはJ半單純である。

定理14. (同上. 315頁定理28) RがJ半單純なるための完全條件はRが完全直和 (complete direct sum) の部分環に同型になることである。こゝに部分環の成分は原始的とする。

このJacobson の結果は Wedderburn-Artin の定理 (次の定理15) を一般化したものになつている。というのはこの定理と定理11とから次のW−Aの定理が得られるからである。

定理15, (同上315頁定理27) 右いでやるに對して降鎖律が成立するとき, (古典的) 半單純環は單純環の有限個の直和に同型になる。

§ 4. Brown 及び McCoy による根基の定義

J根基をさらに擴張したのは Brown と McCoy (11)(12))(13)(47) である。

環Rの任意の元をaとし右いでやる $\{ax-x\}$ を考える。こゝにxはRのすべての元を動くものとする。然るときRの元bがJ根基の元なるための完全條件は, bによつて生成される右いでやるのすべての元aに對して, $a\in\{ax-x\}$ が成立することである。(§2定義1a, 定義2の注意參照)

これを擴張するのであるが, 今G(a)を右いでやる $\{ax-x\}$ によつて生成されたRの兩側いでやるとする, 即ち

$$G(a)=\{ax-x+\sum y_i a z_i-\sum y_i z_i\}$$

とおく。こゝにx_i, y_i, z_i はRの元であり和は有限個とする。

これを用いて Brown—McCoyの根基(簡單のために以下BM根基とかく) は次の如く定義される。Rの元bがBM根基の元なるための完全條件は, bによつて生成される兩側いでやるのすべての元aに對して, $a\in G(a)$が成立することである。((11) 51頁定義)。

この定義によればBM根基はＪ根基を含むことになる。然し直に分るようにRが可換環であつたり，又後に述べるように右いでやるに對して降鎖律が成立するとき兩者は等しいのである。

またRがBM根基を有しないときBM半單純といゝ，RがそのBM根基と一致するときBM根基環ということにする。

これより次の諸結果が得られている。

定理1.（(11)51頁定理6系）單純環は單位元を有するときBM半單純であり，然らざるときBM根基環になる。

定理2.（同上定理7）環RのBM根基は，R/Mが單位元を有する單純環になる如き，Rのすべての兩側いでやるMの積である。

系1.（同上.系1）RがBM根基環でないならばRの根基は，R/Mが單位元を有する如き，Rのすべての極大兩側いでやるMの積である。

系2.（同上.系2）Rが一元のみの環ではなく又單位元を有するならば，RのBM根基はRに於けるすべての極大兩側いでやるの積である。

定理3.（同上.52頁定理8）RがBM半單純であるための完全條件は，それが單位元を有する單純環の部分直和（subdirect sum）に同型であることである。

定理4.（同上定理9）兩側いでやるに對して降鎖律が成立すれば，BM半單純環Rは單位元を有する單純環の有限個の全直和（full direct sum）に同型である。

定理5.（同上定理10）Rの右いでやるが降鎖律を滿足すれば，RのBM根基とＪ根基とは一致する。

さてBrown及びMcCoyはさらに進んでF根基なるものを導入した。以下これに就て述べよう。

環RをRに於ける兩側いでやるの集合のなかへうつす寫像$a \to F(a)$を考える。そしてこの寫像に於ては，今$a \to \bar{a}$を環Rを環$\bar{R}$の上にうつす準同型としこれによつてRの兩側いでやる$F(a)$が像$\overline{F(a)}$に寫されるとき，つねに$F(\bar{a})$

$=\overline{F(a)}$が成立するものとする。かくの如き寫像Fを先ず考えて，Rの元aに對して$a \in F(a)$が成立するときそしてこのときに限り，元aはF正則であるという。次にRの兩側いでやるの各元がF正則なるときそしてこのときに限り兩側いでやるはF正則であるという。

$G(a)$に於ては勿論$G(\bar{a})=\overline{G(a)}$が成立するので結局F正則は$a \in G(a)$の一般化になつていることが分る。

定義（同上49頁定義）RのF根基N_Fとは，Rに於けるF正則兩側いでやる(b)を生成する元bの集合をいう。$N_F=R$なるときRをF根基環という。

次の定理はF根基を特徴づけるものである。

定理6.（同上.定理1）環RのF根基N_Fは，R/Mが部分直的既約(subdirectly irreducible)にしてもはやF根基を有しないような，Rに於ける兩側いでやるMの積に等しい。

こゝにいう部分直的既約環とはBirkhoff(8)によつて導入された概念であり，環R_iの部分直和であるRのすべての同型表現に於て，RをR_iの上へうつす自然準同型が或るiに對して同型になつているものをいう。((11) 48頁)

定理7.（同上.50頁定理2）環R/N_FはF根基を有しない。

定理8.（同上.定理4）環がF根基を有しないための完全條件は，それがF根基を有しない部分直的既約環の部分直和に同型になることである。

さてBM根基はF根基の特別の場合であるが，これに就ては次の最も重要な定理が成立する。

定理9.（同上.51頁定理6）部分直的既約環がBM半單純なるための完全條件は，それが單位元を有する單純環なることである。

本節の定理1は實はこの定理の系として得られるものであり，また定理2は定理6と定理9とから直に得られるのである。

§5. Mc Coyによる根基の定義

Mc Coy(48)は非可換環に於ける素いでやるの研究から根基の新しい定義を與えたが今それに就て述べよう。以下いでやるは特に斷わらざる限り兩側い

でやるを表すものとす。

先ず非可換環に於ても十分役割を果すために素いでやるの定義を次の如く擴張する。

定義1. ((48)823頁序) 環Rのいでやるを A, B, P とするとき P が素いでやるであるとは，AB≡0(P) なるとき A≡0(P) か又は B≡0(P) が成立すること，そしてこのときに限る。

この定義と同値なものが數個與えられているがそのうち一つ丈を述べよう。

定理1. (同上. 825頁定理1) 環Rのいでやる P が素いでやるなるための完全條件は，aRb≡0 (P) なるときa≡0(P)又はb≡0(P) が成立することである

これより次の定義が示唆される。

定義2. (同上. 826頁定義2) Rの集合Mがm系であるというのは，Mの元 c, d に對して cxd が M に屬する如き R の元 x が存在すること，そしてこのときに限る。又空集合は m 系と考える。

この定義の重要さは次の點に存する。即ち定理1により P が R の素いでやるになるのは，R に於ける P の補集合 C(P) がm系になるときでありそしてこのときに限る。かく素いでやるを特徴化することによつて以下の議論を圓滑ならしめている。

定義3. (同上.827頁定義3) いでやるAの根基とは，rを含んでいるすべてのm系が A の一つの元を含んでいるような，R の元 r の全體からなるものをいう。(この根基を今後M根基とよぶことにする。)

定義. (同上. 定義4) A≦Pにして且つA≦P'<Pなる如き素いでやるP'が存在しないときそしてこのときに限り，素いでやる P はいでやる A に屬する極小素いでやるという。

定理2. (同上. 定理2) いでやる A の M 根基は A に屬する極小素いでやる全部の積である。

さていでやる A の M 根基を在來のものと比較すると先ず Fitting の根基に含まれていることが分る。Fitting(19) はいでやる A の根基を巾零元いでや

る modulo A を生成する元の集合として定義した。A の M 根基と Fitting の根基（Fi 根基と略稱する）との關係は未解決であると Mc Coy はいつたが後に Levitzki(45) によつてこれは明らかにされた。即ち M 根基は l 根基であり，u根基は F_i 根基なのである（l 根基，u 根基に就ては後述）。

なお環Rの Fitting の意味での根基とは，巾零元いでやるを生成する元（これを固有巾零元という）のすべてからなる集合をいう。

定義 5.（同上. 829頁定義5）環 R の M 根基 N とは R に於ける 0 いでやるの M 根基のことをいう。

この M 根基 N が巾零元いでやるなることは簡單に證明できる。

定理 3.（同上. 定理3）右いでやるに對して降鎖律が成立すれば N は R の古典的根基に一致する。

定理 4.（同上830頁定理4）BがRに於けるいでやるならば，B の M 根基は BとNとの積である。

定理 5.（同上定理5）NがRのM根基ならば，R/NはM根基を有さない。

この定理によりR/Nは 0 でない巾零いでやる（右，左，兩側）をもたないことになる。というのはR/Nのすべての巾零いでやるは R/N のM根基に含まれるからである。してみれば N は Baer(6) の意味での根基いでやる（略してB根基いでやる）となる。環Rに於けるB根基いでやるAとは，先ずAは巾零元いでやるにしてR/Aが 0 ならざる巾零いでやるを含まないものをいう。

Baer は更にすべての根基いでやるの積と合併とをそれぞれ R の下限根基（l 根基），上限根基（u根基）と名付けた。このu根基は上に述べた F_i 根基になる。

次に Mc Coy は M根基 N は Koethe(40) の意味での根基，Levitzki(41)(43)の意味での根基と關係がありそうだが不明であると述べている。然しこれは後に Levitzki(45)によつてM根基は l 根基に等しいと解決された。こゝにいう Koethe の意味での根基（略してK根基）とは §1 に於て述べたように，すべての片側巾零元いでやるを含むものである。又 Levitzkiの根基（略してL根基）とは次のものをいう。環Rの右，又は左，又は兩側いでやるの有限個の元

によつてすべての部分環が生成されるならば，それらの各いでやるは半巾零であるという。そしてRのL根基とはすべての半巾零いでやるの和のことをいう。

Jacobson(32)によつて定義された原始いでやるとは，環Rに於けるいでやるAがRに一致せずにR－Aが原始環になるものをいう。この原始いでやるは素いでやるなるを以てM根基NはRのJ根基に含まれることになる。ついでながら(32)に於ける方法でそのまゝ素いでやるの集合に位相を導入することが出來る。

またBM根基は或種の素いでやるの集合，即ちR/Mが單位元を有する如き極大いでやるの集合，の積になつている。

定義 6. (同上. 定義6) 環Rが素環であるというのは(0)がRに於ける素いでやるになりそしてそのときに限る。

これより可換素環が整域であることは見易い。單純環Sが $S^2 \neq 0$ ならば素環であり，原始環は Jacobson(31) によれば素環である。

素環はM根基を有さないので右いでやるに對して降鎖律が成立すれば單純環の有限個の和の直和に同型になる。然し二つ又は二つ以上の單純環の直和は確かに素環ではない。從て右いでやるに對して降鎖律が成立していれば素環と單純環（但し平方して0でない）との概念は一致する。

Pを環Rに於ける素いでやるとすればR/Pは素環にして逆も成立する。M根基NはRに於けるすべての素いでやるの積なるを以て(定義5)，Wedderburn—Artinの定理に類似の次のものが得られる。

定理 6. (同上831頁 定理6) 環が素環の部分直和に同型なるための完全條件はそれがM根基を有しないことである。

これは一般構造理論に於ける素環の重要性を示すものである。從て素環の研究が續けられることが望ましい。

最後に素環と原始環との關係を示す定理を述べておく。

定理 7. (同上. 定理7) 極小右いでやるを含む素環は原始環である。

然し素環と原始環との概念は一致しない。何んとなれば整域は素環である

が，整域が原始環であるのはそれが體であるときでありそしてそのときに限る。

§ 6.　正則環と弱正則環

正則環 (regular ring) とは von Neumann (52) によつて始めて定義されたもので，環Rの零ならざる元aに對して，$axa=a$ を滿足する零ならざる元xがつねにRに存在するとき，このRを正則環という。

この定義と同値の條件として von Neumannは，aより生成された主右いでやる $(a)_r$ と巾等元eより生成された主右いでやる $(e)_r$ とが等しい，即ち $(a)_r=(e)_r$ なる條件を導いた。

正則環の實例は數多くあるが，無限次線型空間に於けるすべての線型變換のなす環などはその一例である。(Johnson and Kiokemeister(33))

さて正則環の逆として1948年に Segal が Kaplansky(35) に語つたものがある。即ちRの元 $a(\neq 0)$ に對して，$xax=x$ を滿足する $x(\neq 0)$ が存在するとき，このRを弱正則環 (weakly regular ring) というのである。

弱とつけたのは弱正則環は正則環をゆるめたものになつているからである。というのはこの定義と同値の條件として，0ならざる右いでやるは0ならざる巾等元を含むという條件が得られていて，右いでやるは主右いでやるを含むから前の等値條件が成立すれば後の等値條件が必ず成立するからである。

正則環と弱正則環の今述べた等値條件は同年に東屋氏((3),定理3) によつても考えられていた。

弱正則環の實例としては，今Xを全非連結こむぱくとH空間とするとき，Xの上のすべての複素連續函數の代數C(X)に於て，もしXが無限ならばC(X)は無限弱正則 Banach代數となる。他の例としては，こむぱくと群の群代數はつねに弱正則である。この二例は Kaplansky が筆者に直接知らせてくれたものである。(1951年5月9日附書簡による)。

さて Neumann は降鎖律があれば環の正則性 (regularity) と古典的半單純とは一致することを證明し，Kaplansky は同じく降鎖律があれば弱正則性 (weak regularity) と古典的半單純とは一致することを證明した。こうして

見れば正則性も弱正則性も古典的半單純の擴張になつている。

有限性の假定のない環に於ては正則性は古典的半單純の一般化であり，Neumann の連續幾何学に於てはこれは非常に有用であつたが，Kaplanskyによると Banach代數（これに就ては次節に於て述べる）に於ては正則性は余りにも峻嚴 (too severe) でありこれよりも Jacobson の意味での半單純がより有用であるという。これはJ半單純は正則性よりも弱い條件であることを意味するものであるが，實際正則環がJ半單純であることは既に證明されている。(Jacobson(31)305頁定理8)。

これと同様に弱正則環がやはりJ半單純であることが，環が單位元を有するとき計算によつて證明されるが，これは筆者(60)の一寸した注意である。このことは單位元が存在しない場合でも，J 根基は巾等元を有しないこと（§3定理3注意）から直に導かれる。というのは弱正則環のいでやるはつねにeを含んでいるからである。

次に弱正則環はJ半單純ではあるが，必ずしもBM半單純ではないことが富永(60)によつて注意された。その例として先ず可附番無限個の底$x_1, x_2, \cdots\cdots$を有する體Kの上の vector 空間の線型變換のなす環をAとすれば，Aは列有限な無限次行列環$\bar{A}$に同型である。この$\bar{A}$の元で次の形

$$A=\begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

を有する行列のなす$\bar{A}$の部分環を$\bar{B}$とする。こゝにSは任意の有限次正方行列を表わす。

然るとき$\bar{B}$に對するAの部分環は明らかに單純であり，又稠密 (Jacobson の意味での dense) にして，弱正則である。この三つのことを$\bar{B}$に就て證明することが出來るのであるが，一方$\bar{B}$は單位元を有しないから§4の定理1によりBM根基環である。以上により弱正則でしかもBM根基環になるものが見つかつたことになる。

これより進んで正則環ではあるが必ずしもBM半單純でない例をもあげることが出來る。今$\varDelta$を可附番個の底を有するP加群（Pは可除環）のP自己準同

型環とすれば，これは Johnson—Kiokemeister により正則環である。そして Δは唯一つの固有兩側いでやるを有するので部分直的既約になる。然るに §4定理9により，部分直的既約環がBM半單純になるための完全條件は單位元を有する兩側單純環になることであるのに，Δ は兩側單純ではないから ΔはBM半單純にならない。以上により弱正則でしかもBM根基環になるものが見つかつたことになる。

なお§4定理1によれば，單位元を有しない單純環はBM半單純にならないから，これは古典的半單純でありながらBM根基環になる例となる。

以上を整頓すれば，古典的半單純ならば正則性，正則性ならば弱正則性，弱正則性ならばJ半單純が成立する。然し古典的半單純，又は正則性，又は弱正則性であつても必ずしもBM半單純にならないことが分る。なお弱正則環が必ずしもBM半單純でない例として W^{*}環を今井氏(28)が擧げられている。

次に東屋氏の根基（Az根基と略稱する）の定義を掲げておこう。これはSegal の弱正則環の定義と表裏一體をなすものであるが兩者が獨立に考えていたことは興味深い。

環Rのいかなる元xに對しても，$xax=x$ を滿足しない a のことを根元(root element)といゝ，根元の集合が加法的なもの（即ち二つの和がまたそれに屬する）をAz根基という。

例えば整數環に於ける根元は 1 を除くすべての元である。然しそれらの全體は必ずしもAz根基をなしてはおらない。$3+(-2)=1$ となつて 1 は根元ではないからである。

最後に正則性，弱正則性に關連して次の三つの概念のあることを附記しておこう。

1.　π正則. Rの元 a に對して適當なnを選べば，$a^n xa^n = a^n$ を滿足する x が存在するとき，Rはπ正則環なりという。(McCoy(46))

これは，すべての零ならざる巾零元右いでやるが零ならざる巾等元を含むという條件と同値である。(Kaplansky(38))

2.　陪正則. Rのすべての主兩側いでやるが中心の巾零元によつて生成さ

れ得るとき，Rを陪正則環という。(Kaplansky(2))

3. 强正則. Rの元aに對して，$a^2x=a$ を滿足するxが存在するとき，Rは强正則環という。(Kaplansky(2))

これらの研究については Kaplansky の諸論文にゆずる。

§7. のるむ環と Banach 代數

のるむ環というのは複素係數を有するBanach空間で，單位元を有する可換環，且つ實數値をとるのるむに關しては $\|xy\| \leqq \|x\| \cdot \|y\|$ を滿足するものである。これはI. Gelfand(20)以來解析学に於ける重要な武器として認められるようになつた。

Banach 代數はのるむ環を擴張したもので，複素係數を有する Banach空間しかも上と同じ性質を有するのるむをもつ代數にして，單位元の存在も可換性も假定しておらない。但しKaplansky(35)は實係數の場合丈を考え，吉田氏(62)は單位元の存在を假定している。Banach 代數についてはHille (25)の著書の附錄に一通りの理論が記載されてある。今後十年間位は好個の研究題目である。

さてのるむ環に於て $\lim \sqrt[n]{\|x^n\|}=0$ を滿足する元を一般巾零元(generalized nilpotent element) といゝ，これの全體の集合をGelfandの根基(略してG根基）という。

Jacobson(31) はのるむ環に於ては J 根基と G根基とが一致することを次の順序で證明した。まず非可換のるむ環（但し單位元を有す）RのJ根基はRのすべての元 r に對して $(zr)^n \to o$ $((rz)^n \to o)$ なる如き元zの全體であることを證明し，ついでRのJ根基はすべての一般巾零元右（左）いでやるを含むところの一般巾零元いでやるであることを證明した。こゝにいう一般巾零元いでやるとはその元が一般巾零元なるいでやるをいう。この結果に於て特にRが可換なる場合には，zが一般巾零元なるとき zr が一般巾零元となるので，如何なる一般巾零元も一般巾零元いでやるを生成することになつて J 根基は一般巾零元の全體になるのである。

さて§3の定理7系2によれば J 根基は極大いでやるの積なるを以て，G根基

もまたそうなることが知られる。故にのるむ環に於けるJ根基は古典的根基の第二及び第三の定義にも同時に合致していることが分る。

次に Banach 代數の根基については單位元を有する場合に吉田氏の著書(62) 207 頁以下に詳しい。この場合には，すべての元a, b に對して逆元 $(e+axb)^{-1}$ が存在するようなxのことをまず準巾零元（quasi-nilpotent）とよんで，かゝる準巾零元の全體を根基と名付ける。この根基が兩側いでやるにして，極大いでやる全體の積と一致することが證明される。從てこの場合古典的定義の第二のものを根基として用いてよいことになる。

Banach 代數に於て單位元の存在を假定しない場合には Hille(25)の附錄に詳しい。

基礎體Fの上の Banach 代數Rの元qが準巾零元であるというのは，Fのすべての元αに對してαqが逆轉元（reverse）を有することである。そしてすべての準巾零元の集合をRの準根基（quasi−radical）という。

こゝで逆轉の定義を與えておこう。Jacobson の準正則元に暗示をうけて，Hille は1946年6月に十字積（cross product）$a\times b$を次の如く定義した。
$a\times b=a+b-ab.$

もし今 $a\times b=0$ ならば，aは右逆轉にしてbなる右逆轉元を有するといゝ，bは左逆轉にしてaなる左逆轉元を有するという。とくに $a\times b=b\times a=0$ なるときaは逆轉にしてbなる逆轉元を有するという。

Rの元pが固有準巾零（properly quasi-nilpotent）というのは，$\alpha p+xp$がすべての $\alpha\in F$と$x\in R$に對して逆轉元を有することである。そしてこの固有準巾零元の集合を根基（本稿ではH根基とよぼう）といい，もしこの根基が0ならば，H半單純という。

次にH根基が兩側いでやるなることと，RをH根基で分けたものがH半單純であることが證明される。そして又このH根基は0以外の巾等元を含み得ないことも注意されている。なおH根基はすべての巾零いでやるを含むことや，左(右)いでやるに對して降鎖律が成立するときH根基が巾零になることも證明される。のるむ環の場合と同樣に極大いでやるは閉じていること，Rが極大左(右)

いでやるを含むならば，H根基は$(M_\alpha:R)$の積に等しいことも同様である。こゝにM_αは極大いでやるを動くものとする。

最後に正則 Banach 代數について述べよう。これは Kaplansky(35)による研究の結果である。結論をさきにいうならば，いかなる正則Banach代數も有限次元であるというのである。こゝにいう正則は前節に於ける如く von Neumann の意味に於てゞある。この結論は次の四つのものを含む甚だ興味深いものといわねばならぬ。

1. Neumann(53) の定理。ひるべると空間における作用素の正則環は有限次元である。

2. Segal(58) の定理。局所こむぱくと群の群代數は，群が有限のときにそして又その時に限り正則である。

3. Rickart(56) の定理。ある正則 Banach 代數に於てはすべての主いでやるは閉じている。

4. Arens と Kaplansky (2)の定理。可換なる正則Banach代數は有限次元である。また强正則 (strongly regular) Banach 代數も有限次元である。

さて Kaplansky は彼の結果を證明するために，先ず正則Banach代數は直交巾等元を無限個もち得ないことを證明した。次で正則環が直交巾等元を無限個もたないとき右いでやるについて降鎖律が成立することを證明しその結果可除環の上の行列環の有限個の直和になることを證明した。この二つの結果と Mazur(49) の定理によれば，Banach 可除代數は實數，複素數，四元數に限るので，Kaplansky の結果が導かれるのである。

なおこれより進んで弱正則 Banach 代數のことも考えられるが，Banach 代數に於ては弱正則性は余り興味がないと Kaplansky がいうている (1951年5月9日付筆者への書簡による。)

§8. 位相環

位相環 (topological rings) がはじめて定義されたのは1931年に於ける Dantzig の学位論文(15)に於てゞあり，それは(16)(17) に於て詳細に論ぜら

れた。それ以前の位相環の例は勿論存在したので例えば Hensel のp進數やそれの Kürschakによる賦値体への抽象化などが著名なものである。實際當時に於ける賦値論とその代數幾何，代數函數，代數的整數論への應用に關する文献は枚擧に遑がない程であるが(29)，Dantzig の学位論文は研究の第二の方向を指示するもので目標は局所こむぱくと環であつた。それは最近の十年間に於て Banach 代數の研究と一般化されたのであるが，大別して位相可除環，局所こむぱくと環，及びのるむ代數の三つの研究と分れるものである。

位相環というのは環にしてHausdorff空間，しかもa－bとabがa及bの連續函數になるものである。これら術語の基礎概念については例えばBourbaki(9)を見たれたい。

位相環に關する文献は汗牛充棟なのでこゝには Kaplansky による綜合報告(36)と彼の研究(34)(37)(39) があることゝをいつておこう。

さて位相環の根基に關する Kaplansky の研究(34)を以下に述べよう。位相環Rに於ける根基としてはJ根基を考える，即ちそれは右準正則いでやるの合併である。次に位相環に於てその右準正則元が開集合をなすときその位相環を Q_r 環ということにすると次の補題が成立する。

補題　右準正則元よりなる0の近傍を有する環は Q_r 環である。

同様にして左準正則元が開集合をなすとき Q_l 環ということにし，準正則元が開集合をなすときQ環ということにする。然るとき上の補題により，環は Q_l にして Q_r なるときそしてそのときに限り Q環となる。然し Q_r 環にしてQ環でない例は知られておらない。

次に Q_r 環が左單位元を有するとき極大(右)いでやるが閉じていることが證明される。ところが Jacobson (§3. 定理7. 系2) によれば，左單位元を有する環に於てはJ根基は極大右いでやるの積なるを以て，Q_r 環のJ根基は閉じていることになる。このことは一般に單位元がない場合にも成立して，Q_r 環のJ根基はつねに閉じていることが證明されるのである。かくの如く右準正則元の集合が開集合をなしている Q_r 環の場合でもJ根基は閉じていることが知られる。もし右準正則元の集合が閉集合をなしているならば（例えばこむぱくと環

に於て）當然J根基は閉じている。

ところが Kaplanskyは J根基が閉じておらない環の例を與えたのである。いまCをすべての巾級數

$$\alpha = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots$$

の集合とし，係數は實數にして$\sum \frac{a_i!}{i!}$は收斂するものとす。そしてこの和をαののるむとして$\|\alpha\|$を以てしるす。Cが環をなすことは普通の巾級數計算から明らかであり，のるむの諸條件も滿足している。又Cは完備であることも證される。即ちこの環Cが Gelfand (20) の意味に於て實のるむ環をなし，その根基（J根基はG根基に一致している）はいでやる（x）をなしている，即ち常數項が0なる多項式の集合になる。このことの證明はG根基，J根基のいずれの定義からも導かれる。

次にCの元からなるすべての數列

$$X = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \cdots\cdots)$$

の集合をDとする。こゝに一つのXに對して或るkが指定され，すべてのnに對して$\|\alpha_n\| < n^k$なるものとする。

Dの元に加法乘法及び位相を定義することによつてDは位相環となる。そしていまDの元である數列Y_nを次の式

$$Y_n = (x, 2x, \cdots\cdots nx, 0, 0, \cdots\cdots)$$

によつて定義すればこれがDのJ根基に入る。然し極限Yは準正則ではないのでYはDのJ根基に入らない。故にDのJ根基は閉じておらない。これがJ根基が必ずしも閉じていない例である。

J根基が閉じていないもつと簡單な例は(36)の810頁にある。

次に Kaplansky は右有界 (right bounded) という新しい概念——これは Shafarevich(57)による——を導入してこれを有効に用いた。

位相環Rの部分集合Sが右有界であるというのは，0の如何なる近傍Uに對しても$V.S<U$なる如き近傍Vが存在することである。

この右有界の概念は，こむぱくと環が右有界になるので，こむぱくとの擴張として重要なものと言わねばならぬ。

この右有界環については次のことがいえる。即ち右有界Q_r環のJ根基は閉である。これより直に得られる結果として，右有界J半單純Q_r環は弧立（discrete）であり，またこむぱくとJ半單純Q_r環は有限である。

なおこむぱくと環についてのみ考えるならば，そのJ根基は閉じていることは前述の通りである。そしてこむぱくと全連結環のJ根基は巾零（即ち$x^n \to 0$）である。

こむぱくとJ半單純環は有限單純環のカルテシアン直和に同型であり同相である。

さらに Kaplansky は(37)に於て局所こむぱくと環の研究をつゞけ(39)に於て次の結果を得ている。即ち局所こむぱくと環のJ根基は閉じており，もつと正確にいえば閉正則極大右（左）いでやるの積になつている。

こゝにいう正則いでやるに就ては多くの人による研究があるので最後にこれを一括して述べておこう。實際極大いでやるを取扱うとき正則いでやるの概念を用いると便利であるが Segal ((59)74頁）は局所こむぱくと群の群代數に於てこれを用いている。

環Rのいでやる I が右正則であるというのは，Rの元をxとするとき $ex-x$ が I に含まれるような元 e をRが含むときそしてこのときに限る。

Brown(14) はこれを modular と名付けている。

東屋氏(5) はJ根基を左（又は右）modulo 單位元を有するRのすべての極大右（又は左）いでいやるの積として特徴づけられたが，この左 modulo單位元というのは，Rのすべての元aとRの右いでやる I に對して $ua \equiv a \pmod{I}$ が成立する元uをいい，左 modulo 單位元を有する右いでやるが丁度正則いでやるに相當しているのである。

これはまたJacobson の系（§3定理7系2）の證明に際して左單位元だけが必要であることからも導かれる。このことに氣づいたのは Kaplansky((34)157頁）であつて，彼は左單位元を有する環に於ては J 根基は極大右いでやるの積になるといつている。

なおついでながら單純環の左單位元はつねに單位元になることが Brown

と McCoy(11) によつて證明されている。これは§4の定理9の證明に必要なものである。 (1952. 5. 29.)

引 用 文 献

（1） A. A. Albert, Structure of algebras, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 24. (1939) New York

（2） R. F. Arens and I. Kaplansky, Topological representation of algebras. I. Trans. Amer. Math. Soc. 63(1948) 457-481

（3） G. Azumaya, On the generalised semi-primary rings and Krull-Remak-Schmidt's Theorem, Jap. J. Math. 19 (1948) 525-547

（4） G. Azumaya, Corrections and supplementaries to my paper ooncerning Krull-Remak-Schmidt's theorem, Nagoya Math. J. 1 (1950) 117-124

（5） G. Azumaya, On maximally central algebras, Nagoya Math. J. 2(1951) 119-150

（6） R. Baer, Radical ideal, Amer. J. Math. 65 (1943)537-568

（7） G. Birkhoff, The radical of a group with operators, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943) 751-753

（8） G. Birkhoff, Subdirect unions in universal algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944) 764-768

（9） N. Bourbaki, Éléments de mathématique, t. 3. Topologie génnérale, Actualités no. 916 (1942) Paris

（10） R. Brauer, On the nilpotency of the radical of a ring, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942) 752-758

（11） B. Brown and N. H. McCoy, Radicals and su direct sums, Amer. J. Math. 69 (1947) 46-58

（12） B. Brown and N.H.McCoy, The radical of a ring, Duke Math.

J. 15 (1948) 495-499

(13) B. Brown and N. H. McCoy, Some theorems on groups with applications to ring theory, Trans Amer. Math. Soc. 69 (1950) 302-311

(14) B. Brown, An extention of the Jacobson radical, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 114-117

(15) D. van Dantzig, Studiën over toplogische algebra, Dissertation, Amsterdam, H. J. Paris, (1931)

(16) D. van Dantzig, Zur topologische Algebra I, Math. Ann. 107 (1933)587-626

(17) D. Van Dantzig, Zur topologische Algebra II, Composito Math. 2 (1935) 201-223

(18) M. Deuring, Algebren, Ergebnisse der Mathematik, Bd. 4 (1935) Berlin

(19) H. Fitting, Primärkomponentenzerlegung in nichtkommutativen Ringe, Math. Ann. 111 (1935) 19-41

(20) I. Gelfand, Normierte Ringe, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S. 9 (1941) 3-24

(21) O. Goldman, A characterization of semi-simple rings with the decending chain condition, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 1021-1027

(22) O. Goldman, Semi-simple extentions of rings, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 1028-1032

(23) O. Goldman, Addition to my note on semi-simple rings, Bull. Amer. math. Soc. 53 (1947) 956

(24) M. Hall, The position of the radical in an algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940) 391-404

(25) E. Hille, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math.

Soc. Colloq. Publ. vol.31. (1948) New York

(26) G. Hochschild, On the structure of algebras with non zero radical, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 369-377

(27) C. Hopkins, Nil-rings with minimal condition for admissible left ideals, Duke Math. J. 4 (1938) 664-667

(28) 今井万里，弱正則環についての一反例，實函數論月報 第五巻 (1951年6月) 57—58

(29) 岩澤健吉，代數函數論，(1952) 岩波書店

(30) N. Jacobson, The theory of rings, Mathematical Surveys, vol. 2. (1943) New York

(31) N. Jacobson, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math. 67 (1945) 300-320

(32) N. Jacbson, A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 31 (1945) 333-338

(33) R. E. Johnson and F. Kiokemeister, The endomorphisms of the total operator domain of an infinite module, Trans. Amer. Math. Soc. 62 (1947) 404-430

(34) I. Kaplansky, Topological rings, Amer. J. Math. 69 (1947) 153-183

(35) I. Kaplansky, Regular Banach algebras, J. Indian. Math. Soc. 12 (1948) 57-62

(36) I. Kaplansky, Topological rings, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 809-826

(37) I. Kaplansky, Locally compact rings, Amer. J. Math. 70 (1948) 447-459

(38) I. Kaplansky, Topological representation of algebras. II. Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950) 62-75

(39) I. Kaplansky, Locally compact rings. II. Amer. J. Math. 73 (1951) 20-24

(40) G. Köthe, Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach Radical vollstandig reduzibel ist, Math, Z. 32 (1930) 161-186

(41) J. Levitzki, On the radical of a general ring, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943) 461-466

(42) J. Levitzki, Semi-nilpotent ideals, Duke Math. J. 10 (1943) 553-556

(43) J. Levitzki, On three problems concerning nil-rings, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945) 913—919

(44) J. Levitzki, Solution of a problem of G. Koethe, Amer. J. Math. 67 (1945) 437-442

(45) J. Levitzki, Prime ideals and the lower radical, Amer. J. Math. 73 (1951) 25—29

(46) N. H. McCoy, Generalized regular rings, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939) 175-178

(47) N. H. McCoy, Subdirect sums of rings, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 856-877

(48) N. H. McCoy, Prime ideals in general rings, Amer. J. Math. 71 (1949) 823-833

(49) S. Mazur, Sur les anneaux lineaires, C. R. Acad. Sci. Paris 207 (1938) 1025-1027

(50) M. Nagata, On the theory of radicals in a ring, J. Math. Soc. Japan 3 (1951) 330-344

(51) T. Nakayama, A remark on finitely generated modules, Nagoya Math. J. 3 (1951) 139-140

(52) J. von Neumann, On regular rings, Proc. Nat. Acad. Sci. U.

S. A. 22 (1936) 707-713

(53) J. von Neumann, Continuos Geometry II, (1937) 22—24 Princeton

(54) W. Peremans, The radical of a ring, Math. Cent. Amsterdam. (1950) 11

(55) S. Perlis, A characterization of the radical of an algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942) 128-132

(56) C. E. Rickert, Banach algebras with an adjoint operation. Ann. of Math. 47 (1946) 528-550

(57) I. Shafarevich, On the normalizability of topological field, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS. 40 (1943) 133-135

(58) I. E. Segal, The group ring of a locally compact group I, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 27 (1941) 348-352

(59) I. E. Segal, The group algebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc. 61 (1947) 69-105

(60) 武隈良一，富永久雄, Semi-simplicity of weakly regular rings, (1951) 日本數学会春季例会講演，於東大理学部

(61) van der Waerden, Moderne Algebra II, (1940) Berlin

(62) 吉田耕作，位相解析 I, (1951) 岩波書店

On the radical of rings

Ryoichi Takekuma (Otaru)

In this paper we summarize the recent development of the radical of rings.

§1. Classical and modern definitions of radicals

§2. The radical in the sense of Jacobson

§3. Properties of Jacobson radical

§4. The radical in the sense of Brown and McCoy

§ 5. The radical in the sense of McCoy

§ 6. Regular ring and weakly regular ring

§ 7. Normed ring and Banach algebra

§ 8. Topological rings

Especially in §6 it is noted that the radical in the sense of classical, regular, or weakly regular is not always Brown and McCoy radical.