計畫法と分權的決定

Programming and Decentralization

古瀬大六

目次

第一章　計畫法の微分方程式による解法

線形計畫法を數値的に解くための最も完全な方法として既に彼の Simplex Method[1] が考案され、實用化されているが、その他に、種々の聯立微分方程式を使つて解くことも可能である。

この聯立微分方程式による線形計畫法の解法を最初に提案したのはサミュエルソン教授[2]であるが、彼の與えた式は何れも數学的に不完全なものであつた。そこで筆者は、ブラウン及びノイマンの與えた零和二人ゲームの微分方程式を改造した、數学的に完全な微分方程式による線形計畫法の解法を、本誌の昨年號に投稿した。[3]

それは確かに數学的には完全なものであつたが、其後、實際に數値計算をやつてみると、極めて振動が烈しく、中々最終解に收斂してくれない。そこで、今少し收斂性のよいものを、と考えて考案したものが、以下にのべる二組の聯立微分方程式である。

一　新しい方程式（一）

クーン及びタッカーは concave programming について次の定理を證明した。[4]

〔定理〕　x の函數 $g(x), f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots f_m(x)$ が x の非負なる變域に於て concave であり、且つ微分可能であるならば、$f_1(x) \geqq 0, f_2(x) \geqq 0, \ldots\ldots, f_m(x) \geqq 0, x \geqq 0$ なる拘束條件の下に於て $g(x)$ を最大ならしめる解 $\overset{\circ}{x}$ が存在するための必要充分條件は、$\phi(x,u) \equiv g(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$ として定義された函數 ϕ に對して、次の二つの條件を滿足すると

ころの$\overset{\circ}{x}$と$\overset{\circ}{u}$とが存在することである。

$$(\mathrm{i})\quad \frac{\partial\phi(x^\circ, u^\circ)}{\partial x_j} \leqq 0,\quad \frac{\partial\phi(x^\circ, u^\circ)}{\partial x_j} x_j^\circ = 0,\quad x_j^\circ \geqq 0\ (j=1,\cdots,m)$$

$$(\mathrm{ii})\quad \frac{\partial\phi(x^\circ, u^\circ)}{\partial u_i} \geqq 0,\quad \frac{\partial\phi(x^\circ, u^\circ)}{\partial u_i} u_i^\circ = 0,\quad u_i^\circ \geqq 0\ (i=1,\cdots,n)$$

右の定理に基いて、次の如き concave programming の聯立微分方程式解法を考えることができるであろう。

$$\begin{cases} \dot{u}_i = -\alpha_i \dfrac{\partial\phi\{\varphi(x), u\}}{\partial u_i} - \beta_i \dfrac{\dot{\partial}\phi\{\varphi(x), u\}}{\partial u_i} & (i=1,\cdots,m) \quad (1) \\ \dot{x}_j = \gamma_j \dfrac{\partial\phi\{x, \varphi(u)\}}{\partial x_j} + \delta_j \dfrac{\dot{\partial}\phi\{x, \varphi(u)\}}{\partial x_j} & (j=1,\cdots,n) \quad (2) \\ \varphi(x) = \mathrm{Max}(0, x),\ \varphi(u) = \mathrm{Max}(0, u) \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} u = u^\square,\ \varphi(u^\square) = u^\circ$$

$$\lim_{t\to\infty} x = x^\square,\ \varphi(x^\square) = x^\circ$$

その證明は次の如く、四つの場合に別けて行われる。

(1) $\overset{\square}{u}$、$\overset{\square}{x}$の中に正の無限大を含む場合。

此の場合には、係數α、β、γ、δを適當に修正することによつて、$\overset{\square}{u}$、$\overset{\square}{x}$が無限大になることを防止することができる。

(2) $\overset{\square}{u}$、$\overset{\square}{x}$が悉く非負有限値をとる場合。

3

この場合には、$u^{\square}=\varphi(u^{\square}), x^{\square}=\varphi(x^{\square})$ であり、且つ、

$$\dot{u},\ \dot{x},\ \frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}),u^{\square}\}}{\partial u},\ \frac{\partial\phi\{x^{\square},\varphi(u^{\square})\}}{\partial x}$$

は何れも零となるから、夫々の値を(1)と(2)とに代入すれば、

$$\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}),u^{\square}\}}{\partial u}=\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square},u^{\square})\}}{\partial u}=0$$

$$\frac{\partial\phi\{x^{\square},\varphi(u^{\square})\}}{\partial x}=\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square},u^{\square})\}}{\partial x}=0$$

從つて $\varphi(x^{\square},u^{\square})$ は(i)(ii)の條件を悉く滿足せしめるから、それは前記の concave programming の解に一致する。

(3) $u^{\square}$、$x^{\square}$ のうち、若干は負の有限値を持つが、他は悉く非負有限値である場合。負なる $u_i^{\square}$、$x_j^{\square}$ に對しては、$\varphi(u_i{}^{\square})=0$, $\varphi(x_j{}^{\square})=0$ であり、且つ、前回同様

$$\dot{u},\ \dot{x}\ \frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}),u^{\square}\}}{\partial u},\ \frac{\partial\phi\{x^{\square},\varphi(u^{\square})\}}{\partial x}$$

は悉く零となるから、この値を(1)、(2)に代入すれば、

$$\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}),u^{\square}\}}{\partial u}=f\{\varphi(x^{\square})\}=\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square},u^{\square})\}}{\partial u}=0$$

$$\frac{\partial\phi\{x^{\square},\varphi(u^{\square})\}}{\partial x}=0 \qquad (3)$$

然るに、$g(x), f_1(x),\cdots\cdots, f_m(x)$ は悉く concave であるから、$\phi\{x,\varphi(u^{\square})\}\equiv g(x)+\Sigma\varphi(u^{\square})f(x)$ もまた x について concave であり、[5] 從つて、その導函數 $\partial\phi\{x,\varphi(u^{\square})\}/\partial x$ は x の增加につれて單調に增加する。それ故、負なる

$\overset{\square}{x}_j$に對しては(3)から左記の關係が導かれる。

$$\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}, u^{\square})\}}{\partial x_j} < 0, \quad \frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}, u^{\square})\}}{\partial x_j}\varphi(x_j^{\square}) = 0$$

從つて、$\overset{\square}{u}$、$\overset{\square}{x}$が若干の負の有限値を含む場合にあつても、$\varphi(u^{\square}, x^{\square})$ は前記の(i)、(ii)の條件を悉く滿足させる。

(4) $\overset{\square}{u}$、$\overset{\square}{x}$の中に負の無限大を含み、他は有限値である場合。

この場合には前回同様 $\varphi(u_i^{\square})=0$, $\varphi(x_j^{\square})=0$ であるが、然し、

$$\dot{u}_i <, \quad \dot{x}_j < 0, \quad \frac{\dot{\partial}\phi\{\varphi(x^{\square}), u^{\square}\}}{\partial u_i} \geqq 0, \quad \frac{\dot{\partial}\phi\{x^{\square}, \varphi(u^{\square})\}}{\partial x_j} \leqq 0$$

となる。これらの値を(1)、(2)に代入すれば、

$$\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}), u^{\square}\}}{\partial u_i} = f_i\{\varphi(x^{\square}) = \frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}, u^{\square})\}}{\partial u_i} \geqq 0$$

$$\frac{\partial\phi\{x^{\square}, \varphi(u^{\square})\}}{\partial x_j} \leqq 0 \qquad (4)$$

前の場合と同じく、$\phi\{x^{\square}, \varphi(u^{\square})\}$ の concavity を利用して、次の結果が得られる。

$$\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}, u^{\square})\}}{\partial x_j} < 0, \quad \frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}, u^{\square})\}}{\partial x_j}\varphi(x_j^{\square}) = 0$$

それ故、この場合にもまた、$\varphi(x^{\square}, u^{\square})$ は(i)、(ii)の條件を悉く滿たす。

以上の四つの場合を要約すれば、(1)、(2)の方程式の定常解 $u^{\square}$, $x^{\square}$ が正の無限大を含まぬ限り、$\varphi(u^{\square}, x^{\square})$ を以て concave programming の解とすることができる。

5

二 新しい方程式(二)

次の方程式の定常解$\overset{\square}{u}$、$\overset{\square}{x}$から導かれる$\varphi(u^{\square}, x^{\square})$もまた、前記のクーン及びタッカーの二條件を満足させる。

$$\begin{cases} \dot{u}_i = -\alpha_i \dfrac{\partial\phi\{\varphi(x), u\}}{\partial u_i} - \beta_i \dfrac{\partial\phi\{\varphi(x), u\}}{\partial u_i} & (i=1,\cdots,m) \\ \dfrac{\partial\phi\{x, \varphi(u)\}}{\partial x_j} = 0 & (j=1,\cdots,n) \\ \varphi(u) = \mathrm{Max}(0, u),\ \varphi(x) = \mathrm{Max}(0, x) \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} u = u^{\square},\quad \lim_{t\to\infty} x = x^{\square}$$

$$\varphi(u^{\square}) = x^{\circ},\quad \varphi(x^{\square}) = x^{\circ}$$

その證明は前記の第一方程式と殆ど同じであるから、繰返すことは避けたい。その收斂性は前の(一)よりも更に大であるが、線形計畫法に對しては使用できず、各變數について二回以上微分可能な場合に限定される。

三 その經濟的意味

最初に線形計畫法について考えてみよう。線形の場合には、

$$\phi(x, u) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)$$

であるから、これを各變數について偏微分すれば、

$$\frac{\partial \phi}{\partial u_i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \quad ,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, u_i$$

となる。ここで、x_jを、製品Jの一定期間中の生産・販賣量、c_jをその單位當り販賣價格、b_iを機械其他供給限界を持つ固定的生産財のその期間中の最大サーヴィス能力、u_iをその內部計算價格、a_{ij}をその生産財を使つてJを一單位生産するに要するサーヴィスの量、と考えてみよう。

各記號をこのように解釋するならば、線形計畫法は、斯樣な有限生産財拘束の下に於てその賣上高（直接材料・直接工賃等の比例費を控除した價格をc_jと考えれば、この意味に於ける賣上高を最大にすることは、同時にその利潤を最大にすることに外ならない）を最大ならしめるところの各製品の生産・販賣量を求めよ、という問題に轉化される。然るときは、$-\partial \phi / \partial u_i$は固定資源$I$の超過需要$\varepsilon_i$を意味し、$\partial \phi / \partial x_j$は製品Jの內部振替價格によつて計算された限界利潤$\pi_j$（線形の場合にはそれは同時に平均利潤に等しい）を意味する。

このような經濟的意味を考えながら、各種の聯立微分方程式による計畫法の解法を再檢討するならば、サミュエルソンの與えた最初の方程式(6)

$$\begin{cases} \dot{u}_i = -\alpha_i \dfrac{\partial \phi(u, x)}{\partial u_i} \\ \dot{x}_j = \beta_j \dfrac{\partial \phi(u, x)}{\partial x_j} \end{cases}$$

は、

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \alpha_i \epsilon_i & (5) \\ \dot{x}_j = \beta_j \pi_j & (6) \end{cases}$$

と書き改められる。則ち、(5)は各有限生産財の管理者は、各生産部門からの需要が自己の供給限界を超えるときはその超過需要量ϵに比例する大さだけ内部振替價格uを引上げ、超過供給となるときは逆に引下げる、という行動をとることを示す。また(6)は、各製品の生産擔當者は、與えられた技術Aの下で、その限界利潤（平均利潤）が正であればそれに比例する量だけ生産をふやし、それが負であれば生産を減ずる、という行動をとることを意味する。而て、このような取引を繰返した結果、各生産量が非負な有限値に收斂するならば、それは同時にその企業全體としての利潤が最大となつたことを示す。然しこの場合には、xは收斂しないから、[7] このサミュエルソン式に示された行動様式を以て現實の企業の分權的管理の様式とすることはできない。

サミュエルソンの第二式[8]についても同様の變換を加えるならば、

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \alpha_i \epsilon_i + \sum_j K_{ij} \pi_j x_j \\ \dot{x}_j = \beta_j \pi_j - \sum_i M_{ji} \epsilon_i u_i \end{cases}$$

となる。この場合には係數α、β、M、Kを適當に定めることにより、u、xを收斂させることは可能であるが、u、xの非負値條件が式中で考慮されていない點が缺陷となつている。また、その點を修正したとしても、右邊第二項が、總ての變數の間の乘算を含んでいるため、各生産財、各生産物の管理者が自己の管理する財の價格、生産量を決定するに際して、他の總ての價格、生産量を知らなければならぬことになる。このことは組織内の communication を複雜化し、折角の價格uのパラメーター的性格を充分に利用しないことになるであろう。

次にブラウン及びノイマン式に筆者が修正を加えたところの式[9]を取上るならば、

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \varphi(\epsilon_i) - u_i\,\varphi(-\sum \epsilon_i u_i - \sum \pi_j x_j) \\ \dot{x}_j = \varphi(\pi_j) - x_j\,\varphi(-\sum \epsilon_i u_i - \sum \pi_j x_j) \end{cases}$$

となる。これは各變數の非負値條件が式中に表わされてをり、如何なる非負の初期値から出發しても必ず所期の解に收斂する、という點で、前記のサミュエルソンの第二式に勝つている。然し、既に本章の初めにも述べたように、その收斂性は極めて悪い。その一例として、次のような簡單な線形計畫法の場合に對して、このブラウン及びノイマンの式を適用してみよう。

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix},\quad c = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix},\quad b = \begin{vmatrix} 10 \\ 10 \end{vmatrix}$$

$x_1, x_2 = 0,\ u_1, u_2 = 0$ なる初期値から出發した場合の、$\varphi(x)$ のグラフを描けば、第一回の如くなる。但しこれは、前記の聯立微分方程式を直接積分して解いたものではない。そのような正統的解法はこの場合極めて困難であるので[10]次のような定差方程式に改めて、逐次代入法により近似的に解いてみたものである。

$$\begin{cases} 10\{u_1(t+1) - u_1(t)\} = \varphi\{3x_1(t) + 4x_2(t) - 10\} - u_1(t)\varphi\{10u_1(t) + 10u_2(t) - x_1(t) - 2x_2(t)\} \\ 10\{u_2(t+1) - u_2(t)\} = \varphi\{5x_1(t) + 2x_2(t) - 10\} - u_2(t)\varphi\{10u_1(t) + 10u_2(t) - x_1(t) - 2x_2(t)\} \\ 10\{x_1(t+1) - x_1(t)\} = \varphi\{1 - 3u_1(t) - 5u_2(t)\} - x_1(t)\varphi\{10u_1(t) + 10u_2(t) - x_1(t) - 2x_2(t)\} \\ 10\{x_2(t+1) - x_2(t)\} = \varphi\{2 - 4u_1(t) - 2u_2(t)\} - x_2(t)\varphi\{10u_1(t) + 10u_2(t) - x_1(t) - 2x_2(t)\} \end{cases}$$

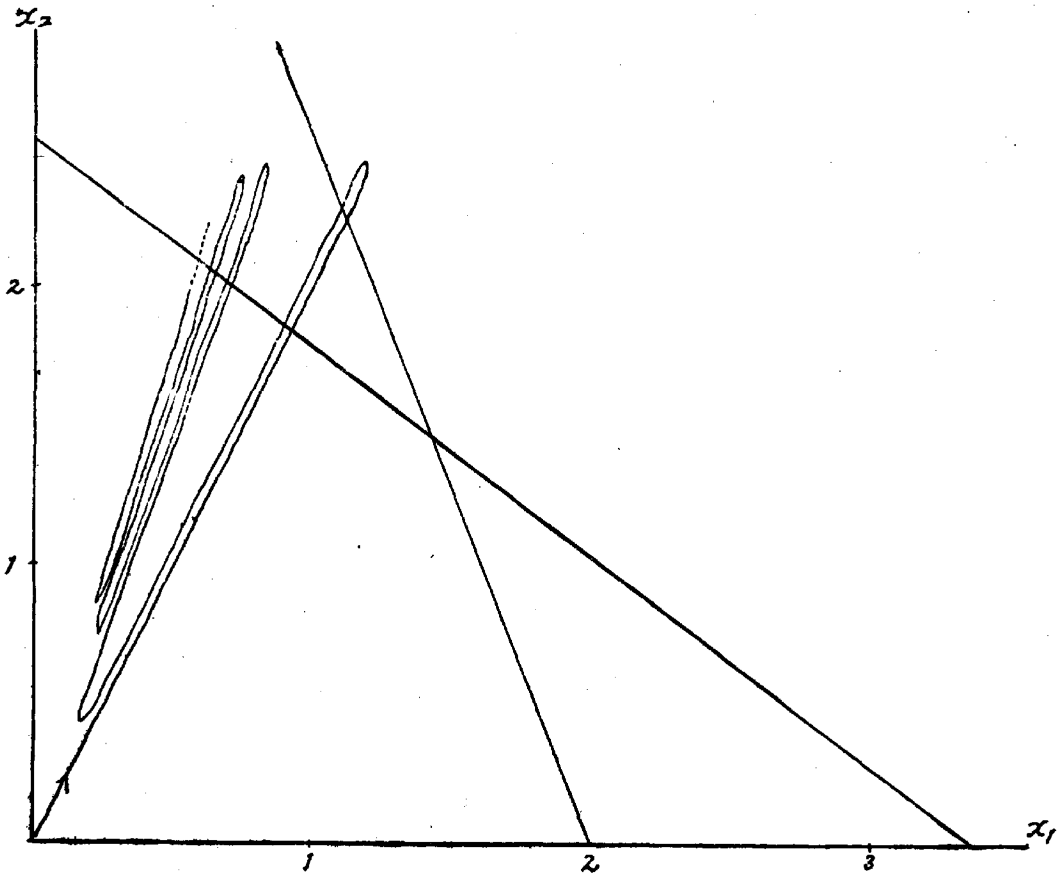


Fig. 1

ブラウン及びノイマンの式は、このように收斂性が悪いばかりでなく、communication の複雑化という點でも、前のサミュエルソンの第二式と同様に好ましくない。

これに對し、筆者の第一式を ϵ と π とを使つて書き改めるならば、

$$\begin{cases} u_i = \alpha_i \epsilon_i\{\varphi(x)\} + \beta_i \dot{\epsilon}_i\{\varphi(x)\} \\ \dot{x}_j = \gamma_j \pi_j\{\varphi(u)\} + \delta_j \dot{\pi}_j\{\varphi(u)\} \end{cases}$$

これを前記のブラウン及びノイマン式の場合と同じ計算例について適用すれば、第二圖のグラフが得られる。その優劣は一目瞭然である。このような大きな差異が生れたのは右邊第二項の $\dot{\epsilon}$、$\dot{\pi}$ の導入がその原因である。

元來は時間を含まない通常の聯立方程式をこのように時間についての聯立微分方程式として解くことは、聯立方程式の servomechanism による計算機構を設計することに外ならないのであつて、從つて、自動制御理論に於て屢々論ぜ

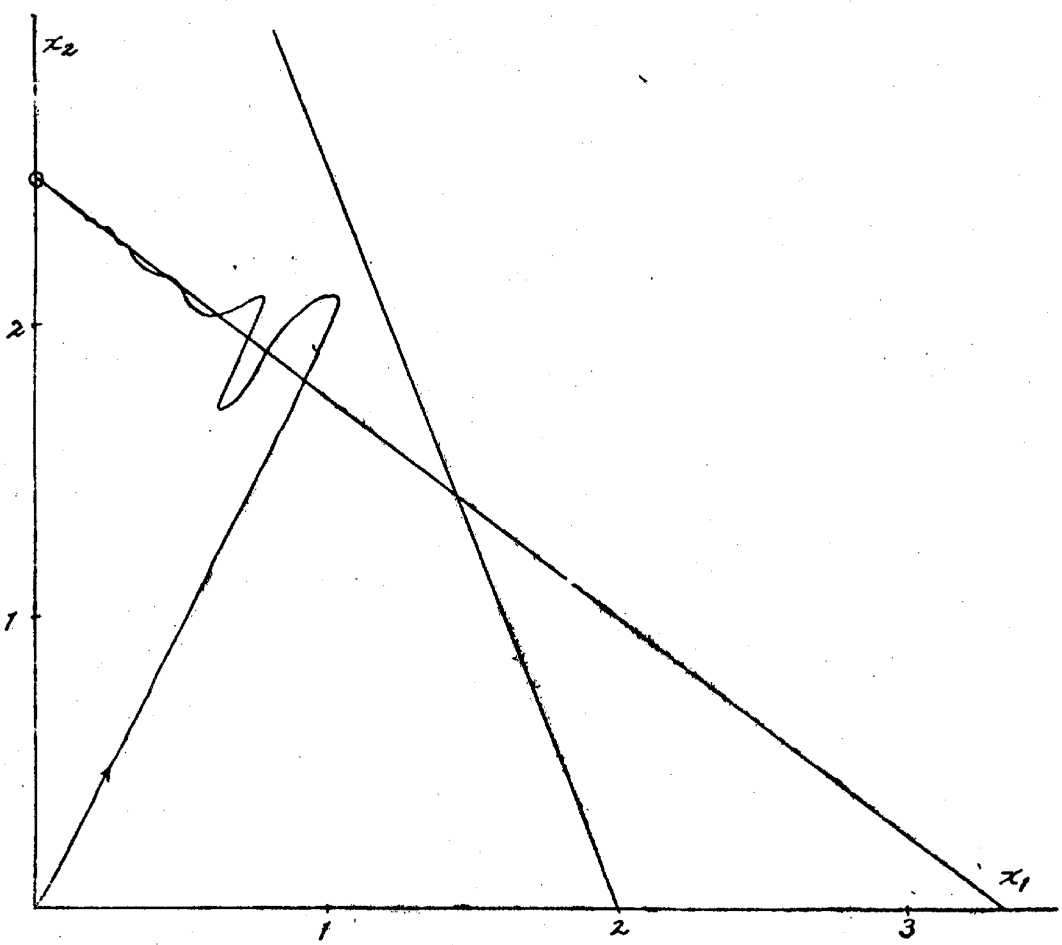


Fig. 2

られているように、安定な動作を行わせるためには單なる比例制御（proportional control）ε、πだけでは不充分であり、その外に豫想制御（anti-cipation control）・ε'・πを加えなければならない。[11] これらの微分項の存在は、經濟的には單純な外挿法的 expectation の行われることを意味している。期待の持つ安定効果の興味ある實例を此所に見ることができるであろう。

以上は何れも線形計畫法の場合であつたが、現實の經濟に於ては、賣上高は必ずしも販賣量に比例せず、生産財の所要量は必ずしも生産量に比例しない。これらの事情をも考慮するときは、その計畫法もまた線形計畫法から、より一般的な concave programming へと移行しなければならない。

そこで、concave programming の最も簡單な一例として、賣上函數は線形であるが、生産函數のみが concave であり且つ、各生産物の

生産に必要な生産財の量は、他の生産物の生産量の大さから全く獨立である場合（これは極めて現實的な假定である）を擧げてみよう。

$$g(x)=x_1+2x_2,\quad f(x)=16-\left(\frac{x_1}{2}\right)^2-x_2^2$$

とすれば、

$$\phi(u,x)\equiv x_1+2x_2+u\left(16-\frac{x_1^2}{4}-x_2^2\right)$$

$$\frac{\partial\phi\{x,\varphi(u)\}}{\partial x_1}=1-\frac{x_1}{2}\varphi(u)=\text{第一製品部門の限界利潤}$$

$$\frac{\partial\phi\{x,\varphi(u)\}}{\partial x_2}=2-2x_2\varphi(u)=\text{第二製品部門の限界利潤}$$

$$\frac{\partial\phi\{\varphi(x),u\}}{\partial u}=16-\frac{\varphi(x_1)^2}{4}-\varphi(x_2)^2=\text{生産要素の超過供給}$$

となる。これを(1)、(2)に代入すれば、

$$\begin{cases}\dot{u}=\left\{\dfrac{\varphi(x_1)^2}{4}+\varphi(x_2)^2-16\right\}+\dfrac{d\left\{\dfrac{\varphi(x_1)^2}{4}+\varphi(x_2)^2-16\right\}}{dt}\\[2ex]\dot{x}_1=\left\{1-\dfrac{x_1}{2}\varphi(u)\right\}-\dfrac{d\left\{\dfrac{x_1}{2}\varphi(u)\right\}}{dt}\\[2ex]\dot{x}_2=\left\{2-2x_2\varphi(u)\right\}-\dfrac{d\left\{2x_2\varphi(u)\right\}}{dt}\end{cases}$$

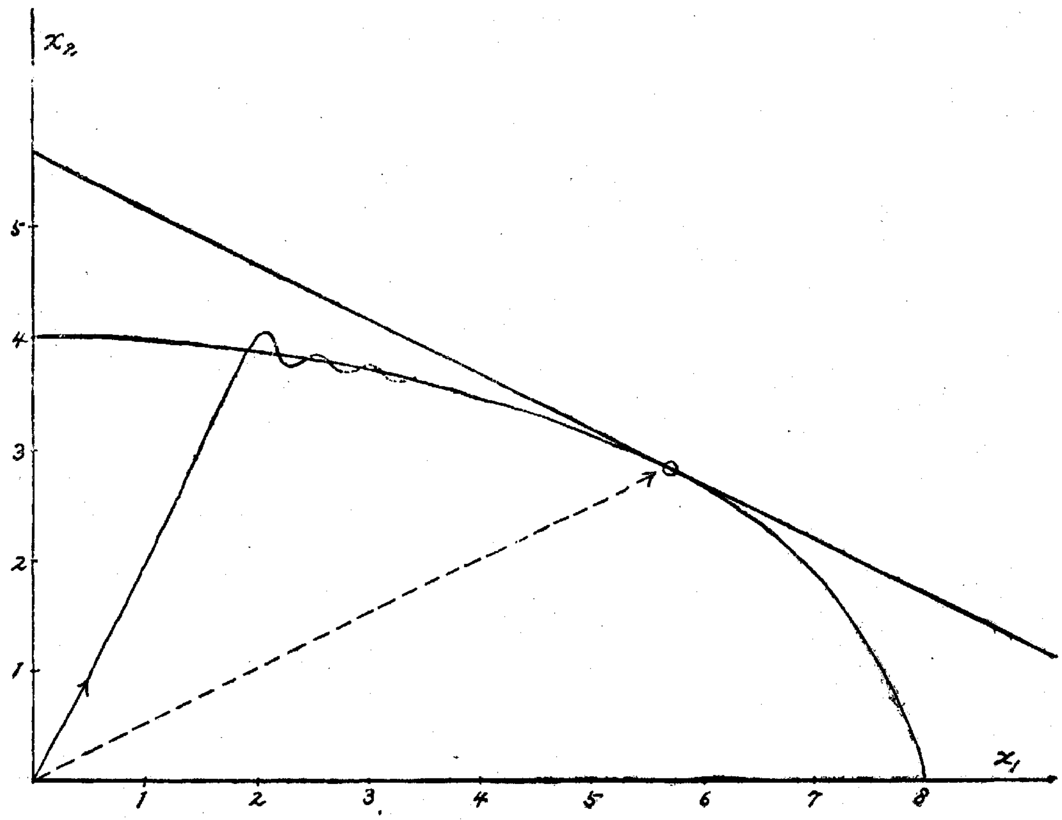


Fig. 3

これを前と同じく定差方程式化して解けば第三圖（實線）が得られる。

時間の餘裕がなかつたので、最終解の點まで計算することができなかつたが、大體に於て收斂することは間違ないと思われる。但し、最大利潤點を行き過ぎてから逆戻りすることはあり得るであろう。この場合の各分權的決定者の行動樣式は前回の線形の場合と全く同樣である。

同じ問題を第二方程式によつて解くならば

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{n} = \left\{\dfrac{\varphi(x_1)^2}{4} + \varphi(x_2)^2 - 16\right\} + \dfrac{d\left\{\dfrac{\varphi(x_1)^2}{4} + \varphi(x_2)^2 - 16\right\}}{dt} & (7) \\ 1 - \dfrac{x_1}{2}\varphi(u) = 0 & (8) \\ 2 - 2x_2\varphi(u) = 0 & (9) \end{array}\right.$$

となる。有限生產財の保管者の行動樣式を示す(7)式は前の場合と全く變りがないが、各製品の生產擔當者の

行動樣式を表わす(8)、(9)式は全く異つた形を持つ。これは、第一方程式の場合には生産擔當者が、限界利潤の大さに比例して生産量を調節する、という行動樣式をとつたのに對し、(8)、(9)に於ては各時點に於ける生産財價格uに對し常に自己の部門利潤を最大ならしめるように行動する、則ち分權的に profit-maximization を行うからに外ならない。その過渡現象を圖示した第三圖（破線）に明かなように、各變數は全然振動なしに目的點に向つて一直線に進む。その收斂性は第一方程式よりも遙かに優れている。勿論如何なる場合にもこのようにうまく行くわけではない。有限生産財の種類が二つ以上になれば、やはり振動はまぬがれないであろう。然しその場合に於てもなお、第二方程式の方が收斂性が強いであろう。

この企業の內部均衡モデルに於ける結論が若しそのまま一般的な市場均衡についても當てはまるとするならば、現實の企業者の行動樣式に近いと考えられる第一方程式の場合よりも、積極的に利潤を最大ならしめるように行動する第二方程式の行動樣式の方が、市場をより安定化することができると、推論し得るであろう。但し此所で一言しておかなければならないことは、第一方程式に於て產出量調節のバロメーターとなるのは限界利潤であつて平均利潤ではない、という點である。現實に於ける企業者の行動は、限界利潤のような測定のむつかしい値よりも、計算の容易な平均利潤の大小によつてその生産費を調整するものと思われる。然し、線形の場合には限界利潤と平均利潤とは一致するし、また、賣上函數、生産函數が二次形式であつても、部門相互間の影響が存在しないならば、兩者の大さは異つても、それから決定される各生産物の生産量の定常解は完全に一致する。從つて、平均利潤の大小によつて生産量を加減するという企業者の行動もまた、多くの場合均衡への收斂性を持つと言つて差支ない。但しこの場合、利潤の歸屬については大きな差異の生ずることに注意する必要がある。則ち、平均利潤に從つて行動するときは、利潤の全額が、より高いuを通じて、有限生産財の管理者に歸屬するのに反し、限界利潤を基準として、則ち部門利潤極大化

を目的として行動するときは、二次形式の場合であればその半額が各生産擔當者にもまた配分される（價格uは前の場合の半額になる）。

これらの結果を直ちに一般的市場機構の作用にまで擴張して考えることは勿論危險である。そのような目的のためには、一般均衡モデルを先ず作成し、その個々の方程式の形を右と同様の手續きで企業者の種々の行動樣式に應じて變更し、その變更の結果として、定常解の値と、過渡現象の形とがどのように異つてくるかを數学的に考察すべきである。この問題についての正しい解答がどうなるかは、後日微分解析機が使えるようになつたならば、改めて考えてみたい。

最後に、販賣函數、生産函數が各製品別に分割できない場合、則ち二次形式であれば異つた二つの生産物の生産量の積が式中に含まれている場合には、限界利潤を表わす式の中に、自己の擔當製品以外の製品の生産量が一つの與件として入つてくるので、生産量の決定がやりにくくなり、過渡現象もそれだけ複雑になつてきて、分權的管理の利點が割引されざるを得なくなる。この他の部門から入つてくる變數についても何等かの價格機構を通じてそれを再び分割してしまうことが出來ないであろうか、この點もまた殘された問題として置きたい。

1 Charnes, A., Optimality and Degeneracy in Linear Programming (Econometrica, April, 1952, pp. 160—170.)
2 Samuelson, P.A., Market Mechanism and Maximization, 1949, The Rand Cosposation, pp. 78.
3 古瀬大六、線形計畫法の逐次解法（商學討究、昭和二七年十一月號 pp. 29—58）。
4 Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., Nonlinear Programming (Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, ed. by J. Neyman, Univ. of California Press, 1951, pp. 481—492.)
5 Ibid., p. 485—486.
6 古瀬大六 op. cit., p. 47.

7 Ibid., pp. 313—316.
8 Ibid., p. 316.
9 Ibid., pp. 310—311.
10 Ibid., p. 53, 註 (5).
11 James, H. M., Nichols, N. B. and Phillips, R. S., Theory of Servomechanisms, (Radiation Laboratory Series, No. 25), Mc Graw-Hill, 1947, pp. 2—3.

第二章　分權極値問題

極大原理は二つの異つた意義をもつ。一つは客觀的現象の記述の手段としてであり、他の一つは行動合理化のための實踐的手段としてである。

經濟現象の記述の爲の手段として極大原理が最初に利用されたのは、周知の如く Cournot の獨占理論に於てであり、それ以來企業均衡、消費者均衡等の個別均衡理論にとつての不可缺の理論的武器となつた。

この極大原理と並んで、同樣に重要な地位を占めるところの分析的用具は、市場均衡の聯立方程式表現である。個別均衡に於ては、企業者或は消費者という行動主體・價値判斷主體が現實に存在し、その極大化さるべき量は利潤又は效用として現象的に與えられているのであるから、これらの個別的行爲に對して極大原理を適用するということは極めて自然の成行きであつたと言えよう。然しながら、統一的行動主體と統一的目的とを持たぬ市場均衡現象についてはこのような極大原理の適用は不可能であり、ワルラス以來、聯立方程式がこれに代らねばならぬものと考えられてきたのであつた。

極大原理と聯立方程式表示ということの二つの方法は必ずしも相對立するものではなく、殊にこれを純數学的に考え

るならば、兩者は寧ろ同じ方法の一側面をそれぞれ表わしているものとして理解されなくてはならない。[1] 極値問題を解くことはその目的函數を各變數について偏微分することによつて得られた一聯の方程式を聯立させて解くことに外ならず、また逆に、與えられた聯立方程式を解くことは、それを聯立偏微分方程式と看做した場合の元の函數を極大又は極小ならしめる問題を解くことと全く同じである。市場均衡をこのように一つの極値問題（極大問題又はミニ・マックス問題）の各競爭者による分權的決定問題として解こうとする試みは、ノイマン（一九三五）[2] のそれを出發點として、次第に一般化する徴候をみせている（サミュエルソン、[3] アロウ、[4] デブリウ等[5]）。

以上は經濟現象記述のための手段としての極大原理の發展過程を簡單に述べたのであるが、殘されたもう一つの重要な役割が、最近の programming 或は activity analysis の議論を通じて次第に認識されるようになつてきた。それは則ち、行動者が自己の行動をより合理的ならしめるための實踐的手段としての極大原理の役割である。

その目的函數を最大ならしめるために決定しなければならない變數の數が非常に多いときは、この函數の形についての知識を一ケ所に集めることが困難となるばかりでなく、假に函數が陽表的に與えられたとしてもそれを一人で集權的に解くことは殆ど不可能に近い。それを實踐的に解こうとするならば、どうしてもこれを幾つかの極値問題に分割し、斯く分割された多數の分權的決定者の諸決定の間の擬制的市場均衡過程を通じて全體と部分との關聯を附けて行くという方法をとらざるを得ないであろう。則ちここに、與えられた極値問題を分權的に能率よく解くための組織機構を設計する、という實踐的問題が發生する。極値問題の理論がこの實踐的要求に應え得たためには、今迄單なる記述的要求のために特殊な形を以て發達してきた從來の理論を、より一般的な形で再展開することが必要となる。サーヴォ機構に於けるアナリシス理論からシンセンス理論への發展は、そのための有力な示唆となるであろう。

かかる實踐的な decentralized maximization の理論は、單に個別企業の管理のための有力な手段となるばかりで

なく、國民經濟の計畫化・社会化の目的にとつても大いに役立つものと思われる。サミュエルソンの主張する如く、自由經濟機構を表現する聯立方程式を積分して得られる函數を以てそのまま直ちに國民經濟社会化のための普遍的價値判斷基準とすることはできないにしても、[6] 何等かの社会的價値判斷基準が經濟外的に與えられるならば、それを最も效率よく達成させるような經濟機構を設計する方法を考えることは、經濟政策決定の上に大きな貢献をすることになるであろう。

然しこの小論文に於ては、問題を企業均衡と、單一財の市場均衡とに限定することとし、一般均衡と極値問題との關聯については、また別の機会を見て論ずることとしたい。筆者の現在の研究段階では未だ、一般的均衡方程式の基礎となる極値問題の明確な形を示し得るに至つていない。

一　分權的決定機構としての單一財市場均衡

市場機構による分權極大解法についての最も簡單な例として、單一財の需給市場の均衡を考えてみよう。この市場は他の總ての財の價格・數量から完全に獨立であるものと假定する。

任意の與えられた價格pと、與えられた生産・購入量xとに對應する消費者集團の消費者餘剰を、

$$\frac{b_1}{a_{11}}x - px - \frac{a_{12}}{2a_{11}}x^2$$

同じく生産者餘剰を

$$px - \frac{b_2}{a_{21}}x + \frac{a_{22}}{2a_{21}}x^2$$

とすれば、（これは直線的需要・供給曲線を假定したことに外ならない）兩者の合計は

$$\left(\frac{b_1}{a_{11}}-\frac{b_2}{a_{21}}\right)x+\left(\frac{a_{22}}{2a_{21}}-\frac{a_{12}}{2a_{11}}\right)x^2$$

となる。

そこで、この消費者餘剩と生産者餘剩との合計額を最大ならしめるように生産・購入量xを決定せよ、という命令が與えられたものと考えよう。このような簡單な式であれば、政府の一事務官が机上計算でこの生産量を決定し、その生産を生産者に直接命令し、またそれを直接消費者に配給することも可能である。則ち、右の式をxについて偏微分すれば、

$$\left(\frac{b_1}{a_{11}}-\frac{b_2}{a_{21}}\right)+2\left(\frac{a_{22}}{2a_{21}}-\frac{a_{12}}{2a_{11}}\right)x=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

となり、目的とする生産量を市場機構から全く獨立に決定し得るであろう。然しながら、これらの係數a、bを決めるには、生産函數、消費函數についての完全な知識を必要とし、計畫經濟否定論者によつて繰返し述べられて來たところのあらゆる困難に直面しなければならない。

そこで、先ず前記の函數を、消費者に關する係數a_{11}、a_{12}、b_1を含む部分と、生産者に關する係數、a_{21}、a_{22}、b_2を含む部分とに分割して

$$\left(\frac{b_1}{a_{11}}x-\frac{a_{12}}{2a_{11}}x^2\right)+\left(-\frac{b_2}{a_{21}}x+\frac{a_{22}}{2a_{21}}x^2\right)$$

とし、生産者と消費者とがそれぞれ自己に關係した函數だけを極大ならしめることができるように、變數xをx_1とx_2とに區別し、x_1を消費者が自ら決定すべき消費量、x_2を生産者の自ら決定すべき生産量と考へるならば、それは、左の如く表わされる。

$$\left(\frac{b_1}{a_{11}}x_1 - \frac{a_{12}}{2a_{11}}x_1^2\right) + \left(-\frac{b_2}{a_{21}}x_2 + \frac{a_{22}}{2a_{21}}x_2^2\right)$$

但し、このようにxを分けてみても、x_1とx_2とは最終的には一致しなければ、その計畫は實行不能に陥るであろう。それ故、消費者餘剰と生産者餘剰との合計を最大ならしめよ、という課題は、これを、次のような拘束條件附極大問題に轉化せしめることができる。

$$\begin{cases} \mathrm{Max}\left\{\left(\frac{b_1}{a_{11}}x_1 - \frac{a_{12}}{2a_{11}}x_1^2\right) + \left(-\frac{b_2}{a_{21}}x_2 + \frac{a_{22}}{2a_{21}}x_2^2\right)\right\} \\ x_2 - x_1 = 0 \end{cases}$$

これを通常のラグランシュ乘數法によつて解けば、

$$\phi(x, \lambda) = \left(\frac{b_1}{a_{11}}x_1 - \frac{a_{12}}{2a_{11}}x_1^2\right) + \left(-\frac{b_2}{a_{21}}x_2 + \frac{a_{22}}{2a_{21}}x_2^2\right) + \lambda\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_1 - \lambda = 0 & (10) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{b_2}{a_{21}} + \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2 + \lambda = 0 & (11) \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = x_2 - x_1 = 0 & (12) \end{cases}$$

右の聯立方程式に於けるラグランシュ乘數λは、商品Xの市場價格を意味する。λをこのように理解するならば、それぞれの方程式には次のような經濟的意味を賦與することができる。

先ず、(10)式の右邊をx_1について積分した函數

$$\frac{b_1}{a_{11}}x_1 - \frac{a_{12}}{2a_{11}}x_1^2 - \lambda x_1$$

は、商品Xを價格λでx_1量購入したときの消費者餘剩に外ならない。從つて(10)式は、價格がλであるときの限界消費者餘剩に一致する。同じく(11)式の右邊をx_2について積分すれば、

$$-\frac{b_2}{a_{21}}x_2 + \frac{a_{22}}{2a_{21}}x_2^2 + \lambda x_2$$

という生産者餘剩の式が得られ、從つて(11)式は、價格λの下に於ける限界生産者餘剩を意味する。最後の(12)式は超過供給を意味することと言うまでもない。

これは一つの拘束條件附極大問題であるから、第一章の方法に從つて、次のような聯立微分方程式による表示が可能である。則ち(10)、(11)、(12)式より(1)、(2)式に代入すれば、

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x_1} && (13) \\ \dot{x}_2 &= \beta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \beta_2 \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x_2} && (14) \\ \dot{\lambda} &= -\gamma_1 \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - \gamma_2 \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \lambda} && (15) \end{aligned}\right.$$

この最初の式は、消費者が自由市場に於て成立するλに對して、限界消費者餘剩が正ならば購入量を增し負ならばこれを減ずることを示し、第二式は生産者がその生産者餘剩の正負に應じてその生産量を調整することを意味し、最後の式は、自由交換市場の働き、則ち超過需要であれば價格は上昇し、超過供給であれば下落することを示している。

(1)、(2)式の代りに第一章第二節の式を使うことも勿論可能である。則ち、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_1 - \lambda = 0 & (16) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\dfrac{b_2}{a_{21}} + \dfrac{a_{22}}{a_{21}} x_2 + \lambda = 0 & (17) \\ \dot{\lambda} = \alpha_1 (x_1 - x_2) + \alpha_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) & (18) \end{cases}$$

とするならば、消費者及生産者は各瞬間に於ける市場價格λに對して、それぞれ瞬間的に、消費者餘剩又は生産者餘剩を最大ならしめるようにその消費量及び生産量を決定しなければならない。

右の二つのうち何れの形を採用するにせよ、以上によつて、吾々の最初に提出した極大問題は、市場交換機構を通じて分權的に解かれたことになる。則ち、消費者餘剩と生産者餘剩との合計を最大ならしめることは、一つの聯立方程式、

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_1 - \lambda = 0 \\ -\dfrac{b_2}{a_{21}} + \dfrac{a_{22}}{a_{21}} x_2 + \lambda = 0 \\ x_2 - x_1 = 0 \end{cases}$$

を解くことに外ならず、この聯立方程式（第一式は需要曲線、第二式は供給曲線に等しい）を解くことはまた、自由競爭市場を通じて生産者と消費者とが市場價格λに對して受動的にそれぞれの利益を最大ならしめるように行動する場合の均衡點（それは $\underset{\lambda}{\mathrm{Min}}\ \underset{x_1,x_2}{\mathrm{Max}}\ \phi(x_1,x_2,\lambda)$ で與えられる）を求めることに外ならないことを知つた。斯くして、計畫經濟實施の責にある當局者は、需給供給についての詳細な知識を持たなくても、その任務を遂行することができるであろう。

二　その定差方程式による解法

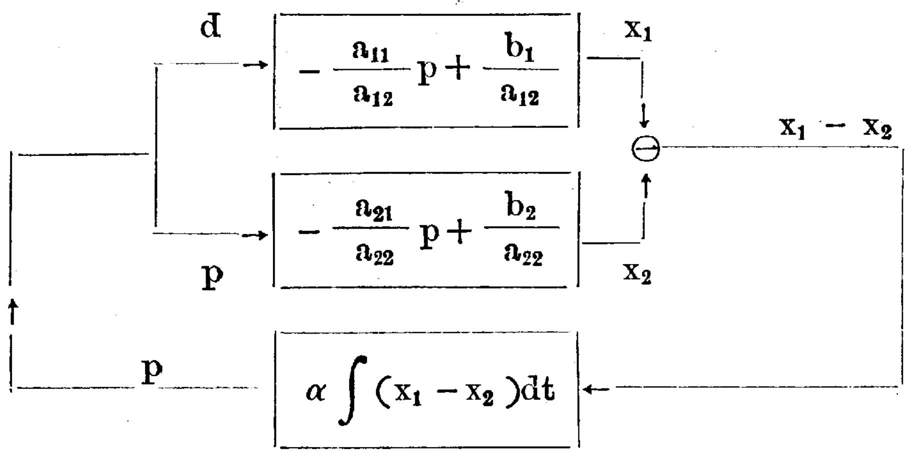
前節では、一つの極大問題を、聯立微分方程式を通じて分權的に解く方法を考えたのであるが、それで總てが盡されたわけではない。微分方程式の代りに定差方程式を使うことによつて、更に幾つかの異つた解き方を考えることができる。

問題は結局、聯立方程式⑽、⑾、⑿を解く手續如何ということになる。λをpと書き改めた上でこれを再び記すならば、

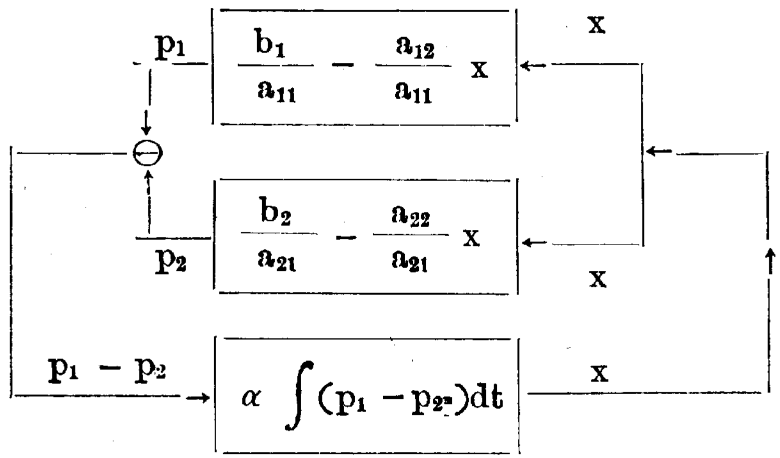
$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{b_1}{a_{11}}-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x-p=0 & (19)\\[2ex] -\dfrac{b_2}{a_{21}}\ \dfrac{a_{22}}{a_{21}}x+p=0 & (20)\end{array}\right.$$

となる。第一節の解法は、pを市場機構を通じて外部的に與え、それから各方程式によつて算出されたxの値の差額に應じてpを修正する、という方法である。これは所謂'zeroin-gservo'による聯立方程式の解法と數学的には全然同

一であつて、この働作をサーヴォ機構の符號を以て示すならば、左の如くなるであろう。



このpとxとの關係を入れ換えても解の値には勿論何の變りもない。則ち、



とすることもできる。これを更に(16)、(17)、(18)と同形の聯立微分方程式で表現すれば、

$$
\begin{cases}
\dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x - p_1 = 0 \\
-\dfrac{b_2}{a_{21}} + \dfrac{a_{22}}{a_{21}} x + p_2 = 0 \\
\dot{x} = \alpha(p_1 - p_2)
\end{cases}
\qquad (21)
$$

となるが、この(21)式は、需要價格 p_1 と供給價格 p_2 との差異に應じて購入、生産量 x を調整することを意味している。これは(18)式と異り、自由競爭市場によつては達成されない。それには政府當局が需給價格の差異に應じて生産量、則ち購入量を直接消費者・生産者に命令することが必要となつてくる。數学的には(18)式と對等であつても、實施上は(18)よりも困難が多いであろう。

この二つの解法をそれぞれ定差方程式化すれば、

$$
\begin{cases}
x_1(t) = \dfrac{b_1}{a_{12}} - \dfrac{a_{11}}{a_{12}} p(t) \\
x_2(t) = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} p(t) \\
p(t+1) - p(t) = \alpha\{x_1(t) - x_2(t)\}
\end{cases}
$$

及び、

$$
\begin{cases}
p_1(t) = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x(t) \\
p_2(t) = \dfrac{b_2}{a_{21}} - \dfrac{a_{22}}{a_{21}} x(t) \\
x(t+1) - x(t) = \alpha\{p_1(t) - p_2(t)\}
\end{cases}
$$

25

となり、それぞれの解は、

$$
\begin{cases}
x_1(t) = -\dfrac{a_{11}}{a_{11}} C_1 \left\{ 1 + \alpha\left(\dfrac{a_{21}}{a_{22}} - \dfrac{a_{11}}{a_{12}} \right) \right\}^t + \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
x_2(t) = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} C_1 \left\{ 1 + \alpha\left(\dfrac{a_{21}}{a_{22}} - \dfrac{a_{11}}{a_{12}} \right) \right\}^t + \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
p(t) = C_1 \left\{ 1 + \alpha\left(\dfrac{a_{21}}{a_{22}} - \dfrac{a_{11}}{a_{12}} \right) \right\}^t + \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}
\end{cases}
$$

及び、

$$
\begin{cases}
x(t) = C_2 \left\{ 1 + \alpha\left(\dfrac{a_{22}}{a_{21}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \right) \right\}^t + \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
p_1(t) = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} C_2 \left\{ 1 + \alpha\left(\dfrac{a_{22}}{a_{21}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \right) \right\}^t + \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
p_2(t) = -\dfrac{a_{22}}{a_{21}} C_2 \left\{ 1 + \alpha\left(\dfrac{a_{22}}{a_{21}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \right) \right\}^t + \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}
\end{cases}
$$

となる。従つてその安定條件は、

$$0 > \frac{a_{21}}{a_{22}} - \frac{a_{11}}{a_{12}} > -\frac{2}{\alpha}$$

及び、

$$0 > \frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} > -\frac{2}{\alpha}$$

となるであろう。従つて、$a_{22}a_{12}$ と $a_{21}a_{11}$ とが同符號であれば、價格パラメーター法で安定せぬときは數量パラメー

ターに切換えることによつて必ずこれを安定化し得る。然し兩者が同符號ならば、上記の二つの條件は恒等となり、安定化できない場合を生ずるであろう。

定差方程式による聯立微分方程式の解法として、右の方法よりもつと一般的に知られているのは、Relaxation Method(7)である。それは、各方程式をそれぞれ一つの變數について解き、右邊各變數の任意の初期値に對する左邊變數の値を求め、それを更に右邊に代入し、これを無限に繰返すことによつて近似解を得る方法である。

各方程式をどの變數について解くかによつて安定條件が變つてくるので、それぞれの場合に分けて考えてみよう。

先ず最初に、需要曲線を表はす(19)式を需要量 x について解き、供給曲線を示す(20)式を供給價格 p について解くならば

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1}{a_{12}} - \dfrac{a_{11}}{a_{12}}p & (22) \\[2ex] p = \dfrac{b_2}{a_{21}} - \dfrac{a_{22}}{a_{21}}x & (23) \end{cases}$$

右の式に於て、消費者は一期前の供給價格 p(t) に對して消費者餘剰を最大ならしむるところの購入量 x(t+1)を決定し、生産者は右の購入量 x(t+1) に對して同業者間の自由競爭を行つて、その限界生産費に等しくなるように供給價格 p(t+2) を決定するものとすれば、(獨占供給者の場合なら marginal-cost-pricing を行えばよい) 次の聯立定差方程式が得られる。

$$\begin{cases} x(t+1) = \dfrac{b_1}{a_{12}} - \dfrac{a_{11}}{a_{12}}p(t) & (22') \\[2ex] p(t+2) = \dfrac{b_2}{a_{21}} - \dfrac{a_{22}}{a_{21}}x(t+1) & (23') \end{cases}$$

これは周知の Cob-web Theorem による市場均衡過程に外ならない。その解を求めれば、

$$p(t)=C_1\left(\frac{a_{11}\,a_{22}}{a_{21}\,a_{12}}\right)^t+\frac{b_1 a_{22}-b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$x(t)=C_2\left(\frac{a_{11}\,a_{22}}{a_{21}\,a_{12}}\right)^t+\frac{b_2 a_{11}-b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{21}}$$

その安定條件は、

$$\left|\frac{a_{11}\;a_{22}}{a_{12}\;a_{21}}\right|<1$$

となる。

更に、(22)′、(23)′を聯立偏微分方程式と考えて原函數を求めれば、

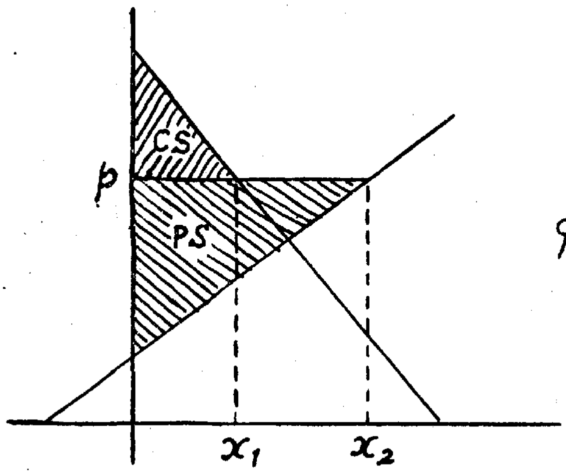
$$\phi(x,p)\equiv\left(\frac{b_1}{a_{11}}x-\frac{a_{12}}{2a_{11}}x^2-px\right)+\left(-\frac{a_{21}}{2a_{22}}p^2+\frac{b_2}{a_{22}}p-\frac{b_2^{\,2}}{2a_{21}\,a_{22}}\right)$$

となつて、本章第一節に示した形と異つてくるが、それは生産者餘剩・消費者餘剩の測り方に若干の差異があるためであつて、その極大點は何れの式をとつても全く變りはない。この關係を圖示すれば第四圖、(i)、(ii)の如くである。

而てこの消費者餘剩と生産者餘剩との合計額を表わすϕは、

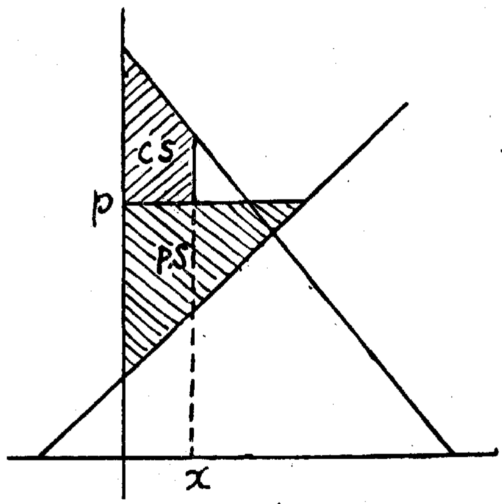
$$\phi_{xx}=-\frac{a_{12}}{a_{11}},\quad \phi_{pp}=-\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

なる性質を有し、從つてa_{11}とa_{12}とが同符號である（價格が上れば需要が減ずる）ならばϕ_{xx}は負であり、a_{21}とa_{22}とが異



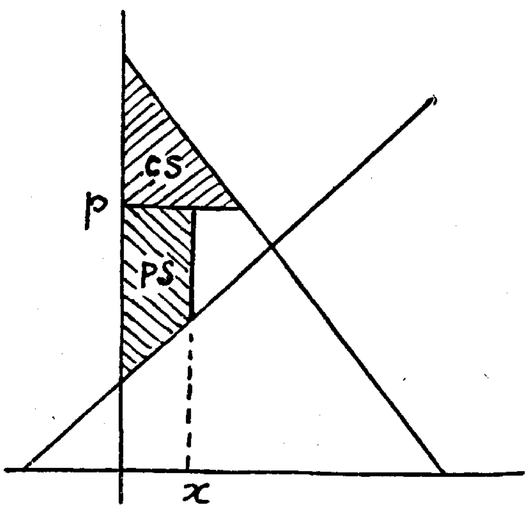
(i)

$$\phi=\left(\frac{b_1}{a_{11}}x_1-\frac{a_{12}}{2a_{11}}x_1^2-px_1\right)+\left(-\frac{b_2}{a_{21}}x_2+\frac{a_{22}}{2a_{21}}x_2^2+px_2\right)$$



(ii)

$$\phi=\left(\frac{b_1}{a_{11}}x-\frac{a_{12}}{2a_{11}}x^2-px\right)+\left(-\frac{a_{21}}{2a_{22}}p^2+\frac{b_2}{a_{22}}p-\frac{b_2^2}{2a_{21}a_{22}}\right)$$



(iii)

$$\phi=\left(\frac{b_1^2}{2a_{11}a_{12}}+\frac{a_{11}}{2a_{12}}p^2-\frac{b_1}{a_{12}}p\right)+\left(px+\frac{a_{22}}{2a_{21}}x^2-\frac{b_2}{a_{21}}x\right)$$

Fig. 4

符號である（價格が上れば供給が減ずる）ならば、ϕ_{pp}は正である。それ故、(22)′、(23)′によつて定められる均衡點x°、p°は、次の如きϕの鞍點解と一致することになる。

$$\phi\,(x^\circ, p^\circ) = \underset{p}{\mathrm{Min}}\ \underset{x}{\mathrm{Max}}\ \phi(x, p)$$

然し、a_{21}とa_{22}とが同符號である（供給曲線が右下りであり、則ち遞增費用狀態である）ならば、ϕ_{pp}も負となり、從つて鞍點解は解消して次のような單純な極值解となるであろう。

$$\phi\,(x^\circ, p^\circ) = \underset{p}{\mathrm{Max}}\ \underset{x}{\mathrm{Max}}\ \phi(x, p)$$

次に(19)、(20)式を、他の變數について解けば、

$$\begin{cases} p = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x & (24) \\[2ex] x = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}}p & (25) \end{cases}$$

これを前と同樣に定差方程式化すれば、

$$\begin{cases} p\,(t+1) = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x(t) & (24') \\[2ex] x\,(t+2) = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}}p(t+1) & (25') \end{cases}$$

これを解けば、

$$p\,(t) = C_1\left(\frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22}}\right)^t + \frac{b_1\,a_{22} - b_2\,a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

30

$$x(t)=C_2\left(\frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22}}\right)^t+\frac{b_2\,a_{11}-b_1\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

となり、その安定條件は從つて、

$$\left|\frac{a_{12}\;a_{21}}{a_{11}\;a_{22}}\right|<1$$

となり、前の場合の逆數になつてくる。それ故、(22′)、(23′)式でやつてみて不安定になるならば、それを(24′)、(25′)に改めることによつて必ず收斂させることができることになる。

この(24′)、(25′)の場合に於ける消費者と生産者との行動樣式は、前回とは異り、次の如くでなければならない。則ち、(24)、(25)を聯立偏微分方程式と考えて、元の函數ϕを求めれば、

$$\phi(x,p)\equiv\left(\frac{b_1^2}{2a_{11}a_{12}}+\frac{a_{11}}{2a_{12}}p^2-\frac{b_1}{a_{12}}p\right)+\left(px+\frac{a_{22}}{2a_{21}}x^2-\frac{b_2}{a_{21}}x\right)=(\text{消費者餘剩})+(\text{生産者餘剩})$$

となる（第四圖iii）。右下り需要曲線と右上り供給曲線とを仮定すれば、

$$\phi_{xx}=-\frac{a_{22}}{a_{21}}<0,\quad \phi_{pp}=\frac{a_{11}}{a_{12}}>0$$

であり、從つて、(24′)、(25′)によつて定まる均衡點x°、p°は、次の如きϕの鞍點解に外ならない。

$$\phi(x^\circ,p^\circ)=\underset{p}{\mathrm{Min}}\;\underset{x}{\mathrm{Max}}\;\phi(x,p)$$

而て、右の極大化さるべき函數ϕの中に於ける生産者餘剩を示す部分に現れている二つの變數x、pのうち、xはこの生産者餘剩部分にのみ現れ、他の消費者餘剩を示す項の中には現れてこないから、pを所與とすればϕのxについ

ての極大條件と、生産者餘剰のxについての極大條件とは完全に一致することになる。則ち、この場合、生産者は與えられた價格の下でいつもその利潤を最大ならしむるようにその生産高を決定すればよい。これに反して、消費者餘剰に含まれる變數pは生産者餘剰を示す項の中にも現れてくるから、消費者の方は斯る獨占的行動は不可能となり、消費者間の自由競争によつてその價格を限界消費者餘剰に一致する點まで引上げなければならない。消費者が一人の場合でもそのような行動をとらせることは不可能ではないが、生産者に於ける marginal-cest psicing の場合と同じくそれは彼等の個人的利益と相反する行動であるので、利己心に訴える場合に比べて、實施上の困難は免れないであろう。

註

1 Samuelson, P. A., Foundations of Economic Analysis, 1948. Harvard Unvi. Press, p. 23, pp. 52—56.

2 Neumann, J. von, A Model of General Economic Equilibrium, Review of Economic Studies, Vol. 13, No. 1.（一橋論叢、第二九卷、第二號、pp. 68—70參照）.

3 Samuelson, P. A., Spatiai Price Equilibrium and Linear Programming, Ameuican Economic Review, June, 1952, pp. 283—303.

4 Arrow, K. J., An Extention of the Basic Theorems of Classical Economics (Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1951, Univ. of California Press, pp. 507—532.)

5 Debreu, G., Efficiency Prices as Guides for Decentralizid Decisions (Symposium on Linear Inequalities and Programming, 1952, Headquarters of the U. S. Air Force, pp. 190—191.)

6 Samueslon, P. A., Foundations, p. 52.

7 柴垣和三雄、計算法、昭和二五年、朝倉書店、p. 69.

第三章　分割極値問題の一般理論

以上の二章を通じて吾々は、種々の極値問題を、若干のパラメーターを介在させることにより、或は各變數について異時的に解くことにより、幾つかの獨立決定者の極値問題に分割し得ることを示した。然し、それは、第一章に於ては concave programming に限定され、第二章に於ては一變數の二次代數方程式という極めて特殊な場合を取上げて論ぜられたにすぎない。本章では、これをより一般的な形で、從つて具體例よりも寧ろ抽象的な數学上の問題として取上げてみたい。

一 無拘束極値問題

前章で二變數線形代數聯立方程式の場合について説明した Relaxation Method を一般化するならば、左の如くなるであろう。則ち、極大化さるべき函數を

$$g(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

とするならば、gを極大又は極小ならしめるところのxの値x°に對しては勿論次の關係が成立たなくてはならない。

$$g^{x_i}=0 \qquad (i=1,\ldots\ldots,n)$$

右の各方程式を、それぞれ異れる變數x_iについて解けば、

$$x_i=f_i(x_1,\cdots, x_{i-1}, x_{i+1},\cdots, x_n) \qquad (i=1,\cdots,n)$$

となるから、これを更に次の聯立定差方程式に改める（右肩の記號は時點を表わす）。

$$x_i^{t+1}=f_i(x_1^t,\cdots, x_{i-1}^t, x_{i+1}^t,\cdots x_n^t) \qquad (i=1,\cdots,n) \qquad (26)$$

零時點に於けるn個のxに對して任意の初期値を與えれば、次の時點に於けるxの總ての値を簡單な算術的計算によつて決めることができる。これを更に右邊に代入して計算を繰返した結果、各xが特定のx°に收斂するならば、この

x°はgを極大又は極小ならしめるところの解に一致する。またその場合には、$g_{x_i}=0$をそれぞれx_iについて積分した函數をn人の獨立的決定者の目的函數として與え、x_iを各人の決定變數とするならば、而てまた、他の$(n-1)$個の變數の現在値についての完全なcommunication channelが與えられるならば、極値解x°を、これらの獨立決定變數の獨立的極値解の收斂値として分權的に求めることが可能であろう。

右の手續によつて直ちに收斂性が確保されない場合でも、更に、陽表化さるべき左邊の決定變數を適當に選び直すことによつて收斂性を得ることができるであろう。また、適當な變換を施すことによつて、その收斂性を強めることも可能である。(1)

以上に於ては、極大化さるべき函數gの形については何等の限定をも加えなかつたのであるが、gが幾つかの函數の和に分割し得るならば、各分權的決定者の擔當する函數の形を簡單化し、又はその中に含まれる變數の數を減少させることが可能となる。例えば、

$$g(x_1,\cdots,x_n)=g_1(x_1,\cdots x_n)+g_2(x_1,\cdots x_n)$$

であるならば、單純なRelaxation Methodによるときは、各人の決定函數は、

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n)+\frac{\partial g_2}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n)=0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

となる。そこでg_1とg_2とに含まれるx_iを一應別個の變數x_i及$\bar{x}_i$と考えるならば、頭初の無拘束極大問題は、$x_i=\bar{x}_i$なるn個の拘束條件の下に

$$g_1(x_1,\cdots,x_n)+g_2(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$$

を極大ならしめよ、という拘束條件附極値問題に轉化される。その必要條件は、

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial g_1}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n)+u_i=0 & & (27)\\
\dfrac{\partial g_2}{\partial \bar{x}_i}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)-u_i=0 & (i=1,\cdots,n) & (28)\\
x_i-\bar{x}_i=0 & & (29)
\end{cases}
$$

となり、方程式の數はn個から$3n$個に增加するけれども、各方程式は、g_1又はg_2の何れか一つ丈に關係するので、各人の決定函數は簡單な形に改められたことになる。gを一企業の利潤函數と考えれば、g_1、g_2はその二つの部門を表わし、u_iは第一部門から第二部門への中間製品x_iの內部振替價格として理解することができ、(27)は第一部門の極大部門利潤條件を、(28)は第二部門のそれを、表わすものと考えることができる。

パラメーターu_iの決め方は、

$$\dot{u}_i=\alpha_i\,(x_i-\bar{x}_i)$$

とすればよい。gが三つ以上の函數の和に分割される場合にも、同一變數x_iをx_i、$\bar{x}_i$、$\bar{\bar{x}}_i$の三つに分けることにより、右と同樣の簡易化が可能である。

變數xのうち、g_1かg_2の何れか一方だけにしか現れないものがあるならば、解かれるべき方程式の數は、斯る變數の數の二倍だけ少くなり、必要な決定者の人數もそれだけ少くてすむことになる。極端な場合には

$$g(x_1,\cdots,x_n)\equiv g_1(x_1)+\cdots\cdots+g_n(x_n)$$

となつて、

$$\frac{\partial g_i(x_i)}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

は、唯一つの變數を含むだけとなるから、完全な意味での分權化が可能となり、各分權的決定者相互間の commun-ication は全然不要となる。

二　非負値條件附極値問題

前節に於ては各決定變數の變域については何等の制約も加えなかつた。然し、問題の經濟的意味に重點が置かれるならば、これらの變數の多くのものは負値をとることは許されないであろう。例えば、負の在庫量、負の利子率、負の加工時間等は、非可逆的な經濟現象にとつては無意味である。そこで本節に於ては、各變數は負値をとり得ない、という條件の下で、第一節の極値問題を再檢討してみたい。

この非負値條件附極値問題については、既に線形計畫法或は concave programming の問題として取上げられているが、[2] 何れも不等式拘束條件附という特別の場合について論ぜられているにすぎない。本節では、更にこれを一般的な形で取上げようとするのである。非負値條件を解析的に取扱うためには、次のような變換を行うの便利である。

$$x_i = y_i^2 \qquad (i=1,\cdots,n) \qquad (y_i \text{ is real})$$

右の變換を加えた上で、gの極値化のための必要條件を求めれば、

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \partial y_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

則ち、

$$x_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

が得られる。この聯立方程式からx^0_iの値を求めることは、非負値條件を伴わない通常の場合に比べて面倒であるが、不可能ではない。先ずx^0_1が零の場合と正の場合とに分け、その各をx^0_2が零の場合と正の場合とに分け、というようにして、2^n組の解を求め、それぞれに對するgの値のうちから最大のものを選びだす、という大變な手間をかけなければならないので、nの數が多いほど多大の時間を要する。Simplex Method に相當する何等かの迅速な計算方法の出現が望まれるわけである。若し極値點が一つだけしか存在しないならば、先ず非負値條件を除いて普通の實變域の極値問題として解き、その解のうちで負値をとるものがあつたならば、それを零と置いたうえで、殘りの變數について問題を解き直せばよい。二つ以上の極値點を含む問題について、この簡易解法がどの程度にまで利用できるか、これも殘された問題としておこう。

以上の必要條件に對し、更に充分條件をも檢討しなければならない。全變數の解が非負であれば、xについての充分條件とyについての充分條件とは全く同一となる。何となれば

$$\begin{vmatrix} g_{y_1y_1} & \cdots\cdots & g_{y_1y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{y_my_1} & \cdots\cdots & g_{y_my_m} \end{vmatrix} = 2^m(y_1\cdots\cdots y_m)^2 \begin{vmatrix} g_{x_1x_1} & \cdots\cdots & g_{x_1x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{x_mx_1} & \cdots\cdots & g_{x_mx_m} \end{vmatrix}$$

であるから、右の二つの行列式の符號はyの正負に拘らず常に等しい。

然しながら、x^0_iの一部又は全部が零であり、且つ$g^0_{x_i}$が零でない場合には、x^0_i點に於て函數gの値は不連續的に變化し、$x_i=0$の軸を境として、$x_i>0$のgのグラフは$x_i<0$のgのグラフの鏡像となる。x^0が單一變數であれば、それがgを極大ならしめるための必要條件は

$$\frac{dg^0}{dx}<0$$

であり、同じく極小ならしめるためには

$$\frac{dg^0}{dx} > 0$$

であれば充分である。然し、二つ以上の多變數の場合の充分條件を考えることは、右のような不連續點に於ける極値解の場合には困難であると思われる。専門家の御指示を仰ぎたい。Kuhn and Tucker が問題を concave 函數に限つたのも、この難點を避けるためであつたと想像するのは邪推であろうか。gがxについて concave であるならば(linear な場合をも含む)、その極大充分條件は、

$$\frac{\partial g^0}{\partial x_i} < 0$$

が各變數について成立てばよい。また、gが convex であるならば、その極小充分條件は、

$$\frac{\partial g^0}{\partial x_i} > 0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

以上の結果を纏めるならば、

(一) x^0が、xについての concave な函數gを最大ならしめる解であるための必要充分條件は、

$$\left\{\begin{array}{l} x_i^0 \dfrac{\partial g^0}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial g^0}{\partial x_i} \leqq 0 \end{array}\right. \qquad (i=1,\cdots,n)$$

(二) x^0が、xについての convex な函數gを最小ならしめる解であるための必要充分條件は、

$$\begin{cases} x_i^\circ \dfrac{\partial g^\circ}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial g^\circ}{\partial x_i} \geqq 0 \end{cases} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

これを前節の方法によつて分權化しようと思えば、(26)の代りに、

$$x_i^{t+1} = f_i\left\{\varphi(x_1^t), \cdots\cdots, \varphi(x_{i-1}^t), \varphi(x_{i+1}^t), \cdots\cdots, \varphi(x_n^t)\right\} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

とすればよく、また(27)、(28)の代りに

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1\left\{\varphi(x_1), \cdots\cdots, \varphi(x_{i-1}), x_i, \varphi(x_{i+1}), \cdots\cdots, \varphi(x_n)\right\}}{\partial x_i} + u_i = 0 \\ \dfrac{\partial g_2\left\{\varphi(\bar{x}_1), \cdots\cdots, \varphi(\bar{x}_{i-1}), \bar{x}_i, \varphi(\bar{x}_{i+1}), \cdots\cdots, \varphi(\bar{x}_n)\right\}}{\partial \bar{x}_i} - u_i = 0 \\ u_i = \alpha_i\left\{\varphi(x_i) - \varphi(\bar{x}_i)\right\} \end{cases}$$

として解けばよいであろう。右のu_iが負値をとらぬことについては、別途の證明を必要とする。

三　非線形計畫法

通常の等式拘束條件附極値問題は既に吾々の使い慣れたものであるから、これについての再説の必要はない。不等式拘束條件附且つ非負値條件附の極値問題は、第一章に於て既に linear programming 或は concave programming

39

40

として説明ずみであるが、本節では更にこれを一般化して考えてみたい。

問題の理解を容易にするために、これを通常の連續的微分可能函數の等式拘束條件の場合に換元して考えることにする。各變數の非負値條件は、前節同様

$$x_i = y_i^2 \qquad (i=1,\cdots\cdots,n) \quad (y \text{ is real})$$

なる變換によつて、一般の實變數の問題に換元することができる。不等式拘束條件は、各式にそれぞれ一個の非負變數を加えることによつて、これを等式化することが可能である。

$$f_j(x_1,\cdots,x_n)-x_{n+j}=0 \qquad (j=1,\cdots,m)$$

このような二つの修正により、吾々の問題は、

$$f_j(y_1^2, y_2^2\cdots, y_n^2)-y_{n+j}^2=0 \qquad (j=1,\cdots,m)$$

なる拘束條件の下で、y^2の函數gを極大にせよ、という吾々の使い慣れた形に變換される。これを通常のラグランシュ乘數法によつて解けば、その必要條件は

$$\phi(y^2,u)\equiv\phi x,u)=g(x)+\sum_1^m u_j f_j=g(y^2)+\sum_1^m u_j(f_j-y_{n+j}^2)$$

とおいて、

$$\begin{cases} \phi_{y_i}^0 = 2y_i^0 g_{x_i}(x^0)+\sum_{j=1}^m 2y_i^0 u_j^0 \dfrac{\partial f_j(x^0)}{x_i} = 2y_i^0 \phi_{x_i}(x^0)=0 & (i=1,\cdots,n) \\ \phi_{y_{n+j}}^0 = -2y_{n+j}^0 u_j^0 = 0 & (j=1,\cdots,m) \\ \phi_{y_j}^0 = f_j^0 - y_{n+j}^2 = 0 & (j=1,\cdots,m) \end{cases}$$

となる。これを再びxに變換すれば

$$\begin{cases} x_i^0 \varphi^0_{x_i} = 0 \\ u_j^0 \varphi^0_{u_j} = 0 \end{cases}$$

が得られる。x^0、u^0が悉く正であれば、右の必要條件は通常のラグランシュ乗數法の必要條件 $\varphi^0_{x_i}=0$, $\varphi^0_{u_j}=0$ に一致する。

充分條件についても、x^0、u^0が悉く正であれば、それは前節の場合と同樣に、通常のラグランシュ乗數法の場合と完全に一致するが、然らざる場合にはその決定は困難である。この一般的な函數gの極値についての充分條件が解決されるならば、吾々は最も一般的な形に於ける non-linear programming の問題を解決したことになるであろう。勿論この場合には二つ以上の極値を生ずることが可能であり、從つて concave programming や linear programming の場合に於けるような maximum in the lage の性格は失はれるであろうけれども、それは問題の本質上已を得ないことである。

右の場合に於ける分權的決定の問題は既に第一章に於て詳しく論じてあるので再說を避ける。

註

1 Pickens, D. H., Electronic Analog Computer Fundamentals, Review of Scientific Instruments, Dec. 1951.

2 Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., Nonlinear Programming. (Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Univ. of California Press. 1951, pp. 481—492.)

（昭和廿八年四月十四日）

SOLUTIONS OF PROGRAMMINGS BY DIFFERNTIAL EQUATIONS

(English summary of "Programming and Decentralization", Chapter 1, written in Japanese in this issue.)

Tairoku Kose

SUMMARY

Linear programmings are possible to be solved perfectly by simplex method, but there can be other methods of solution using many kinds of systems of differential equations. Two systems of differential equations suggested by Prof. Samuelson [1] were mathematically incomplete. Afterwards, Messrs. Brown and Neumann [2] gave a complete method of solution for a zero-sum two-person game, which was translated into solutions of linear programmings by the author [3]. The defects of this method are poor convergence and violent vibration.

The purpose of this note is to give new differential equations that are free from these defects and can be applied to the general convex programmings, and to explain economic implications of them.

1. SAMUELSON'S DIFFERENTIAL EQUATIONS.

42

Linear programming is a problem to find a vector x°, that maximizes a linear function $c'x$ of non-negative variables x subject to a system of linear inequalities $Ax \leqq b$. The well-known duality theorem assures the equality of this maximal solution $c'x^\circ$ to the minimal solution $b'u^\circ$ of its dual problem, that is, a problem to find a vector u° that minmizes $b'u$ of non-negative variables u subject to a system of linear inequalites $A'u \geqq c$.

Samuelson's first equations are as follows:

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) & (i=1,\cdots,m) \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dot{x}_j = \beta_j \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \right) & (j=1,\cdots,n) \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ x, u \geqq 0 \ , \ \alpha, \beta > 0 & \\ \lim_{t\to\infty} x = x^\circ, \ \lim_{t\to\infty} u = u^\circ & \end{cases}$$

Because the characteristic roots of the above equations are all purely imaginary, u and x oscillate permanently without damping. Hence we cannot determine the definite values of u°, x°. This is also the case with the remaining variables even when some of u and x become zeros at some points of time.

He admits these defects himself and suggests the second system:

$$
\begin{cases}
\dot{u}_i = \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) + \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i\right)x_j \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \\
\dot{x}_j = \beta_j \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i\right) - \sum_{i=1}^{m} M_{ij}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right)u_i \cdots\cdots\cdots\cdots (4) \\
x, u \geqq 0 \ , \ \alpha, \beta > 0 \\
\lim_{t\to\infty} u = u^{\circ} \ , \ \lim_{t\to\infty} x = x^{\circ}
\end{cases}
$$

It is difficult to say anything in general about their convergence. When u° and x° are all positive and limited, they satisfy the above equations, because $(\sum_j a_{ij}x_j^{\circ} - b_i)$ and $(c_j - \sum_i a_{ij}u_i^{\circ})$ are all zero. But, if u° and x° contain zeros, it is possible for these terms to take some negative values, which do not satisfy the above equations. Hence, u and x do not always converge to the right solutious u° and x°, even when constants α, β, K, M are adjusted suitably.

2. BROWN AND NEUMANN'S EPUATIONS

Messrs. Brown and Neumann proved that an optimal mixed strategy v° of a maximizer for a zero-sum two-person game, having anti-symmetric game matrix B, is equal to the stationary solutions of the following system of differential equations:

$$
\begin{cases}
v_i = \varphi\left(\sum_{j=1}^{k} b_{ij}v_j\right) - v_i \sum_{i=1}^{k} \varphi\left(\sum_{j=1}^{k} b_{ij}v_j\right) \qquad (i=1,\cdots k) \qquad (5) \\
\varphi\left(\sum_{j=1}^{k} b_{ij}v_j\right) = \mathrm{Max}\left(0, \sum_{j=1}^{k} b_{ij}v_j\right) \\
\lim_{t\to\infty} v = v^{\circ}
\end{cases}
$$

Consider the special type of anti-symmetric game matrix B,

$$B = \begin{vmatrix} 0 & A & -b \\ -A' & 0 & c \\ b' & -c' & 0 \end{vmatrix}$$

then we can derive the solutions u°, x° of linear programming from the stationary solutions v° of (5), by the following simple transformations :

$$\begin{cases} u_i^{\circ} = \dfrac{v_i^{\circ}}{v^{\circ}_{m+n+1}} & (i=1,\cdots,m) \\ x_j^{\circ} = \dfrac{v^{\circ}_{m+j}}{v^{\circ}_{m+n+1}} & (j=1,\cdots,n) \end{cases}$$

The set set of differential equations of games (5) can be converted through these transformations into those of linear programmings :

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) - u_i\,\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} b_i u_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \quad (i=1,\cdots,m) & \cdots\cdots(6) \\ \dot{x}_j = \varphi\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i\right) - x_j\,\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} b_i u_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \quad (j=1,\cdots,n) & \cdots\cdots(7) \\ \varphi\{f(x,u)\} = \mathrm{Max}\{0, f(x,u)\} & \\ \lim_{t\to\infty} u = u^{\circ}, \quad \lim_{t\to\infty} x = x^{\circ} & \end{cases}$$

These variables u, x, starting from arbitrary non-negative values, converge necessarily to the

45

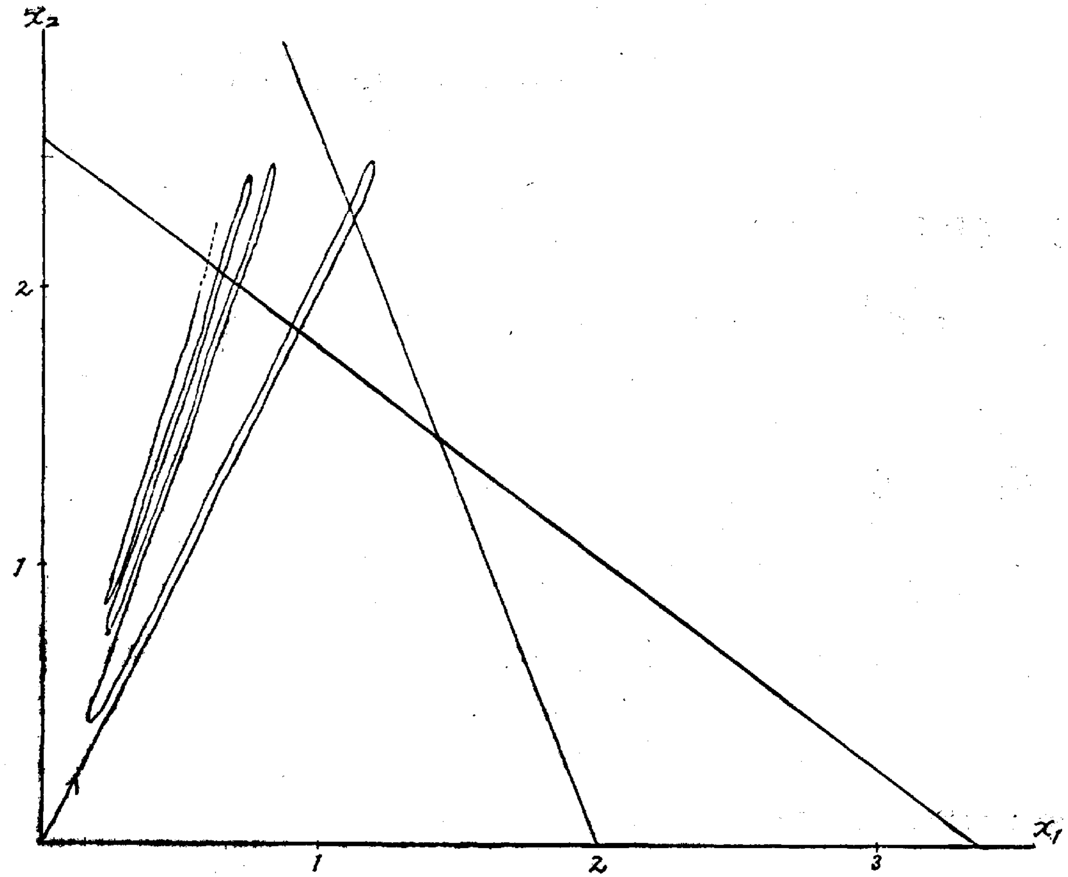


Fig. 1

The graph shows the approximate solution for the linear programmig problem: "maximize $x_1 + 2x_2$ under the conditions, $3x_1 + 4x_2 \leqq 10$, $5x_1 + 2x_2 \leqq 10$; $x \geqq 0$."

programming solutions u^0, x^0. Nevertheless, their vibration is too violent for these equations to be used as a method of practical design of programming computer or an economic model of market mechanism (see Fig. 1).

3. NEW EQUATIONS

Messrs. Kuhn and Tucker [4] proved the following theorem of covex programmings.

Theorem: Let the equations $g(x)$, $f_1(x), \cdots, f_m(x)$ be concave as well as differentiable for $x \geqq 0$. Then, necessary and sufficient conditions for x^0 to maximize $g(x)$ subject to the conditions, $f_1(x) \geqq 0, \cdots, f_m(x) \geqq 0$, $x \geqq 0$, are that some x^0 and u^0

46

satisfy the following conditions for the equation $\phi(x, u) \equiv g(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$:

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial \phi(x^{\circ}, u^{\circ})}{\partial x_j} \leqq 0, \qquad \frac{\partial \phi(x^{\circ}, u^{\circ})}{\partial x_j} x_j^{\circ} = 0, \qquad x^{\circ} \geqq 0$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial \phi(x^{\circ}, u^{\circ})}{\partial u_i} \geqq 0, \qquad \frac{\partial \phi(x^{\circ}, u^{\circ})}{\partial u_i} u_i^{\circ} = 0, \qquad u^{\circ} \geqq 0$$

The new equations of programmings that I am going to reduce to this theorem are:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{u}_i = -\alpha_i \dfrac{\partial \phi\{\varphi(x), u\}}{\partial u_i} - \beta_i \dfrac{\dot{\partial} \phi\{\varphi(x), u\}}{\partial u_i} & (i=1, \cdots, m) \qquad \cdots\cdots(8) \\ \dot{x}_j = \gamma_j \dfrac{\partial \phi\{x, \varphi(u)\}}{\partial x_j} + \delta_j \dfrac{\dot{\partial} \phi\{x, \varphi(u)\}}{\partial x_j} & (j=1, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots(9) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = \mathrm{Max}(0, x), \ \varphi(u) = \mathrm{Max}(0, u) \\ \lim\limits_{t \to \infty} u = u^{\square}, \ \lim\limits_{t \to \infty} x = x^{\square} \\ \varphi(u^{\square}) = u^{\circ}, \ \varphi(x^{\square}) = x^{\circ} \end{array} \right.$$

The proof is divided into four cases:

(Case 1) When some of $u^{\square}$, $x^{\square}$ take positive infinite values, we can change the values of constants $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so as to evade such phenonema.

(Case 2) When all of $u^{\square}, x^{\square}$ take non-negative finite values, $u^{\square} = \varphi(u^{\square})$, $x^{\square} = \varphi(x^{\square})$ and all of $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{\partial} \phi\{\varphi(x^{\square}), u^{\square}\}/\partial u$, $\dot{\partial} \phi\{x^{\square}, \varphi(u^{\square})\}/\partial x$ vanish. Then,

from (8) and (9) we get:

47

$$\frac{\partial\phi\{\varphi(x)^{\square},u^{\square}\}}{\partial u}=\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square},u^{\square})\}}{\partial u}=0$$

$$\frac{\partial\phi\ \{x^{\square},\varphi(u^{\square})\}}{\partial x}=\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square},u^{\square})\}}{\partial x}=0$$

Hence, $\varphi(u^{\square},x^{\square})$ satisfies the whole conditions (i) aud (ii) and are equal to the convex programming solutions u°, x°.

(Case 3) Some of $u^{\square}$, $x^{\square}$ take negative finite values, others being non-negative finite. In this case, $\varphi(u_i^{\square})=0$ and $\varphi(x_j^{\square})=0$ for the negative $u_i^{\square}$, $x_j^{\square}$ and all of $\dot{u}_i$, $\dot{x}_j$, $\dot{\partial}\phi\{\varphi(x^{\square}),u^{\square}\}/\partial u$, $\dot{\partial}\phi\{x^{\square},\varphi(u^{\square})\}/\partial x$ vanish. Then from (8) and (9) we get:

$$\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}),u^{\square}\}}{\partial u}=\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square},u^{\square})\}}{\partial u}=0 \qquad \cdots\cdots(10)$$

$$\frac{\partial\phi\ \{x^{\square},\varphi(u^{\square})\}}{\partial x}=0 \qquad \cdots\cdots(11)$$

$\phi\{x,\varphi(u^{\square})\}$ is a concave function of x, because g and f_i are all concave, and its derivative $\partial\phi\{x,\varphi(u^{\square})\}/\partial x$ decreases monotonically as x increases in the region $x\geqq x^{\square}$. Therefore the equation (11) means for the negative $x_j^{\square}$ that

$$\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square},u^{\square})\}}{\partial x_j}<0,\quad \frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square},u^{\square})\}}{\partial x_j}\varphi(x_j^{\square})=0.$$

Accordingly $\varphi(u^{\square},x^{\square})$ satisfies both conditions (i) and (ii), even when $u^{\square}$, $x^{\square}$ include some negative finite values.

(Case 4) Some of $u^{\square}$, $x^{\square}$ take negative infinite values, others being finite.

In this case, $\varphi(u_i^{\square})=0$, $\varphi(x_j^{\square})=0$ for the negative infinte $u_i^{\square}$, $x_j^{\square}$ and $\dot{u}_i<0$, $\dot{x}_j<0$, $\dot{\partial}\phi\{\varphi(x^{\square}), u^{\square}\}/\partial u_i \geqq 0$, $\dot{\partial}\phi\{x^{\square}, \varphi(u^{\square})\}/\partial x_j \leqq 0$.

Then from (8) and (9)

$$\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}), u^{\square}\}}{\partial u_i}=\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}, u^{\square})\}}{\partial u_i}>0 \qquad \cdots\cdots(12)$$

$$\frac{\partial\phi\{x^{\square}, \varphi(u^{\square})\}}{\partial x_j}<0 \qquad \cdots\cdots(13)$$

We can derive from (13) the following relations because $\phi\{x, \varphi(u^{\square})\}$ is concave:

$$\frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square}, u^{\square})\}}{\partial x_j}<0, \qquad \frac{\partial\phi\{\varphi(x^{\square},u^{\square})\}}{\partial x_j}\varphi(x_j^{\square})=0.$$

Therefore both conditions (i) and (ii) are satisfied by $\varphi(x^{\square}, u^{\square})$ even when $x^{\square}$, $u^{\square}$ include some negative infinite values.

Then we can conclude that these new equations (8) and (9) give solutions of covex programmings except in the case of positive infinite values.

This method assures rapid convergence as well as easy calculation (see Fig. 2). Compared with the previous methods, this procedure can easily be mechanized for analogy methods using vacuum-tube rectifires as a method of assuring nonnegativity, because they need no multiplication

49

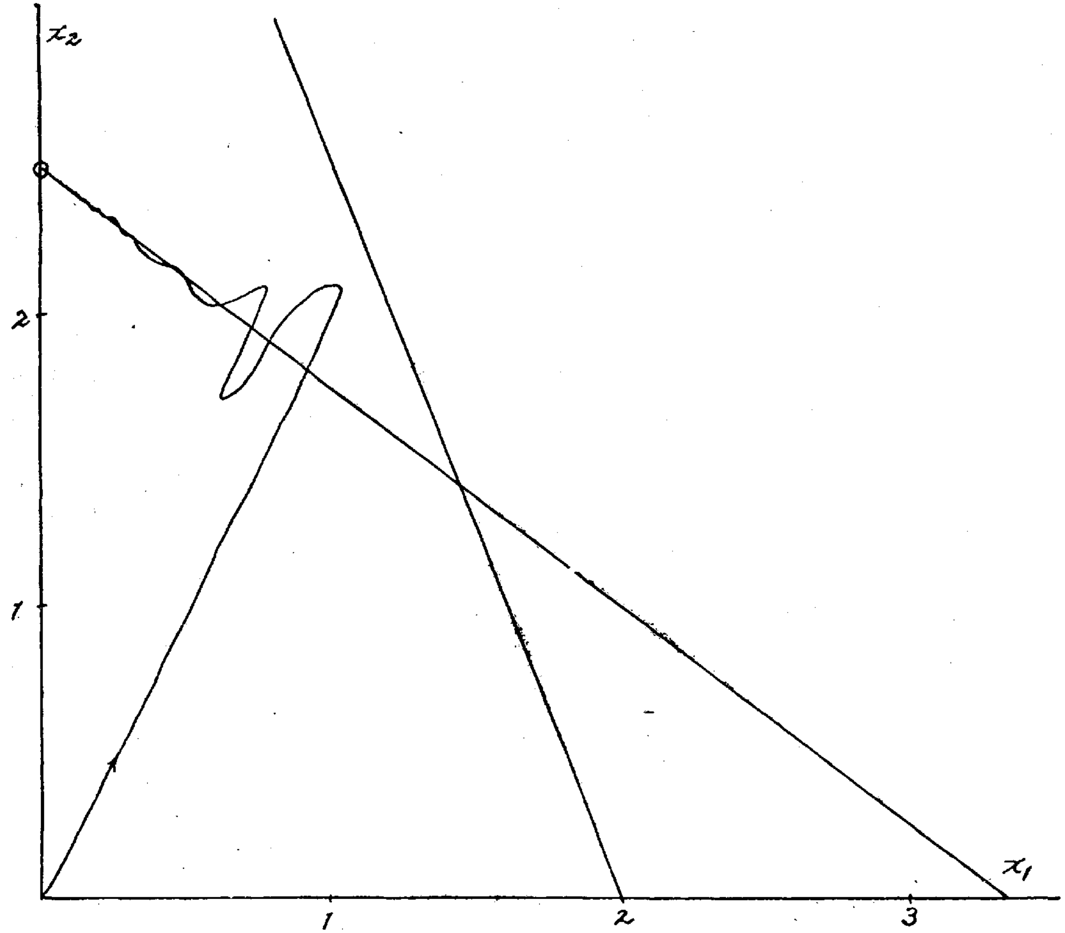


Fig. 2

The problem which is solved in this graph is identical to that of the Fig. 1.

of variables in the linear case.

We can get more rapid convergence by replacing the above equations (9) with the following ones:

$$\frac{\partial \phi\{x, \varphi(u)\}}{\partial x_j} = 0 \quad (j=1,\cdots,n) \qquad \cdots\cdots(9')$$

This improvement is not able to be applied to the linear programming because (9)′ does not contain variables x in this case.

4. ECONOMIC IMPLICATIONS

We can deduce economic meauings from the above equations by the following interpretation of the variables and constants:

$g(x)$ ……sales that are realizable from the products$(x_1,\cdots,x_n)$.

$-h_1(x)$ …excess demand for the

fixed facility i.

u_i ......calculating price of the fixed facility i.

Then $\phi(x^{\circ}, u^{\circ})$ is equal to the maximum total profit of a firm under the limitations of production technologies and fixed facilities. And $\partial\phi/\partial x_j$ is the marginal internal profit π_j of the x_j manufacturing department and $-\partial\phi/\partial u_i$ is the excess demand ϵ_i for the fixed facility i.

Accordingly, systems of equations of the preceeding sections are able to be rewritten as follows:

$$
[\text{ I }]\left\{\begin{array}{ll}
\dot{u}_i = \alpha_i \epsilon_i & \cdots\cdots (1)' \\
\dot{x}_j = \beta_j \pi_j & \cdots\cdots (2)' \\
x, u \geqq 0;\ \alpha, \beta > 0 & \cdots\cdots
\end{array}\right.
$$

$$
[\text{ II }]\left\{\begin{array}{ll}
\dot{u}_i = \alpha_i \epsilon_i + \sum K_{ij}\pi_j x_j & \cdots\cdots (3)' \\
\dot{x}_j = \beta_j \pi_j - \sum M_{ij}\epsilon_i u_i & \cdots\cdots (4)' \\
x, u \geqq 0;\ \alpha, \beta > 0 &
\end{array}\right.
$$

$$
[\text{ III }]\left\{\begin{array}{ll}
\dot{u}_i = \varphi(\epsilon_i) - u_i \varphi(-\sum u_i \epsilon_i - \sum x_j \pi_j) & \cdots\cdots (6)' \\
\dot{x}_j = \varphi(\pi_j) - x_j \varphi(-\sum u_i \epsilon_i - \sum x_j \pi_j) & \cdots\cdots (7)'
\end{array}\right.
$$

$$
[\text{ IV }]\left\{\begin{array}{ll}
\dot{u}_i = \alpha_i \epsilon_i \{\varphi(x)\} + \beta_i \dot{\epsilon}_i \{\varphi(x)\} & \cdots\cdots (8)' \\
\dot{x}_j = \gamma_j \pi_j \{x, \varphi(u)\} + \delta_j \dot{\pi}_j \{x, \varphi(u)\} & \cdots\cdots (9)' \\
\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 &
\end{array}\right.
$$

51

$$
[\,\mathrm{IV}'\,]\begin{cases} \dot{u}_i = \alpha_i\, \epsilon_i\{\varphi(x)\} + \beta_i\, \dot{\epsilon}_i\{\varphi(x)\} \cdots\cdots (8)'' \\ \dfrac{\partial \phi\{x, \varphi(u)\}}{\partial x_j} = 0 \cdots\cdots (9)'' \\ \alpha, \beta > 0 \end{cases}
$$

The first equation of each system repressents the behavior pattern of the custodian of the fixed facility i and the second represents that of the head of the manufacturing department j. (9)'' means the profit-maximizing behavior of the manufacturing department If we compare s system III with IV or IV′ from the view point of decentralized management, we can easily conclude the superioriority of the latter systems, in which every decentralized decision-maker needs not know the values ϵ_i and π_j of the other decision-makers. The second terms $\dot{\epsilon}_i$, $\dot{\pi}_j$ of the right side of (8)′, (9)′ are nothing but the decision-makers' expectations that have stabilizing effects on this pseudo-market-mechanism.

Bibliography

(1) Samuelson, P. A., Market Mechanism and Maximization, The Rand Corporation, 1949, pp. 76—78.
(2) Brown, G. W. and Neumann, J. von, Solutions of Games by Differntial Equations, Annals of Mathematics Study No. 24, 1950, pp. 73—79.
(3) Kose, T., Iterative Solition of Linear Programming, The Economic Review, Nov., 1952, pp. 29—58 (in Japanese).
(4) Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., Nonlinear Programming, Proceedings of the Second Berkeley Symposium, 1951, pp. 481—492.

(Aprli, 1953)