割引現在価値と内部収益率

中　村　健　一

1．人的投資と内部収益率

労働経済学の教科書で，人的投資の議論が紹介される場合，まず投資の意思決定の基準として，内部収益率法が紹介されることが多い。

ところがこのような場合，唐突に説明抜きで内部収益率の定義式が提示されるのみであることが多く，前後の文脈に照らして，教員や学生は説明や理解に困惑することが多い。

そこで本稿は，そのような場面に際して，内部収益率による基準を初学者にも直観的に了解可能な幾何学的な形式の説明で提示することを意図するものである。

2．割引現在価値

内部収益率は割引現在価値と密接な関係を持っている。そこでまず割引現在価値を幾何学的に特定しよう。

単純なケースを考えて，第１期と第２期に収益 w_i，すなわち（w_1，w_2）が存在するとする。このような場合の２期間の消費 c_i の組合せ（c_1，c_2）の組合せは，所与の市場利子率 r の下で，以下の制約式を満たさなければならない。

$$(1+r)(w_1-c_1)+(w_2-c_2)=0$$

上の式を変形して，予算制約式のグラフの式を求めると，

$$c_2 = -(1+r)\,c_1 + [(1+r)\,w_1 + w_2]$$

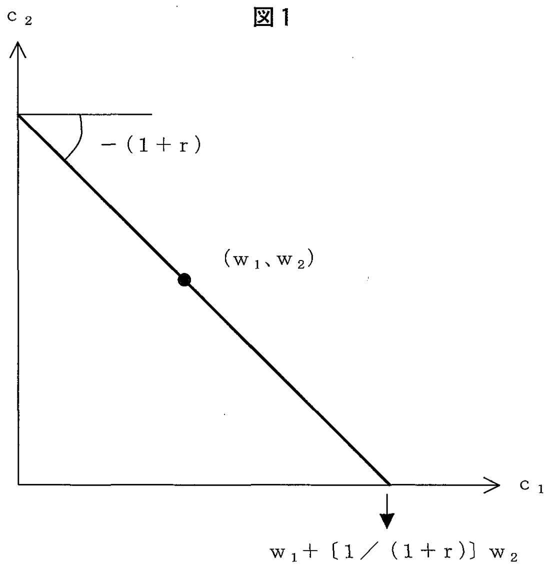
となり，これをグラフに書くと図１となる。

ところで，このグラフの c_1切片を $c_2=0$とおいて求めると，

$$c_1 = w_1 + [1/(1+r)]\,w_2$$

となり，割引現在価値とは収益の制約式の初めの期の軸の切片であることがわかる。これより割引現在価値の大小で収益の機会を評価することは，消費集合の大小を評価することと同値となることが分かる。

図１



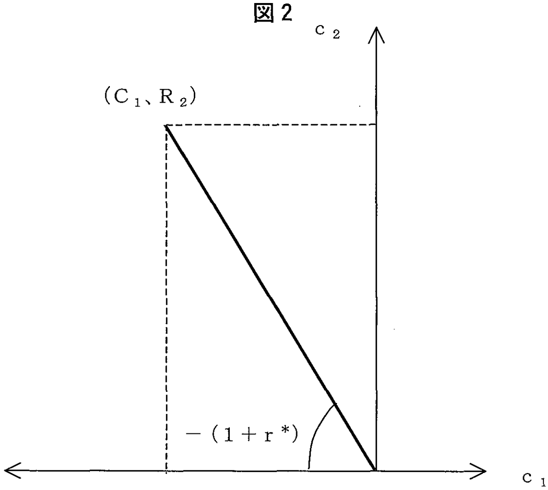
３．内部収益率法

内部収益率とは，多期間にわたる費用と収益の流列の割引現在価値をゼロとするような割引率のことである。

そこで，まず第1期に費用C_1を要請し，第2期に収益R_2をもたらすような最も単純な投資機会を考えて見よう。費用はマイナスの収益であるから，生産における投入物と同様に負値で記述すると，定義と前節の結論を考慮すると，内部収益率r^*とは，図2にみられるような投資機会（C_1，R_2）と原点を結んだ直線の傾きの絶対値の利子率部分であることが分かる。

図から読み取れるのは（$1+r^*$）が投入量に対する産出量の比，すなわち投資の限界効率を示しているということであり，内部収益率はこのように素朴な投資効率（限界生産性）に対応していることをみることができる。

図2



このように与えられた投資機会（C_1, R_2）は2期間の収益の有様を示すから，それが与える予算制約式

$$c_2 = -(1+r)\,c_1 + [(1+r)\,C_1 + R_2]$$

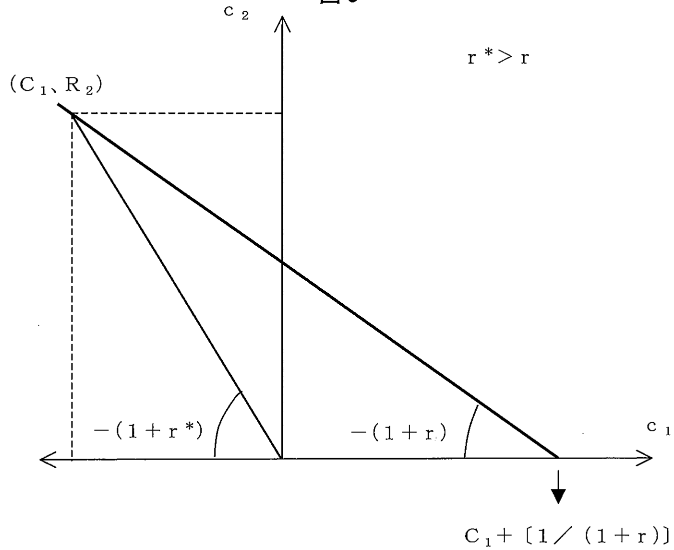
を考えることができる。

いま市場利子率rが内部収益率r^*より小さいとするならば，この予算制約式のc_1切片である（C_1，R_2）の割引現在価値$C_1+[1/(1+r)]\,R_2$は，

$$0 = C_1 + [1/(1+r^*)]R_2 < C_1 + [1/(1+r)]R_2$$

の関係を満たすことにより厳密に正値をとる。これを図3に示すと，$r^* > r$ のとき，(C_1, R_2) の投資によって家計は，正象限に消費可能集合を得ることができ，$r^* \leqq r$ のとき，そうではないことが分かる。

図3



4．一般的な議論

以上の議論をn期間を前提とした一般的な場合で考えて見る。n期間にわたる費用と収益の流列からなるある投資プロジェクトは，$x_i = R_i - C_i$ とした以下のような消費の機会集合を与える。

$$(1+r)^{n-1}(x_1 - c_1) + (1+r)^{n-2}(x_2 - c_2) + \cdots + (1+r)(x_{n-1} - c_{n-1}) + (x_n - c_n) = 0$$

ここでの利子率が内部収益率と一致するとすれば，内部収益率 r^* が存在することは，

$$(1+r^*)^{n-1}x_1+(1+r^*)^{n-2}x_2+\cdots+(1+r^*)x_{n-1}+x_n=0$$

であることと同値であるから，機会集合は，

$$-(1+r^*)^{n-1}c_1-(1+r^*)^{n-2}c_2+\cdots-(1+r^*)c_{n-1}-c_n=0$$

と書き直すことができる。これは元の投資プロジェクトが，一期あたりの収益率が一定の r^* となるような連続的な投資関数の1点であるとみなしたとき，その投資関数はこの式で示されるようなものになるということを示している。この機会集合からプロジェクトの実行に際しての，投資の平均効率を見て取ることができる。

市場利子率 r が内部収益率 r^* より小さいとき，このような機会集合をあたえる投資プロジェクトがもたらす消費可能集合はどのようなものになるだろうか。

消費可能集合は，ある2期間（c_i，c_j）（$i<j$）における c_i-c_j 平面上で負の勾配をとる切断面を持つ。これは，消費可能集合を全微分して，ある2期間（c_i，c_j）（$i<j$）以外の c の変化分をゼロと置けば，切断面が $dc_j/dc_i=-(1+r^*)^{j-i}$ となることから確認できる。

このとき，もし消費可能集合の c_1 軸切片が正であることがいえるならば，すべての（c_1，c_j）（$1<j$）平面において，消費可能集合は負の勾配をもつ直線として平面を横切るわけだから，c_1 軸以外においても消費可能集合は正の値の切片をもつことがわかる。

全ての軸において正の切片をもつ消費可能集合は，厳密に n 次元空間で正象限との共通集合をもつことになるから，このような消費可能集合をあたえる投資プロジェクトは採用に値することが分かる。

（x_1，x_2，…，x_{n-1}，x_n）の投資プロジェクトによる消費可能集合の c_1 軸切片は投資プロジェクトの割引現在価値，

$$x_1+[1/(1+r)]x_2+\cdots+[1/(1+r)^{n-2}]x_{n-1}+[1/(1+r)^{n-1}]x_n$$

である。

投資プロジェクトの割引現在価値は，内部収益率 r^* を用いたときは，ゼロになることが分かっている。投資プロジェクトが，典型的には第1期からある期間 k までは負の値をとり，それ以降の期間において正の値をとると想定することは自然だろう。すると内部収益率の下では，以下がなりたっていることになる。

$$-\{x_1+[1/(1+r^*)]x_2+\cdots+[1/(1+r^*)^{k-2}]x_{k-1}+[1/(1+r^*)^{k-1}]x_k\}$$
$$=[1/(1+r^*)^k]x_{k+1}+[1/(1+r^*)^{k+1}]x_{k+2}\cdots+[1/(1+r^*)^{n-2}]x_{n-1}+[1/(1+r^*)^{n-1}]x_n$$

投資プロジェクトの割引現在価値を，内部収益率 r^* に代えて，より小さな市場利子率で計算した場合， x_i に割引率をかけた全ての項目はその絶対値を増加させる。

上の式の両辺の内部収益率を，市場利子率に置き換えてその変化を見たとき，（負の項目によって構成される）左辺の変化のほうが，（正の項目によって構成される）右辺の変化より小さい。それは左辺のネットキャッシュフローの乗数としての割引要素の中での最大の変化率は，右辺の割引要素の中での最小の変化率よりも小さいからである。このことから市場利子率による投資プロジェクトの割引現在価値は正値になり，消費可能集合が正象限との共通集合をもつことを知ることができる。

関連文献

（ここでは本稿の内容に対応する話題をあつかった邦語で読める文献のいくつかを紹介する）

人的投資と内部収益率

G・S・ベッカー『人的資本』東洋経済新報社　1976

割引現在価値の幾何学

J・ハーシュライファー『価格理論とその応用（下）』マグロウヒル　1988

内部収益率の標準的な解説

デービッド・G・ルーエンバーガー『金融工学入門』日本経済新聞社　2002