J・C・マッキンゼイ「ゲームの理論序説」

J. C. C. McKinsey, Introduction to the theory of games.
New York, McGraw-Hill Book Company press, 1952. pp. x+371

武隈良一

最近経済理論にゲームの理論が取入れられるようになり、この理論に對する關心が急に高まつている。この機会にゲームの理論を一通り咀嚼しておくことは有意義なことではあるが手頃の書物がない。尤も J. von Neumann と O. Morgenstern による Theory of games and economic behavior. 2nd. ed. (1947) なる書物はあるが、尨大すぎて讀破する閑がないといつた狀態である。數学を専攻した人でなくとも讀み易いもつと手頃な書物はないかと期待されるのであるが、マックキンゼイの書物はまさにこの要求に答えるものである。

原書は新制大学及び大学院学生のための教科書として書かれたものである。從て高度の數学知識を要求しておらない。微分積分学の初歩の知識さえあれば十分である。行列のことや、分布函數スティールチェス積分なども詳説されてあるので初学者にも難解なことはない。

説明の仕方は先ず具體的例から始まつて一般の定理へと導かれているのでいわば素人向きの解説である。各章の終りには歴史的註と參考文献が掲げられてあるので進んで学ぶ者にとつては好都合である。演習問題も附加されてあるのでゆつくり学習することが出來る。

著者マックキンゼイは加州スタンフォード大学の哲学科教授として古くから論理学を専攻し、最近はゲームの

理論に關する業蹟を發表している。

本書の紹介に際しては全體を概觀的に述べるといつた方法はとらない。それは殆んど無意味なことである。それ故今はその前半だけを可成詳細に述べて見ようと思う。原書を見なくとも本紹介だけで可成の點まで理解できるようにというのが實は狙いである。後半については後日に讓る（小樽商大人文研究、第八輯、一九五四年七月發行、に掲載の豫定）。

第一章 矩形ゲーム

一、序、本書は方略（strategy）のゲームの數学的理論を取扱うものである。方略のゲームのうち室内で行われるものとしては、チェス、ブリッジ、ポーカー等がある。各人は互に出抜こうと工夫をこらすのであるが、これと同樣に、對立利害（conflicting interests）があつて得點（outcome）が兩方の側から統制されるような場合には、ゲームの理論を一般に適用することが出來る。經濟学、社会学、政治学、軍事学の問題で對立情勢に關するものは非常に多いので、ゲームの理論は一層その重要性を増すといえよう。

實際問題としては、偶然（chance）が働く場合が多い。例えばカードの配られ方、軍事作戰に於ける天候等は偶然に支配されるものであるが、偶然の加わる問題は本書に於ては取扱わないことにする。方略のゲームと偶然ばかりのゲームとの差異は前者に於ては知性と技術を振舞うことが出來るが後者に於ては全然使えないことである。

ポーカーやチェス丈ならば單なる遊戲としてつまらないかも知れぬが、賣買に始まる經濟行動を考慮するとすればゲームの理論は經濟理論に於て必須である。ロビンソン・クルーソーの問題は、單一の個人と自然との間に行動は、それらの人々の間に行われるゲームである。

ゲームの理論は二十年程以前にノイマン（John von Neumann）によつて始めて導かれたものである。在來の經濟理論に於ては、極大及び極小を見出すのに、解析学を用いたのであるが、彼は方略の室内ゲームと同じ理論で極大と極小を求める方が一層適切であると述べた。經濟理論へのこのアプローチはその後數学者並に經濟学者によつて行われてきた。

二、術語とゲームの分類

用いる語の意義を明らかにしておこう。先づゲーム

(game)と遊び(play)との區別であるが、ゲームといつたら遊びに對する規則と協定の集まりという。例えば「チェスは將棋よりも難かしいゲームである。」などという。遊びといつたらゲームの規則と協定に從つて行われた個々のものをいう。例えば「昨晩はチェス（のゲーム）を三回遊んだ」などということにして「昨晩チェス(の遊び)を三回遊んだ」とはいわないことにする。

一回の遊びに於て生ずる各々の場面を段階（move）という。從て各段階に於ては競技者（player）は様々な手(alternative)のうちから一つの手を選び出すのであるが、これを手の選擇（choice）という。例えば「ブラックは十番目の段階で、すばらしい選擇により勝つた」などという。moveには差し手と駒を動かすという意義があつて、手と選擇を兩方ともに意味するのでこゝでは明確に三者の區別をしておくのである。

ゲームは先ず競技者の數によつて分類される。一人ゲーム、二人ゲーム等々と。但し何人かが組んでいる場合は一人と見なされる。例えばブリッジは四人で遊ぶが、南北と東西とが組むとき二人ゲームである。

遊びの終りに於ては一般にゲームの規則により金錢上の支拂（payment）がなされる。もつとも單に記錄(score)をとつたり、勝(won)又は負(lost)と判定するだけの場合もあるが、こゝでは支拂といつたら金額（sum of money）を意味するものとする。

さてn人ゲームがあつて、その競技者をP_1、P_2、……P_nとし遊びの終りに於てP_iになされる支拂をp_iとする。このときP_iが支拂わねばならぬとせばp_iは負なるものとする。然るときもし

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$$

ならば、この遊びは零和（zero-sum）であるという。そしてゲームのすべての遊びが零和ならばゲーム自身を零和という。普通の室内ゲームに於ては遊びの進行に於て富がつくられたり減らされたりすることはないので、金錢を賭けた場合に零和である。しかし非零和ゲームは非常に重要である。というのはゲームの理論に於て經濟過程のモデルを探そうとすると、非零和ゲームを考えなくてはならないからで、それは經濟過程は富をつくつたり減じたりしているからである。

ゲームはまた段階の數によつて分類される。しかし多くのゲームに於てはこの數は一定ではない。段階の數が有限であり、各段階に於ける手の數が有限のとき、その

ゲームを**有限**ゲームといゝ、然らざるとき**無限**ゲームという。

　最後にゲームを**情報の分量**(amount of information)によつて分類する。チェスのように對手が如何なる手を指したか、過去の選擇がみな分るものもあるし、ブリッジのように如何なるカードの他の人に渡つたか分らないものもある。然し同じブリッジでも最初にだけカードを見せ合うことにすれば情報の分量が變つて別なゲームになる。

三、矩形ゲームの定義

　零和一人ゲームは一人が零しか獲得しないので問題はない。また非零和一人ゲームは一人の競技者が普通の極大問題を解くことになるのでこれもさしたることはない。依て二人ゲーム以上について考えよう。

　先ず二人零和ゲームについて考える。いま各競技者は唯一つの段階しか持ち得ないものとして、一人の競技者がm個の正整數の中から一つを選び、次にそれを知らされることなくして他の競技者がn個の正整數の中から一つを選ぶ。そして兩方の整數を比較して、ゲームの規則により支拂がなされるものとする。かゝるゲームを**矩形ゲーム**(rectangular game)という。

　例えば次の表により競技者P_1が(1.2.3)の中から一つを選び、これを知らされることなくして他の競技者が(1.2.3.4)の中の一つを選ぶ。そして兩方の欄を辿つて得られる數がP_2がP_1に支拂う金額である。

	1	2	3	4
1	2	1	10	11
2	0	−1	1	2
3	−3	−5	−1	1

　例えばP_1が1を選び、P_2が3を選ぶと、P_2はP_1に10弗支拂わねばならぬ。P_1が3を選びP_2が2を選べばP_2はP_1に-5弗、即ちP_1はP_2に5弗支拂わねばならぬ。

　簡單のためにこのゲームを單に**利得行列**(payoff matrix)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を與えることによつて表わそう。

　そこで問題となるのは、矩形ゲームを遊ぶのに**最適の**(optimal)の方法があるか即ち兩者を滿足せしめる點

があるかということである。今の例ならばP_1が1を選ぶことが最適であり、P_2は2を選ぶことが最適であるから問題は解決される。然しこの例では第1行（row）の元が他の行のそれに對應する元よりも大きく、又第2列（column）の元が他の列のそれに對應する元よりも小さいという特別の性質があつたから解決されたのであるが、一般には如何にこれが解決されるであろうか。

四、鞍點を有する矩形ゲーム

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を利得行列に有する矩形ゲームを考えよう。P_1が1を選ぶならば少くとも第1行の元の最小値の支拂をP_2から受ける。即ちその値は $\min_j a_{1j}$ である。一般にi行を選ぶならば少くとも $\min_j a_{ij}$ の支拂を受けることは確かである。その上 $\min_j a_{ij}$ を最大ならしめるように選ぶことが出來る。そこでP_1は少くとも

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

を確保する選擇のあることは間違いのない處である。

同様にして、P_2の受ける支拂はAの元の符號を變えたものであるから、P_2は少くとも

$$\max_j \min_i -a_{ij}$$

を確保する選擇のあることは間違いのない處である。

さて $\max_j \min_i -a_{ij}=\max_j -\left[\max_i a_{ij}\right]$

$$=-\min_j \max_i a_{ij}$$

なるを以て、P_2は少くとも $-\min_j \max_i a_{ij}$ を得ることは確かである。従てP_1は多くとも $\min_j \max_i a_{ij}$ しか得られない。

以上を綜合すれば、P_1は少くとも $\max_i \min_j a_{ij}$ を得ることは確かであるが、P_2は $\min_j \max_i a_{ij}$ 以上には取られないというのである。

處でいま $\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=v$……(1) が成立するときは、兩者はともに異存なく、最適の方法が見出されたことになる。然し行列Aに於てはつねにこの等式が成立するとは限らない。そこでこの等式が成立す

るための必要にして且つ十分なる條件が要求される。これを一般に二變數の實函數の場合に就て論じてみよう。

定理一、一、A及びBを集合とし、二變數x、yの實函數は $x\in A, y\in B$ なるとき實數をとるものとす。$\max_{x\in A}\min_{y\in B} f(x.y)$ 及び $\min_{y\in B}\max_{x\in A} f(x.y)$ の兩方が存在するならば $\max_{x\in A}\min_{y\in B} f(x.y)\leqq\min_{y\in B}\max_{x\in A} f(x.y)$ である。

定義一、四、函數 $f(x.y)$ に於て

（i）$f(x, y_0)\leqq f(x_0,y_0)$ Aのすべてのxに對して

(ii) $f(x_0,y_0)\leqq f(x_0,y)$ Bのすべてのyに對して

を滿足する點（x_0, y_0）が存在するときこれを鞍點 (saddle－point) という。但し x_0 はAの點、y_0 はBの點とす。

定理一、五、$\max_{x\in A}\min_{y\in B} f(x.y)$ 及び $\min_{y\in B}\max_{x\in A} f(x.y)$ が存在するとき、兩者が一致するための必要にして且つ十分なる條件は、函數fが鞍點（x_0,y_0）を有することであり、このとき、二つの極値は $f(x_0,y_0)$ に一致する。

系一、七、行列Aについていえば、鞍點 a_{i_0,j_0} は行の極小値にして同時に列の極大値である。

鞍點（x_0,y_0）の x_0 及び y_0 をそれぞれ P_1 及び P_2 の最適選擇（optimal choice）という。又 a_{x_0,y_0} をゲームの値（value）という。

以上は鞍點の存在する場合であるが、然らざる場合には如何にゲームを遊ぶかの問題が殘るが、これは第二章に於て考えよう。

歴史的及び文献的註

ゲームの理論を始めて述べたのは Neumann(1928)であるが Kalmar もその頃注目していた。今日では Neumann 及び Morgenstern の書物となつて一應集大成されているが、簡單な紹介としては Paxon 及び Mc Donald のものがある。

第二章　矩形ゲームの基本定理

一、混合方略

いま行列が $\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}$ で與えられる矩形ゲームを考えると、これは鞍點がないので前章の方法では最適な方法が見出されない。

この場合には P_1 がいずれの行をとつても同じであり、

Pもいずれの列をとつても同じである。それ故P_2が第1列を選ぶとすれば、P_1は2行を同じ確率で選ぶことになり、その數学的期望値は

$$1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

となる。同様にP_2が第2列を選ぶとすれば、計算の結果やはりP_1の數学的期待値は0となる。

それ故P_1に對するゲームの値（即ち最適の方法で遊んだときの期待値）は0となる。

次に行列が$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$で與えられる矩形ゲームを考えよう。

P_1が第1行を選ぶ瀕度（frequegncy）をx、從て第2行を選ぶ瀕度を$1-x$とし、P_2が第1列を選ぶ瀕度をy、從て第2列を選ぶ瀕度を$1-y$とすれば、P_1の期待値は

$$E(x,y)=1xy+3x(1-y)+4(1-x)y+2(1-x)(1-y)$$

$$=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{2}\cdots\cdots(1)$$

となる。從て $x=\frac{1}{2}$ とすることにより $\frac{5}{2}$ は確かに貰える。然しそれ以上は貰えない。何んとなればP_2が$y=\frac{1}{4}$とするからである。即ちP_2にしてみればそうすることによつて$\frac{5}{2}$以上には奪われないからである。

これを違つた方法で表わすと(1)からすべてのx及びyに對して

$$E\left(x,\frac{1}{4}\right)\leqq E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\leqq E\left(\frac{1}{2},y\right)\cdots\cdots(2)$$

となるので、點$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$が函數Eの鞍點となる。かくしてこのゲームの最適瀕度（x^*,y^*）が求まるのである。

以上を一般の行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots\cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots\cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

に就て考えたときP_1が各行に對する瀕度を

$$(x_1,x_2,\cdots\cdots x_m),\quad \sum_{i=1}^{m}x_i=1$$

とすれば、このm個からなる數の組（tuple）ことをP_1に對する混合方略（mixed strategy）という。これをS_mを以て表わし、同様にP_2に對する混合方略$(y_1,y_2,\cdots\cdots y_n)$を$S_n$を以て表わす。

これに對して行及び列の一つ丈をとるときそのとつた數自身のことを純粋方略（pure strategy）という。

さて混合方略に於ける期待値は

$$E(X,Y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\,x_i\,y_j$$

であつてS_mのある$\overset{*}{X}$及びS_nのある$\overset{*}{Y}$に對して

$$E(X,Y^*)\leqq E(X^*,Y^*)\leqq E(X^*,Y)$$

が成立するとき$\overset{*}{X}$及び$\overset{*}{Y}$を最適（混合）方略 optimal (mixed) strategy という。そして$E(X^*,Y^*)$をゲームの（P_1に對する）値という。また(X^*,Y^*)をゲームの解(solution)、方略鞍點ということもある。

なお、このゲームに最適方略が存在するためには、

$$v_1=\max_{X\in S_m}\ \min_{Y\in S_n}\ E(X,Y)$$

$$v_2=\min_{Y\in S_n}\ \max_{X\in S_m}\ E(X,Y)$$

が存在して等しいことが問題となるが、これは第三節に於て述べよう。結果はつねに存在して等しいのである。

二、幾何学的背景

こゝでは第三節及びそれ以後のために準備をするといつて幾何学の術語について説明している。述べられているものは先ず、ユークリッドn空間（記號E_n）距離、集合の有界、極限點、閉苞、閉集合、開集合、内部、境界、連結、凸集合である。またゲームの理論に於ては凸集合の理論が用いられるのでこれについて述べておこう。

r個の組（これを點と呼ぶ）

$$x^{(1)}=(x_1^{(1)}\cdots\cdots x_n^{(1)})$$

$$x^{(2)}=(x_1^{(2)}\cdots\cdots x_n^{(2)})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{(r)}=(x_1^{(r)}\cdots\cdots x_n^{(r)})$$

から新しい點

$$x=(x_1\cdots\cdots x_n)$$

を次のようにつくる。今$(a_1\cdots\cdots a_r)$をS^rの數として（従て$a_i\geqq 0,\ a_1+\cdots\cdots+a_r=1$）

$$x_j=a_1x_j^{(1)}+a_2x_j^{(2)}+\cdots\cdots+a_rx_j^{(r)}$$

となるようにxの各數を定めるときxは重さ(weight) $a_1,\cdots\cdots a_r$を有する$x^{(1)},\cdots\cdots x^{(r)}$の凸一次結合といつて

$$x=a_1x^{(1)}+\cdots\cdots+a_rx^{(r)}$$

を以て表わす。

E_nの部分集合Xが凸であるというのは、Xの點のすべての凸一次結合がXの點であるときにいう。例えば半徑1の圓の内部の點などはそれである。これに反して、圓周上の點及び圓外の點からなる集合は凸集合をなさない。

Xが凸集合であるための必要にして且つ十分な條件は $r=2$ の場合に凸集合をなしていることである。

Xの凸包（convex hull）とはXを部分集合として含むすべての凸集合の共通部分を意味する。例えば $x^2+y^2=1$ の凸包は $x^2+y^2\leqq 1$ である。

定理二、一、XがE^nの部分集合ならばXの凸包の點はXのn+1個の點の凸一次結合として表わし得る。またもしXが連結ならばn個の點の凸一次結合として表わし得る。（Fenchel）

この定理の證明はこゝではされてないが、これは後の定理十一、五に於て必要である。

Xの異なる二點x_1及びx_2に對して

$$x=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$$

を以て表わし得ないXの點の集合をK(X)と表わしこれをXの**端集合**（extremal set）という。例えば閉圓の端集合は圓周である。端集合が空でない十分條件として次の定理がある。

定理二、四、XをE^nの空ならざる有界閉凸集合とするとき、K(X)は空ではなくXはK(X)の凸包である。

三、任意の矩形ゲームに對する基本定理の證明

この節に於ては矩形ゲームに對する基本定理（これを

ミニマックス定理ともいう）二、六、が證明されている。即ち第一節に於て定義された函數Eに對して

$$\max_{X\in S_m}\ \min_{Y\in S_n}\ E(X,Y)$$

と

$$\min_{Y\in S_n}\ \max_{X\in S_m}\ E(X,Y)$$

が存在して等しいことを證明しようとするのである。そのために行列に關する補題二・五を用いているが行列に關する簡單な計算が主なので理解に困難ということはない。基本定理をゲームの術語で言えば次の如くになる。

定理二、七、すべての矩形ゲームは値をもつ。即ち矩形ゲームの競技者はつねに最適の方略をもつ。

四、最適方略の性質

ゲームの値を決定するのに直觀的論證や直接の視察によることがあるが、その際には次の定理が有効である。

定理二、八、Eをm×n行列としその値をvとす。然るときS_mの數X^*がP_1に對して最適方略なるための必要にしてかつ十分なる條件はS_nのすべての數Yに對して

$$v\leqq E(X^*,Y)$$

なることである。

同様にS_nの數Y^*がP_2に對して最適方略なるための必要にしてかつ十分なる條件はS_mのすべての數Xに對して

$$E(X,Y^*)\leqq v$$

なることである。

定理二、九、矩形ゲームに於て、vがゲームの値でありX^*とY^*がP_1及びP_2に對する最適方略であるための必要にしてかつ十分なる條件は

$$E(i,Y^*)\leqq v\leqq E(X^*,j)\quad(1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq m)$$

が成立することである。

こゝに$E(i,Y)$とは$E(X_i,Y)$に於てX_iがS_mの數のうちi番目が1で他は0になつているものを表わす。同様に$E(X,j)$は$E(X,Y_j)$に於てY_jがS_nの數のうちj番目が1で他は0になつているものを表わす。

この外に二三の定理が擧げられているが、ゲームの解が要求されているとき最もよく使われる定理として次のものがある。

定理二、十二、$X^*=(x_1^*,\cdots\cdots,x_m^*)$, $Y^*=(y_1^*\cdots\cdots y_n^*)$が最適方略なるとき

$E(i,Y^*)<v$なるiに對して$x_i^*=0$

となる。また

$v<E(X^*,j)$なるjに對して$y_j^*=0$

となる。

以上の諸定理を用いて解く例が以下に擧げられてあるが、計算はやゝ繁雑で時間を要するものである。後程計算を簡略にする方法が與えられるのであるが、こゝでは一應叮嚀に述べられてあるので理解しやすい。

例二、一四

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

例二、一五

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

五、優位の關係

例えば行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

を以て與えられる矩形ゲームに於ては、明らかに第三行より第二行が優利なのでP_1は第三行目をとることはな

い。従てこれは次の行列 $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ に歸着する。そしてこの行列に於てはP_2は明らかに第三列は第一列より不利なので第三列目をとることはない。従てこれは次の行列 $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ に歸着する。

また行列 $\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ が與えられたとき、第三行の元が他の行の對應する元の凸一次結より小なるを以て、P_1は第三行をとることはない。なぜなら

$$\begin{cases} 4 < \frac{1}{4} \cdot 24 + \frac{3}{4} \cdot 0 \\ 5 < \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 8 \end{cases}$$ であるから。

従て行列は次のもの $\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ に歸着する。

一般に $a=(a_1 \cdots\cdots a_n)$ 及び $b=(b_1 \cdots\cdots b_n)$ のベクトルが與えられたとき、すべてのiに對して $a_i \geqq b_i$ ならばaはbに**優位する** (a dominates b) といい、$a_i > b_i$ なるときaはbに**決定的に優位する** (a strictly dominates b) という。

かくして優位されている場合にはその行及び列を省いて考えようとするのである。その際決定的に優位されている場合には同じ解になるが、單に優位の場合には解をおとすことがある。（注意二、十九）

六、解の圖的解法

これは行列が 2×n又はm×2の場合には容易に行われるものであるが一般の場合には非實用的である。

歴史的及び文獻的註

基本定理の最初の證明は Neumann (1928) によるがこれは位相數学の Brouwer の不動點定理を用いるものである。Ville も初等的證明を與えているが、右に述べた證明は Neumann 及び Morgenstern によるもので凸集合の理論を用いた簡單な證明である。なおその他の人々によつて種々の證明が試みられている。

凸集合は理論についてはGlezermann及びPontrjagin又は Bonnesen 及び Fenchel による著書が參考になる。

第三章　矩形ゲームの解

一、解の集合

本章は矩形ゲームΓのすべての解の集合に就て述べられている。(X, Y)がΓの解であるのは、X及びYがそれぞれ第一及び第二の競技者に對して最適の方略であることが必要かつ十分である。從てP_1に對する最適方略の集

合$T_1(\Gamma)$とP_2に對する最適方略の集合$T_2(\Gamma)$に就てしらべれば十分である。結論としてはΓが$m \times n$行列なるとき$T_1(\Gamma)$はm空間の點のある有限個の集合の凸包であり、同様に$T_2(\Gamma)$はn空間の點のある有限個の集合の凸包となるのである。かくして$T_1(\Gamma)$及び$T_2(\Gamma)$は單なる幾何学的特徴を有することになり、それらは超多面體である。右の結論に關する證明は矩形ゲームのすべての解を見出す一般的方法へ我々を導くものであり、その方法は第二章の終りに述べられた方法よりも短かく、しかも器械計算へよりよく適用される。

證明は一寸難かしく感ぜられるかも知れぬが、それは行列の計算を知らない爲に起ることであるから、始めて讀む際には補題三、五と定理三、六の證明は省かれてもよい。或は又第二節と第三節は全然省いて讀まれてもよい。というのはこれらはこの書物全體には關係がないからである。

補題三、二、Γが$m \times n$行列ならば、$T_1(\Gamma)$及び$T_2(\Gamma)$はそれぞれm空間及びn空間の空ならざる、有界凸閉集合である。

注意三、三、$T_1(\Gamma)$の凸性により$T_1(\Gamma)$が一つ以上の元を有するとき、それは無限個有することになる。從てゲームの理論は丁度一つの解を有するか又は無限個の解を有する。補題三、二により、$T_1(\Gamma)$及び$T_2(\Gamma)$は定理二、四の假定を滿足することが分る。從て$K〔T_i(\Gamma)〕$($i=1.2$)は空ではなく、$T_i(\Gamma)$の各元は$K〔T_i(\Gamma)〕$の元の凸一次結合になる。それ故$T_i(\Gamma)$のすべての元を見出すには$K〔T_i(\Gamma)〕$のすべての元を見出せば十分である。なお本章の後の方で$K〔T_i(\Gamma)〕$が有限集合なることを示そう。

二、行列の若干の性質

こゝでは行列の計算を知らない人のために初歩から叮嚀に述べられている。知つている人にとつては余りにも叮嚀すぎて紙數が惜まれる程である。以下用いる記號だけを記しておこう。

I_nは$n \times n$行列の單位行列。

J_nは各元が1で元がn個あるベクトル

O_nは各元が0で元がn個あるベクトル

證明に一番多く用いられる定理としては次のものがある。

補題三、四、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1r} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{r1} \cdots\cdots a_{rr} \end{pmatrix}$$

及び

$$A_x=\begin{pmatrix} a_{11}+x, & \cdots\cdots & a_{1r}+x \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1}+x, & \cdots\cdots & a_{rr}+x \end{pmatrix}$$

とするとき、次の式が成立する。

$$J_r \operatorname{adj} A_x = J_r \operatorname{adj} A \qquad (8)$$

$$|A_x| = |A| + x J_r \operatorname{adj} A\ J_r^T \qquad (9)$$

三、すべての解の決定

補題、三、五、Γを矩形ゲームとし、利得行列をA、$v(\Gamma)$をゲームの値（但し0ならず）とし、$X \in T_1(\Gamma)$, $Y \in T_2(\Gamma)$とす。然るとき$X \in K[T_1(\Gamma)]$，$Y \in K[T_2(\Gamma)]$なるための必要にしてかつ十分なる條件は、Aの正則（nonsingular）部分行列Bが存在して

$$v=\frac{1}{J_r B^{-1} J_r^T}$$

$$\dot{X}=\frac{J_r B^{-1}}{J_r B^{-1} J_r^T}$$

$$\dot{Y}=\frac{J_r (B^{-1})^T}{J_r B^{-1} J_r^T}$$

になることである。こゝにrはBの次數にして、$\dot{X}$はAからBを得る際に創つた行に對應する元をXから創ることによつて得られるベクトルである。$\dot{Y}$についても同樣とす。

證明は恐ろしく長いが叮嚀に書かゝれてあるためである。

定理三、六、同じく必要にしてかつ十分なる條件としては、Aの平方部分行列Bが存在して

$$v=\frac{|B|}{J_r(\operatorname{adj} B)J_r^T}$$

$$\dot{X}=\frac{J_r \operatorname{adj} B}{J_r(\operatorname{adj} B)J_r^T}$$

$$\dot{Y}=\frac{J_r(\operatorname{adj} B)^T}{J_r(\operatorname{adj} B)J_r^T}$$

になることである。

定理三、七、Γが矩形ゲームなるとき、集合$K[T_1(\Gamma)]$及び$K[T_2(\Gamma)]$は有限集合にして、$T_1(\Gamma)$及び$T_2(\Gamma)$はそれぞれ$K[T_1(\Gamma)]$，$K[T_2(\Gamma)]$の凸包である。從て$T_1(\Gamma)$及び$T_2(\Gamma)$はそれぞれ$K[T_1(\Gamma)]$及び$K[T_2(\Gamma)]$の點を頂點として有する超多面體である。

注意三、八、定理三、六は矩形ゲームのすべての解を系統的に與える便利な方法を指示している。即ち次の如くにすればよい。

Aの部分平方行列Bについて一つ一つしらべてみる。r次の行列Bに對して定理三、六に與えられた公式によりv、$\cdot X$、$\cdot Y$を計算し先ず$\cdot X$及び$\cdot Y$がS_rに屬するかどうかをしらべる。若しいけなければBをすてて別ものについてしらべる。$\cdot X$及び$\cdot Y$がBに屬するならば、AからBを作るときに省いた行及び列に對應する元に0を補うことにより$\cdot X$及び$\cdot Y$からX及びYを作る。そして定理二、九により$X \in T_1(\Gamma)$及び$Y \in T_2(\Gamma)$が成立しているかどうかを調べる。若しいけなければ、このBをすてて別のものについて同じくこゝまで調べる。そのとき成立しているならば(X, Y)が求める解であつて定理三、六により$X \in K[T_1(\Gamma)]$，$Y \in K[T_2(\Gamma)]$になつている。かくの如くにして$K[T_1(\Gamma)]$及び$K[T_2(\Gamma)]$のすべての元を決定することが出來るので$T_1(\Gamma)$及び$T_2(\Gamma)$のすべての元が$K[T_1(\Gamma)]$及び$K[T_2(\Gamma)]$の元の凸一次結合をなすことによつてそれぞれ求められる。（なお次數1の部分行列は考えておらない）

例三、九、

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

例三、十、

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

例三、十一、

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

注意三、十三、解が無限にある場合には、より良いものを選ばなければならぬがそれには色々の方法がある。その一つの方法が述べられているが實例は次のものである。

例三、十四、

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

歴史的及び文献的註

本章に述べられていることは Shapley 及び Snow によるものである。

本章に密接に關係ある問題として、$X=T_1(\Gamma)$，$Y=T_2(\Gamma)$になるためにはX及びYに如何なる條件が滿足されねばならぬかという問題があるが、これは種々の人々によつて論ぜられている。

行列に關する書物としては Bôcher 及びMac Duffee の著書がよい。

第四章　ゲームの値の近似解法

本章に於てはゲームの値を欲する限りの精密の度合に於てまた最適方略に近づくように、求めようとする近似的解法に就て述べられている。

近似解法は次の直觀的考察にもとづく。二人の競技者が最適方略を知らずにゲームを長い間遊ぶものとする。というのは彼等がゲームの理論を知らないとき、又は行列が余り大きくて計算することが容易でない場合には長く遊んでみるより外に値を求める方法がないからである。ところで遊びを次々と續けるとき二人はこうするに違いない。即ち「未來は過去に似ている」という假定の下に期待値を極大ならしめようとするであろう。過去の經驗を活かして最適方略へ近づかせようと努力するのである。これを例をもつて説明しよう。

いま行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

を以て與えられるゲームを考え、この際二人はゲームの理論を知らないから、最適方略のときの値を求めることは知らないものとする。

P_1が第一、二、三行を選ぶことをそれぞれA、B、Cを以て表わし、P_2が第一、二、三列を選ぶことをそれぞれα、β、γを以て表わそう。

最初にAとαとが選ばれたとするとP_1はP_2から1を貰うことになつて先ず第一回の遊びは終る。次にこの經驗を二人は如何に生かすであろうか。P_2にしてみれば「未來は過去に似ている」との考えしかないから、P_1が再びAを選ぶであろうと考える外はない。とすれば自分は今度はやはりαを選ぶのが一番有利だからαを選ぶと心にきめるであろう。一方P_1にしてみれば第一回でP_2はαを選んだから、この次もαを選ぶものと假定したときBを選んだ方が最も有利であるからこれに決心をする。かくして第二回の對決はBとαとになる。

さて第三回は如何。P_2にしてみれば過去に二度續けてαを選ぶよりは、βを二度續けて選んだ方が有利であることは次の表を見れば分る。

	P_1	α	β	γ
第一回	A	−1	−2	−3
第二回	B	−4	0	−4
合計		−5	−2	−4

従てP_2は第三回にはβを選ぶと決心する。

一方P_1は次の表の如く計算するであろう。

	P_2	A	B	C
第一回	α	1	4	2
第二回	α	1	4	2
合	計	2	8	4

従て二度Bをつづけた方が有利であつたことが分つたから、第三回はBを選ぶと決心する。かくして第三回の對決はBとβとになる。

さて第四回は如何。これは次の表によりBとβとの對決になる。

	P_1	α	β	γ
第一回	A	−1	−2	−3
第二回	B	−4	0	−1
第三回	B	−4	0	−1
合	計	−9	−2	−5

	P_2	A	B	C
第一回	α	1	4	2
第二回	α	1	4	2
第三回	β	2	0	3
合	計	4	8	7

この方法を繰返して行くのであるが、この方法に於て同じ期待値になつたら如何にするか。例えば今の例では八回の遊びの結果ではP_1の期待値が、16、10、16となるので次にAを選ぶかCを選ぶかという問題が起るが、この場合にはアルファベットの順でAを選ぶことにして方法を續けることとする。

かくして各回が終る毎に期待値を計算するのであるが、そのときのP_1の期待値のうちの最大のものを$\overline{v}_i$で表わし、P_2の期待値のうちの最大なるものに負號をつけたものを$\underline{v}_i$で表わす。

然るときゲームの値をVとするならば

$$\frac{\underline{v}_i}{i} \leqq v \leqq \frac{\overline{v}_i}{i}$$

が成立するのである。

今の例で計算すれば

$$v \leqq \frac{\overline{v}_8}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

$$v \geqq \frac{v_{16}}{16} = \frac{29}{16} = 1.8125$$

となる。これらはvの眞の値1.85に比べて大部近いものである。

またvは $\frac{\overline{v}_1}{1}$ のg.l.bであり $\frac{v_1}{1}$ のl.u.bであることが證明されるので如何程でも精密にVの値を求めることが出來る。

なお過去の回數に於てP_1がA、B、Cを何回選んだかその割合を書いてみると次の如くになる。

$X_1 = (1, 0, 0)$

$X_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$X_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$

……………………

同様P_2がα、β、γを何回選んだかその割合は

$Y_1 = (1, 0, 0)$

$Y_2 = (1, 0, 0)$

$Y_3 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

……………………

となる。

これらの極限は最適方略となり

$$X^* = \left(\frac{11}{20}, \frac{4}{20}, \frac{5}{20}\right)$$

$$Y^* = \left(\frac{8}{20}, \frac{7}{20}, \frac{5}{20}\right)$$

となるのであるが、一般に最適方略が唯一つの場合には

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_t, \ldots\ldots$

は收斂するが、二つ以上あるとき收斂するとは限らない。然しこの數列の部分數列はつねに最適方略に收斂することが證明されるのである。

歴史的及び文獻的註

以上の方法はBrownによるものであるが、收斂することはJ.Robinson(1951)によつて證明された。これについてはAnn. of Math. 54 (1951) 296～301を參照されたい。

第五章　擴張された形のゲーム

一、標準形と擴張された形

これまでは二人矩形ゲームの解に就て述べてきたが、これを一般にすると如何になるであろうか。それは二人以上になつたり、偶然が入り込んだり、幾段階にもなつたり、各段階ごとに新たな情勢になつたりして、これらを綜合して考えることは思つた丈で慄然とする。

しかし有限個集合の中から選擇をなすゲーム（これを有限ゲームといわう）を解く問題はある矩形ゲームを解く問題と同値になるのであつて、一般にいかなる零和二人ゲームに對しても今迄の矩形ゲームの理論が適用される。任意のゲームに對してこれと同値になる矩形ゲームを見出す過程を**標準化**（normalization）といい、その結果得られる矩形ゲーを**標準形**（normal form）といい、またこれを始めのゲームと區別したいときには**擴張された形**（extensive form）という。

例五、一、段階Ｉに於てP_1は（１・２）の集合から數 x を選び、段階IIに於てP_2はP_1が何を選んだかを知らされていて（１・２）の集合から數 y を選ぶ。段階IIIに於てP_1はIIの y を知らされていてかつＩの x を記憶しているものとして（１・２）から z を選ぶ。その結果としてP_2はP_1に $M(x,y,z)$ を支拂うものとする。

こゝに、

$M(1,1,1)=-2$　　$M(2,1,1)=5$

$M(1,1,2)=-1$　　$M(2,1,2)=2$

$M(1,2,1)=3$　　$M(2,2,1)=2$

$M(1,2,2)=-4$　　$M(2,2,2)=6$

とする。

このゲームを矩形ゲームに導くためには如何にするか。先ず**方略**とは遊びの各點に於て、競技者がもち得る情報で考え得るすべてのものということにしよう。また方略といえば一般に優れたものを指すが、こゝでは如何に馬鹿げたことをしても、やはりそれは一つの方略ということにする。

さてP_2は次の四つの方略を有する。

$f_{11},\ f_{12},\ f_{21},\ f_{22}$

こゝに　$f_{11}(1)=1$　　$f_{11}(2)=1$

$f_{12}(1)=1$　　$f_{12}(2)=2$

$f_{21}(1)=2$　　$f_{21}(2)=1$

$f_{22}(1)=2$　　$f_{22}(2)=2$

とす。即ち例えば f_{21} という方略はP_1が1をとれば2にし、2をとれば1にしようという心構えの方略である。

P_1の方略は如何であろうか。先づ段階Ｉに於ては１又は２を選ぶという二つの方略がある。段階IIIに於ける方略は次の形に表わされる。

$(i_0(i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22}))$

こゝにi_0は段階Iに於ける數であり、i_{jk} はP_1が段階Iに於てjを選びP_2が段階IIに於てkを選んだとき、P_1が再び選ぶ數を表わす。例えば（1,(2,1,2,1)）はP_1が段階Iに於て1を選び、P_2が段階IIに於て1を選んだら段階IIIに於て2を選び、P_2が段階IIに於て2を選んだら段階IIIに於て1を選ぼうとする心構えの方略である。この際後の二つの數字は餘計なもので無駄ではあるが、これを附加しておいても害にはならない。というのは系統的に方略を書くことは容易であるが無駄なものを取除きながら書くことは一般に複雑であるからである。これについては Duke Math・J.18(1951）の Krentel 外二氏の論文を參照されたい。

かくして今例えばP_1は（1,(2,1,2,2)の方略をとり、P_2が f_{21} の方略をとればその結果は M(1,2,1) となりP_2はP_1に3を支拂うことになる。依てこの二組からなる方略を行列で表わすことが出來よう。この行列は尨大なものになるのでこゝには書き記さないで原著に讓る。

結論を言えばこの行列は鞍點を有し、P_1に對するゲームの値は5である。P_1に對して最適な方略は

(2,（1,1,1,2)）　　(2,（1,2,1,2)）

(2,（2,1,1,2)）　　(2,（2,2,1,2)）

のどの一つでもよく、P_2に對しては f_{11} 又は f_{21} のいずれもが最適方略になる。

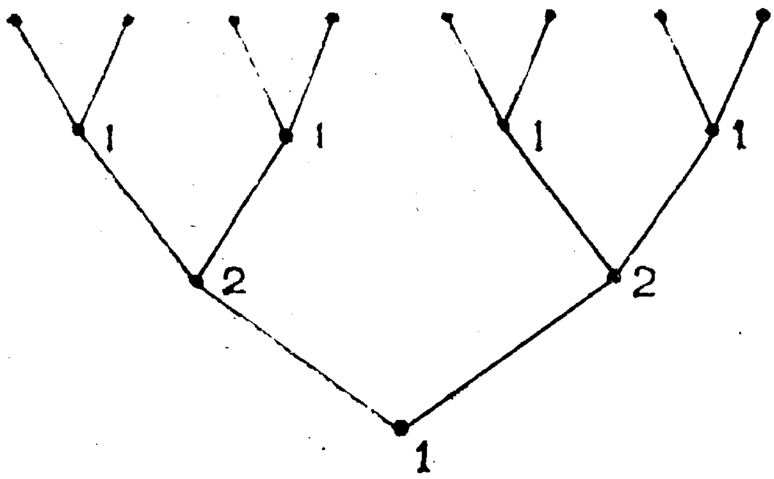
これを始めのゲームの言葉でいえば、P_1の最適方略は段階Iで2を選び段階IIIではP_2が段階IIで選んだものと同じものを選ぶことになる。P_2の最適方略はP_1が何を選んだとしても段階IIで1を選ぶか、又は段階1でP_1の選んだものと反對の數をとればよいことになる。

二、圖による表現

ゲームを圖を以て表わす際には樹(tree)を以てする。樹とは線分の有限個の集合で各頂點は下の一つの頂點とつながり、一番下の頂點は一つしかないものをいう。（トポロジーではもつと一般な意味で用いる)。このとき頂點は變化する段階を表わす。

次頁の第一圖によつて表わされるゲームは例五、一であるがこれについて説明しよう。この圖の底の點は1と名付けられ競技者P_1が第一の段階を振舞うことを表わす。次の上の段は2と名付けられ段階IIを表わしP_2が振舞う。その上の段は段階IIIを表わしP_1が再び振舞う。又この圖に於ては段階Iに於てP_1は二つの手を有しその中の一つを選ぶことになり、段階IIに於てはP_2は二つ

の手の中から一つを選び、段階IIIに於てはP_1が再び二つの手の中から一つを選ぶことになつている。



（第一図）

なお例五、一のように以前のことがみな知らされる場合には**完全情報**（perfect information）を有するゲームという。かゝるゲームに對する方略行列は鞍點がないということは起らないが、これは第六章に於て一般に證明する。

三、情報集合

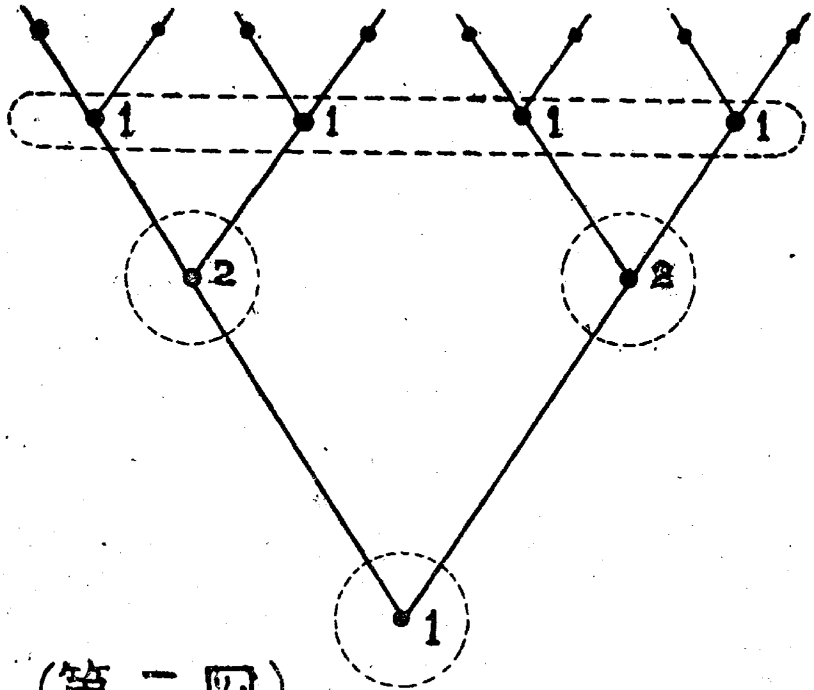
次に情報が完全でない例を考えよう。前例に於てP_1が第III段階に於て選擇をなす場合に、P_2が段階IIに於て何を選んだかを知らされなかつたり、又段階Iに於て自分の選んだ數を忘れたりすると、これは情報が完全でない。この場合にはP_1は一人であるとは考えないで、二人で組んでいて互に話合わないものと考えることが出來る。

例五、二、P_1は段階Iに於て（1・2）から一つの數xをとる。P_2は段階IIに於てxを知らされて（1・2）から一つの數yをとる。P_1は段階IIIに於てyを知らされず、かつxを忘れたとして（1・2）から一つの數zをとる。かくしてP_2はP_1に$M(x, y, z)$を支拂うものとする。こゝにMは前例と同じものとする。

この例を圖によつて表現するとき、第一圖とは違つて次のことに注意しなければならない。先ずP_1は過去段階には無知の條件の下に段階IIIに於て振舞う。それ故段階IIIのどの點に自分が位置するかは分らない。それ故段階IIIの四つの點全部を破線で取圍むことにしその中の一つをとるものと考える。

一番上の頂點丈は、これは遊びの最終の點であるから

選擇は行われないので、考慮の外におくが、その他の各段に於ける頂點の集合は一般に若干個にまとめて分割する。



(第二図)

本例の第二圖に於ては最下頂點が一つの取かこまれた範圍にあるのはP_1が段階Iにあることを示し、その中の頂點をとることを意味している。段階IIに於ては頂點が二つあるが、これを二つに分けて各々を破線で取かこんだのはP_2は必ずいずれかの範圍を選んでその中の頂點を選ぶことを示している。段階IIIに於ては四つの頂點を含む一つの範圍しかないが、P_1はこの範圍から一つの頂點を選ぶことを意味している。

このようにいくつかの頂點を含む集合を情報集合(information sets)という。

さてこのゲームの値を計算しなければならぬが、P_2の方略は前と同じくf_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}である。P_iは過去について知らされてはいないが次の四つの方略をもつ。

(1, 1) (1, 2) (2, 1) (2, 2)

こゝに例えば(1, 2)とは段階Iに於て1段階IIIに於て2を選ぶことを意味する。

これによりこのゲームは次の矩形ゲームに歸着する。

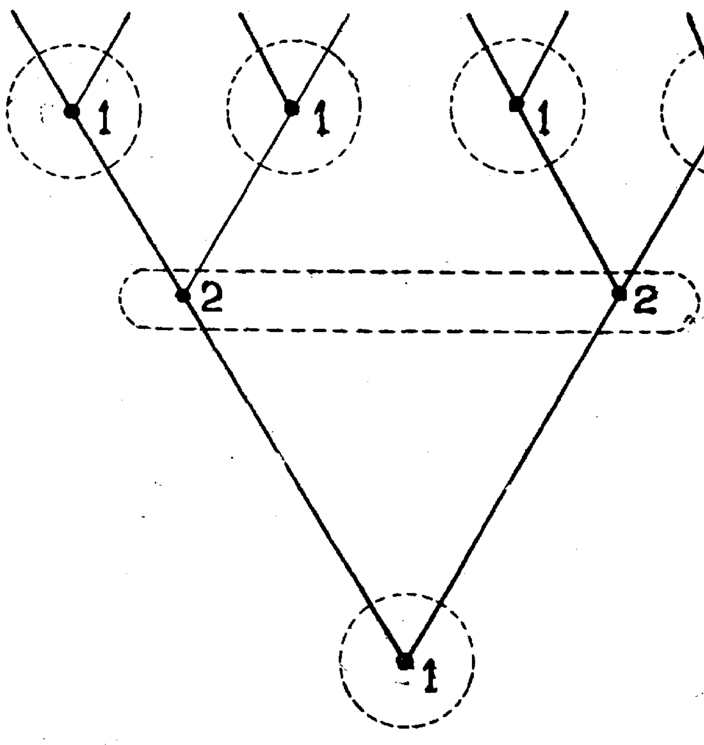
	f_{11}	f_{12}	f_{21}	f_{22}
(1. 1)	−2	−2	3	3
(1. 2)	−1	−1	−4	−4
(2. 1)	5	2	5	2
(2. 2)	2	6	2	6

このゲームは鞍點をもたない。しかし定理二、九により、ゲームの値は26/7と求まり、P_1の最適方略は（0, 0, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{7}$）P_2の最適方略は（$\frac{4}{7}$, $\frac{3}{7}$, 0, 0）となる。ゲームの値が前例より小さいが、これは前のものより不利な立場にあるから當然のことである。

法意五、三、例五、二は四×四行列であり、例五、一は三二×四行列である。このように一般に情報の分量が減ずると行列の大きさが小さくなる。これは一寸矛盾に感じられる。というのは情報の分量の減少は問題を一層難かしくさせるのではないかと考えられるからである。併し行列の大きさが小さくなつたからといつて問題が平易になつたということにはならないのであつて、しかも知識が少ないことは反えつて決心を早めるものである。（聾の人は普通の人より妻の選擇決定にわずらわされることがより少ない。）

例五、四、段階Iに於てP_1は（1・2）の中からxを選び、段階IIに於てP_2はxを知らずに（1・2）の中からyを選ぶ。段階IIIに於てP_1はxとyとを知つて（1・2）の中からzを選ぶ。利得函數は例五、一と同じとする。

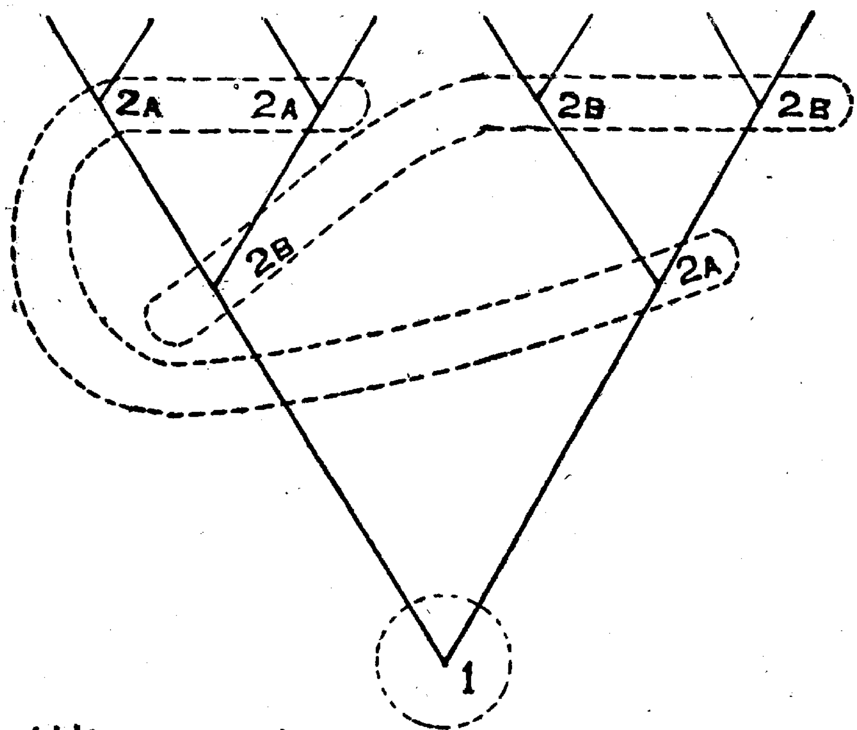
この例は下の如く圖示される。



（第三図）

例五、六、二人ゲームであつて、P_1は單一人であるがP_2はAとBよりなるチームとす。この二人は互に別々の室に入れられて分離され遊びの最中には互に連絡は出來ないものとする。始めに審判者がP_1にあつて（1・2）の中から選んだ數xを聞いてくる。次にそれが1であつた

ら審判者はAの處へ行つて（1・2）の中から數yを選んでもらう。一方P_1が2を選んだのであつたら審判者はBの處へ行つて（1・2）の中から數yを選んでもらう。



（第四図）

かくyが選ばれたら、いま行かなかつたP_2の別の人の處へ行つて（Aへ先に行つたら次にBに行くというように）（1・2）の中から數zを選んでもらう。かくしてP_2はP_1にM（x,y,z）を拂うものとする。こゝに

$M(1, 1, 1)=0$　　$M(2, 1, 1)=4$

$M(1, 1, 2)=2$　　$M(2, 1, 2)=0$

$M(1, 2, 1)=6$　　$M(2, 2, 1)=5$

$M(1, 2, 2)=8$　　$M(2, 2, 2)=6$

とする。

この例に於て注意すべきはxを知らされてないので、P_2の人は審判者が自分の處に段階IIに於て來たのか段階IIIに於て來たのか分らないことである。

このゲームは上の如く圖示される。

四、偶然の段階

偶然が働くゲームを考えると、それは次の三つの仕方で起る。

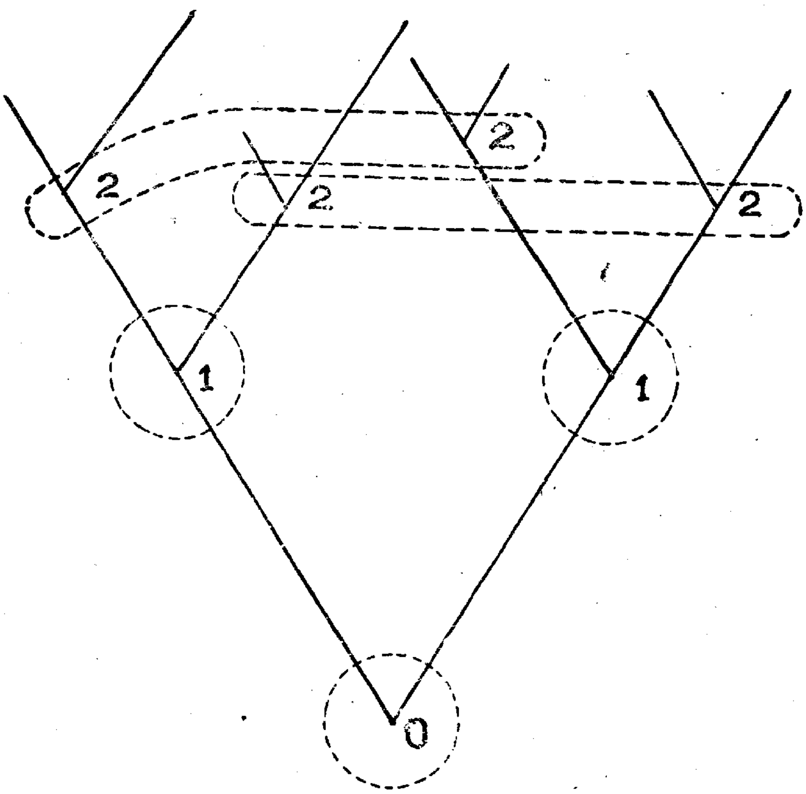
㈠、利得に影響を與える。

㈡、競技者がそれに基いて選擇を行うとする集合の大きさと性質に影響を與える。

㈢、競技者が振舞う段階の順序の決定に影響を與える。

いまこれらの各々に關する三つの例を與えよう。

例五、七、段階Iに於て貨幣が投げられる。段階IIに於て競技者P_1は貨幣の表裏を知らされて集合（1・2）からxを選ぶ。段階IIIに於て競技者P_2は貨幣の表裏については知らされないがxは知らされて、集合(1・2)か



(第五圖)

らyを選ぶ。いま表を1、裏を2と名付けこれからuが選ばれたものとして、M(u, x, y)がP_2からP_1に支拂われるものとする。

このゲームは上の如く圖示される。

この圖に於て0は偶然による段階を意味している。

例五、八、段階Iに於てP_1は(1・2)からxを選ぶ。段階IIに於ては(1・2)からyが選ばれるのであるが、その際1は1/4の確率従つて2は3/4の確率で選ばれるように偶然が働く。段階IIIに於てはP_2がyは知らされるがxは知らされずに(1・2)からzを選ぶ。その結果M(x,y,z)がP_2からP_1に支拂われるものとする。

例五、九、段階Iに於てP_1は(1・2)からxを選ぶ。段階IIに於ては(1・2)からyが選ばれるのであるが、その際1は1/5の確率で2は4/5の確率で選ばれるように偶然が働く。次に段階IIIに於ては段階IIに於て1が選ばれたらP_2がx及びyを知らされて(1・2)からzを選び、2が選ばれたらP_1がx及びyを知らされて(1・2)からzを選ぶ。その結果M(x,y,z)がP_2からP_1に支拂われるものとする。

この例は完全情報の場合であるから鞍點を有する。

五、二人以上のゲーム。

これまでは二人ゲームに就て述べたが、これを適當に

修正することによつてn人ゲームにまで擴張されることは明らかである。

例五、一〇、段階Iは偶然が働き、(1・2)からxを選ぶ際に、1は1/3の確率、2は2/3の確率で選ばれるものとする。もしxが1ならば段階IIに於てP_1はxを知つて(1 2・3)からyを選ぶ。もしxが2ならば段階IIに於てP_2はxを知つて(1・2・3)からyを選ぶ。yが1ならば段階IIIに於てP_3はyを知るがxを知らずに(1・2)からzを選ぶ。yが1でないならば段階IIIに於てP_4がxを知りかつyが1であるかないかを知つて(1・2)からzを選ぶ。かくx、y、zが選ばれた後に、四人に對する利得$M_1(x,y,z)$, $M_2(x,y,z)$, $M_3(x,y,z)$, $M_4(x,y,z)$が支拂われるものとする。

六、情報集合に關する制限

例五、六、(第四圖)に見らるゝ如く、與えられた情報に屬する凡ての頂點が同一水平線上にあるとは限らない。それ故與えられた情報に屬する頂點には如何なる制限もないのではあるが、明らかに次のこと丈は除外しなければならぬ。即ちそれらは全部同じ競技者に屬すべきであり、又競技者に手の同じ番號のものを提供しなければならぬ。

しかしこれだけの制限ではまだ實行に際して不十分である。大切な制限の一つとして、如何なる遊びも一回以上同じ情報を取扱うことはないという制限がある。このことに就て二つの例が擧げられている。

歴史的及び文獻的註

擴張された形のゲームの詳細はノイマン及びモルゲンシュテルンの例の書物に詳しいのであるが、右の研究はKuhn, Extensive Games. P.N.A.S. vol. 36 (1950)によるものである。

第六章 擴張された形のゲーム——一般論

一、有限ゲームの一般の定義

第五章で述べた如く擴張された形に於けるゲームを圖表で表わすことは非常に便利である。實際圖表は言葉による陳述よりもしばしば有用でありかつ明瞭である。それ故ゲームをそれを表わす處の圖表と等一視することは形式的に便利である。

さて有限n人ゲームとは次の法則からなる體系である。

一、一つの樹Tである。(第五章に述べられた意味に

於て）

二、Tの頂點の各々に於て定義されたn個の實函數F_1、F_2、……F^nが與えられている。即ちtが頂點ならば、遊びがtで終ったとき$F_i(t)$はP_iに支拂われる額である。

三、Tの各枝點に對して數0、1……nの一つが指示されていて、それはその番號の競技者が問題に於けるその點に於て振舞うことを示している。（數0は偶然の計畫がその點に於て用いられていることを意味している。）

四、Tの各枝點qに於てS_kの數（x_1,……, x_k）が與えられている。こゝにkはqの手の個數即ちqから出ている線の數である。

五、枝點を互に排反的なしかも盡くされた集合に分割すること（情報集合）は次の假定を滿足している。

(a) 與えられた情報集合に屬するすべての枝點は同じ競技者に關係している。

(b) 與えられた情報集合に屬するすべての枝點は手の番號をもつているが、それは右から左へ數えるものとする。

(c) Oが枝點に記されたならば、その情報集合は一點qのみよりなる。

(d) Sがゲームの或る遊びならば、即ちSが樹の底からその頂點の一つに迄つゞく破線にして、しかもAが情報集合ならば、SとAとの兩方に屬する枝點が多くとも一つ存在する。

ゲームをかく一般に定義することにより、方略を次の如く定義することが出來る。競技者P_iに對する方略とはP_iに對應する情報集合に對して定義される函數にして、情報集合に對するその値はP_iに有用な手の一つである。かくして方略は競技者に彼の知識のすべての可能な狀態に對して爲すべきことを告げる。

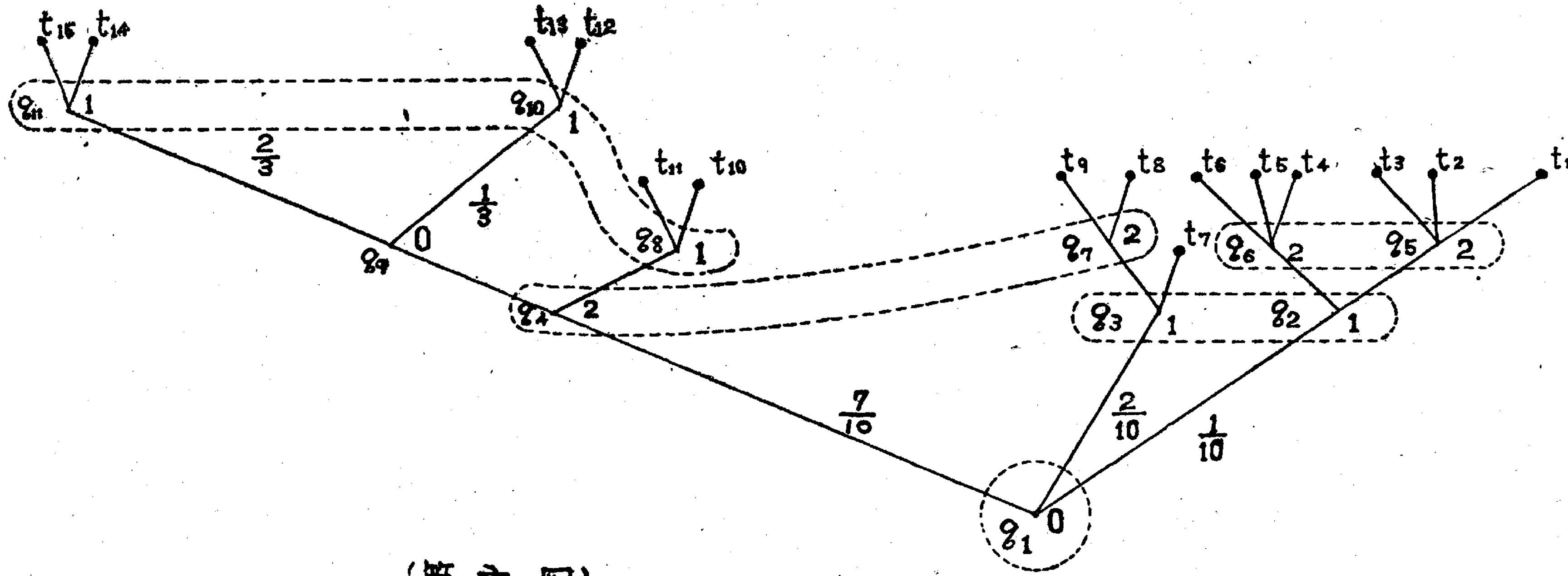
さて實例を一つ揭げよう。

P_1には二つの情報集合（q_2、q_3）及び（q_8、q_{10}、q_{11}）がある。P_2には二つの情報集合（q_4、q_7）及び（q_5、q_6）がある。それ故P_1の方略は（q_2、q_3）及び（q_8、q_{10}、q_{11}）に對して定義され、値として數1及び2をとる四つの函數のいずれか一つである。P_2の方略は（q_4、q_7）及び（q_5、q_6）に對して定義され、

$$F((q_4, q_7)) \in (1, 2)$$

$$F((q_5, q_6)) \in (1, 2, 3)$$

なる函數である。



(第六図)

P_1が方略x_iを選ぶならばベクトル

$x=(x_1, \cdots\cdots, x_n)$は各枝點に於ける各々の手に對して確率をあたえる。枝點qに於て手iを選ぶ確率を$p(x_1, q, i)$と表わそう。

いま第六圖に於てP_1が

$$F((q_2, q_3))=1,\ F((q_8, q_{10}, q_{11}))=2$$

を滿足する方略Fを用い、P_2が

$$G((q_4, q_7))=2,\ G((q_5, q_6))=3$$

を滿足する方略Gを用いたとして順序對(F,G)をaで表わそう。しかるとき

$$p(a, q_1, 1)=\frac{1}{10} \quad p(a, q_1, 2)=\frac{2}{10}$$

$$p(a, q_1, 3)=\frac{7}{10}$$

$$p(a,\ q_2,\ 1)=p(a,\ q_3,\ 1)=1$$
$$p(a,\ q_2,\ 2)=p(a,\ q_3,\ 2)=0$$
$$p(a,\ q_5,\ 1)=p(a,\ q_6,\ 1)=0$$
$$p(a,\ q_5,\ 2)=p(a,\ q_6,\ 2)=0$$
$$p(a,\ q_5,\ 3)=p(a,\ q_6,\ 3)=1$$
$$p(a,\ q_4,\ 1)=p(a,\ q_7,\ 1)=0$$
$$p(a,\ q_4,\ 2)=p(a,\ q_7,\ 2)=1$$
$$p(a,\ q_9,\ 1)=\frac{1}{3},\ p(a,\ q_9,\ 2)=\frac{2}{3}$$
$$p(a,\ q_8,\ 1)=p(a,\ q_{10},\ 1)=p(a,\ q_{11}\ 1)=0$$
$$p(a,\ q_8,\ 2)=p(a,\ q_{10},\ 2)=p(a,\ q_{11},\ 2)=1$$

いまxを方略の順序集合、qを枝點、tを頂點とするとき、$p(x,q,t)$ を以てqからtへつゞく確率を表わそう。しかるとき

$p(a,\ q_4,1)=0$ は $p(a,\ q_4,t_{10})=0$ 又は $p(a,\ q_4,t_{11})=0$ とかける。

いまtで終る遊びの枝點を $q_1,q_2,\cdots\cdots q_r$ とし

$$p(x,t)=\prod_{i=1}^{r}p(x,\ q_i,t),$$

とおくならば $p(x,t)$ は遊びがtで終る確率を表わす。

例えば

$$p(a,\ t_1)=p(a,\ q_1,t_1)\cdot p(a,\ q_2,t)\cdot q(a,\ q_5,t)=\frac{1}{10}\cdot1\cdot0=0$$
$$p(a,\ t_2)=p(a,\ q_1,t_2)\cdot p(a,\ q_2,t_2)\cdot p(a,\ q_5,t_2)=\frac{1}{10}\cdot1\cdot0=0$$
$$p(a,\ t_3)=p(a,\ q_1,t_3)\cdot p(a,\ q_2,t_3)\cdot p(a,\ q_5,t_3)=\frac{1}{10}\cdot1\cdot1=\frac{1}{10}$$

同様に

$p(a,\ t_4)=0$	$p(a,\ t_{10})=0$
$p(a,\ t_5)=0$	$p(a,\ t_{11})=0$
$p(a,\ t_6)=0$	$p(a,\ t_{12})=0$
$p(a,\ t_7)=\frac{2}{10}$	$p(a,\ t_{13})=\frac{7}{30}$
$p(a,\ t_8)=0$	$p(a,\ t_{14})=0$
$p(a,\ t_9)=0$	$p(a,\ t_{15})=\frac{7}{15}$

結局

$$\sum_{i=1}^{15}p(a,\ t_i)=1$$

いまH_iをP_iに對する利得函數とし、P_iの期待値をM_i

$M_1(x)$ とすれば

$$M_1(x)=\sum_{j=1}^{s} H_1(t_j)\cdot p(x,t_j)$$

となる。例えば最初の競技者P_1に對してH_1を次の如く與えるならば

$H_1(t_1)=10$ 　 $H_1(t_8)=30$
$H_1(t_2)=-10$ 　 $H_1(t_9)=20$
$H_1(t_3)=10$ 　 $H_1(t_{10})=-30$
$H_1(t_4)=20$ 　 $H_1(t_{11})=0$
$H_1(t_5)=30$ 　 $H_1(t_{12})=30$
$H_1(t_6)=0$ 　 $H_1(t_{13})=-30$
$H_1(t_7)=-10$ 　 $H_1(t_{14})=40$
$H_1(t_{15})=15$

先きに考えた順序集合aに對して

$$M_1(a)=\sum_{j=1}^{15} M_1(t_j)\,p(a,t_j)$$
$$=10\cdot\frac{1}{10}+(-10)\cdot\frac{2}{10}+(-30)\cdot\frac{7}{30}+15\cdot\frac{7}{15}=-1$$

となる。

既に知れる如く、任意の有限ゲームは矩形ゲームに歸着される。始めのゲームをこの標準化された形にするには、各競技者に對するすべての可能な方略と函數の値$M_1,\ldots\ldots M_n$を計算すればよい。

さて利得函數には二種類ある。

(一)、ゲームの圖表の頂點の集合の上に定義された函數$H_1,\ldots\ldots,H_n$で、それは遊びが與えられた方法で終つた場合に各競技者に支拂われる額を示している。

(二)、純粹方略の順序づけられたn組の集合の上に定義された函數$M_1,\ldots\ldots,M_n$でそれは各競技者が與えられた方略を用いた場合に、各競技者に（平均して）支拂われる額を示している。

この二つを區別して前者を第一種遊び利得函數、後者を第二種方略利得函數という。普通にはすぐに分るので、遊び及び方略の語は略される。

零和ゲームの正しい定義は遊び利得函數よりも方略利得函數によるものであることは注意されるべきである。それ故$M_1,\ldots\ldots,M_n$が方略利得函數なるとき、$\sum_{i=1}^{n} M_i(x)=0$なる如く各競技者$P_1\ldots\ldots P_n$に方略のn組xが與えられるならば、ゲームは零和と呼ばれる。

第五章の問題八、九で見らるゝ如く、遊び利得函數にこの式が成立しない場合でも、或る場合にはこの條件が

満足していることを見るであろう。

二、完全情報を有するゲーム——均衡點。

次に完全情報を有するという特別な種類のゲームを考えよう。これは各遊びの各點に於て各競技者は、振舞う自分の番になつたとき、以前に如何なる選擇がなされたかを正確に知つているのである。從て圖表を書いてみると、すべての情報集合は唯一點よりなることを意味する。

さて完全情報を有する零和二人ゲームの標準形の行列は鞍點を有すること即ちこのゲームに對しては最適な純粹方略があることをこれより示そう。

完全情報を有する簡單なゲーム(例えばticktacktoe)ならば直に解決するので誰しもこれを遊ぶことを喜ばないが、複雜なものならば(例えばチェス)最適方略は確かに存在するのではあるが、可能な方略が余りにも多いので計算が繁雜となりこれを見出すことが容易ではなくなる。それ故チェスは飽きられることなく遊ばれるのである。

證明には數學的歸納法が用いられるので、零和二人ゲームよりも二人ゲームに對するより强い定理が證明されている。そのために鞍點を一般化した均衡點(equilibrium point)について説明しよう。

n人ゲームの方略利得函數を $M_1, \ldots\ldots, M_n$ とし P_i に有用な純粹方略を A_i とし、Aを $A_1, \ldots\ldots, A_n$ のカルテシアン積とする。しかるとき、各々のi及び A_i のある元yに對して

$$M_i(x_1, \ldots\ldots, x_n) \geqq M_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots\ldots, x_n)$$

ならばAの元 $(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ を均衡點という。

つまり均衡點は競技者の一人だけがそれに固執し、他の競技者はそれを固執するよりもより良く振舞えないような遊びの方法である。

零和二人ゲームのときは均衡點は鞍點となるがその證明は原著に讓る。

次に切斷(truncation)とは第一の段階を削ることによつて與えられたゲームから生ずる各枝葉のゲームを意味する。(例えば第六圖に於て第一段階を削ると q_2、q_3、q_4 を根元とする三つの切斷(枝葉)が出來る。)從て切斷は完全情報のゲームの場合しか考えられない。

また完全情報を有するゲームの競技者の方略は競技者の段階の各々に於ける手を取出す函數であるから、ゲームの種々の切斷に對應して與えられた方略の切斷が考え

られる。**方略の切斷**はゲームの切斷に對應する枝點に對してのみ定義され、それは始めの方略を行う枝點に於ける同じ手を取出す。

定理六、一、完全情報を有する二人ゲームに於て$A^{(1)}$及び$A^{(2)}$をP_1及びP_2に有用な方略の集合としAをそれらのカルテシアン積とするならば、Aは均衡點を有する。

證明はゲームの**長さ**(length)に關する歸納法を用いている。

注意六、三、定理六、一、はn人ゲームに對しても容易に成立する。

また均衡點は純粹方略の集合の場合だけを考えたが混合方略でも均衡點は定義できて、n人ゲームの際にも混合方略の集合のなかに均衡點が存在することが證明できる。

三、完全呼戻を有するゲームと行動方略。

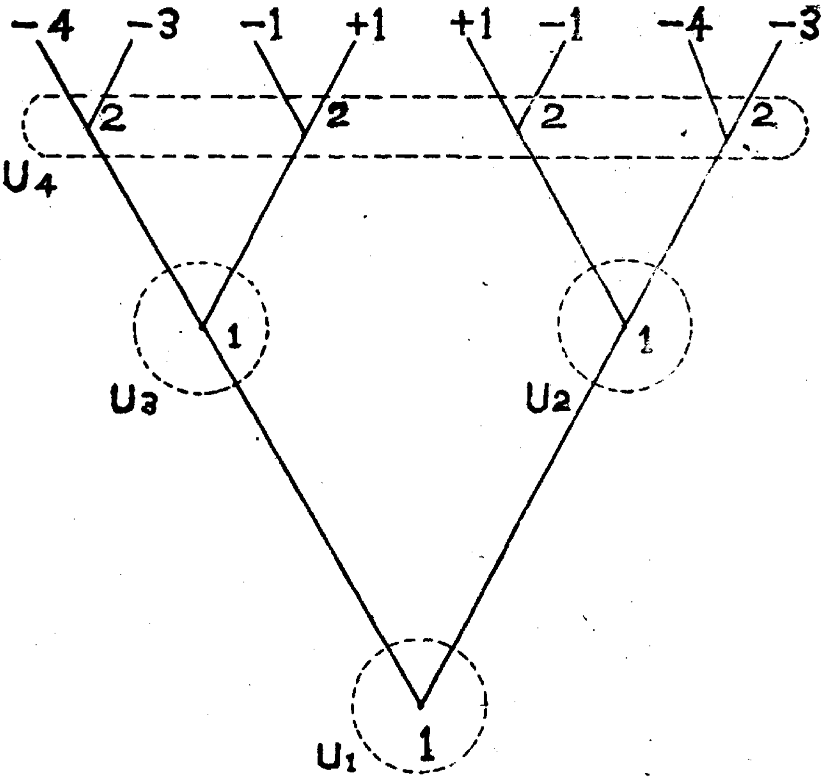
完全情報を有するゲームの興味深き有用な一般化は**完全呼戻**(perfect recall)を有するゲームである。それは各競技者が彼の以前の各段階に於て、彼が爲した又は知つたすべてのものを記憶しているゲームである。從て二人ゲームは完全呼戻ゲームであるが、二組のチームによるゲームはそれがチーム間に於て互に知らされ合わないとき完全呼戻ゲームではなくなる。

完全呼戻を有するゲームの概念はゲームの情報集合の語を以て精確に言表わされる。それは次の條件を滿足する。PとQとを或段階とし、それは共に同じ競技者によつて振舞われ、ゲームの或る遊びに於てPはQに先んずるものとする。UとVはそれぞれPとQを含む情報集合とし、またUの各點はk個の手を表わすものとする。U_i $(i=1, 2, \ldots\ldots, k)$を樹の頂點でUの或點に於てi番目の手をとることによつて到達されるものすべての集合とする。しかるとき或るiに對して$V \subseteq U_i$が成立する。

さて行動方略の概念に就て述べよう。純粹方略即ちゲームの各段階に於て爲されるものを決定するために、混合方略の分量に偶然の趣向をこらすことは明らかなことである。それと幾分似た方法として、段階に於て如何なる手が選ばれるかを決定するために、各段階に於て偶然の趣向をこらすことになる。かゝる遊びの體系を**行動方略**(behavior strategy)という。嚴密にいうならば與えられた競技者に對する行動方略とは彼の情報集合の級の上に定義された函數で、それは各情報集合UにS_rの番號を指示するものである。こゝにrはUによつて表わされ

る手の數である。ゲームの一人の競技者に對する與えられた行動方略、または他の競技者に對する與えられた純粋方略又は混合方略又は行動方略に對して、各競技者の期待値が計算できることは明らかである。

例として右の第七圖を考えよう。



（第七図）

樹の頂點にある數は第一の競技者に對する利得である。第一の競技者に對する行動方略は（U_1, U_2, U_3）の上に定義された函數でその數はS_2に屬する（これらの情報集合の各々に對して選ばるべき手が二つあるから）。一方P_2に對する行動方略はU_4の上に定義された函數でその値はS_2にある。かくしてこのゲームに於てはP_2に對する行動方略は本質的に混合方略と同じであり、このことは競技者が唯一つの情報集合しかもたない場合に勿論つねに起ることとである。

さてP_1は次の行動方略fをとるとしよう。

$$f(U_1)=(\alpha_1,\ 1-\alpha_1)$$
$$f(U_2)=(\alpha_2,\ 1-\alpha_2)$$
$$f(U_3)=(\alpha_3,\ 1-\alpha_3)$$

またP_2は次の行動方略gをとるとしよう。

$$g(U_4)=(\beta,\ 1-\beta)$$

しかるときP_1の期待値 $E(f,\ g)$ 又は $E(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3;\ \beta)$ は次の如くになる。

$$\begin{aligned}E(\alpha_1,\ \alpha_2\ \alpha_3;\beta)\ =&-4(\alpha_1)(\alpha_3)(\beta)-3(\alpha_1)(\alpha_3)(1-\beta)\\&-(\alpha_1)(1-\alpha_3)(\beta)+(\alpha_1)(1-\alpha_3)(1-\beta)\\&+(1-\alpha_1)(\alpha_2)(\beta)\\&-(1-\alpha_1)(\alpha_2)(1-\beta)-4(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(\beta)\end{aligned}$$

$$-3(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\beta)$$
$$=\alpha_1\alpha_2\beta-3\alpha_1\alpha_2\beta-4\alpha_1\alpha_2-2\alpha_1\alpha_2$$
$$-\alpha_1\beta+3\alpha_2\beta+4\alpha_1+2\alpha_2-\beta-3$$

完全呼戻を有するゲームは最適の行動方略をつねに有することが證明できるのである。即ちEを完全呼戻を有するゲームの期待函數とするならば、α及びβをP_1及びP_2に對する混合方略（又は行動方略）とするとき

$$E(\alpha,\ g)\leqq E(f,\ g)\leqq E(f,\ \beta)$$

ならしめる行動方略fがP_1に、gがP_2に對して存在する。（證明の文献は註に讓る。）

歴史的及び文献的註

擴張された形のゲームの形式的定義は Kuhn の論文 (P.N.A.S.1950) にある。定理六、一の證明は同論文にある。均衡點は Nash(Econometrica vol.18, 1950) により始めて導入された。n人ゲームは混合方略に於ても均衡點を有することの證明はやはり Nash に負うものである。完全呼戻を有するゲームが最適行動方略を有するという定理の證明は Kuhn の右の論文にある。

第七章　無限に多くの方略を有するゲーム

これまでは有限ゲームについて論じてきたが本章では無限ゲーム即ち選擇の若干のものが無限集合をなしているゲームに就て考える。しかし有限ゲームに就て論じたことを單に一般化するといつた仕方では取扱わない。

先ず各競技者に對して一つの段階を有するゲームだけを考えることにする。その際如何なる競技者も他の競技者の選擇に就ては情報は與えられていないものとする。しかるときP_1は集合AからxをとりP_2は集合Bからyをとることになり、P_2がP_1に支拂う量M(x,y)が實函數として定まつている。これは第一章に於ける矩形ゲームが無限ゲームの場合に擴張されることを意味する。

次にA及びBを閉區間〔0,1〕にとることにして、これを連續ゲーム (continuous game) と呼ぶことにする。これは閉區間が連續體と呼ばれることからかく名付けたものである。といつて函數Mに連續の何らかの性質が負わされている譯ではない。またA及びBにこの制限を負わしたことは最初感じた程峻嚴なものではない。というのはAとBが有限閉集合ならば、AとBの元を閉區間〔0,1〕から選擇したことと同じゲームに導かれるからである。それ故有限閉區間から競技者が選擇をなしたということを除けば、矩形ゲームに似たものは、連續ゲーム

でありまたそれに誘導できるのである。

例七、一、P_1が區間〔0,1〕から數xを選び、P_2は同區間から獨立に數yを選ぶ。そしてP_1に對する利得は

$$M(x,\ y)=2x^2-y^2$$

とする。

このゲームは非常に簡單なのでP_1が$M(x,\ g)$を極大にする最適方略は直に求まる。それは$x=1$と選ぶことであり、P_2が$M(x,\ y)$を極小にするには$y=1$と選ぶ。それ故結果は1となる。

これを一般化するに、利得函數がMなるゲームを考え

$$\max_{0\leqq x\leqq 1}\ \min_{0\leqq y\leqq 1}\ M(x,\ y)=v_1$$

$$\min_{0\leqq y\leqq 1}\ \max_{0\leqq x\leqq 1}\ M(\ ,\ y)=v_2$$

は共に存在するものとする。しかるとき第一章に示した如く、P_1は少くともv_1を得ること確實なる選擇を行い、それによりP_2はP_1が多くともv_2を得ることを見る。もし$v_1=v_2$ならば定理一、五によりMは鞍點$(x_0,\ y_0)$を有し

$$M(x_0,\ y_0)=V_1=V_2$$

なることが分る。この場合にx_0及びy_0をP_1及びP_2に對する最適方法と呼び、v_1從てv_2をゲームの値と呼ぶことは自然である。

例七、一に於ては$M(x,y)=2x^2-y^2$にしてそれは鞍點$(1,1)$を有するを以て

$$M(1,1)=v_1=v_2=1$$

となる。しかし鞍點の存在しない例もある（例七、二、參照）。

より複雜な二つの場合として(一)v_1とv_2とがともに存在しない、(二)兩方は存在するが等しくはない、がある。(二)の場合は第十章で論ずるが、(一)の場合に就てはこれが實際に起ることを示しておこう。實際v_1とv_2とが存在しない場合にはゲームの値や二人の競技者に對する最適方略を如何に定義してよいか戸惑うのである。

例七、三、連續ゲームの利得函數が次の如く定義されている。

$$M(x,\ y)=\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\ (x\neq 0,\ x\neq 0)$$

$$M(0,\ y)=-\frac{1}{y}\qquad (y\neq 0)$$

$$M(x,\ 0)=\frac{1}{x}\qquad (x\neq 0)$$

$$M(0,\ 0)=0$$

このとき明らかにP_1は0をとらない。何故ならばP_2は

yを正の小なる數にとることによつて額を多くすることが出來るからである。またP_1は同じ正數をつねにとることはない。何故ならP_2がxより小なるyをとるからである。故にP_1は小なる正數が大なる正數より、よりしばしば出てくるような偶然の趨向でxを選ぶであろう。しかしかゝる方法も最適ではない。何故なら與えられた頻度を有する、より小なる數を選ばしめる新しい偶然の趨向をこらすことによつて期待値を一層增大せしめることが出來るからである。かくしてゲームの値は示されず、これを遊ぶ最適の方法も存在しなくなる。

しかしv_1とv_2とが存在しないときつねに鞍點が存在しないとは限らない。例えば

$$M(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad (x \neq 0,\ y \neq 0)$$

$$M(x, 0) = M(0, y) = 0$$

の場合にはv_1及びv_2は存在しないが、鞍點は(0, 0)として存在する。ゲームの値は0であり、P_1の最適方法は$x=0$, P_2の最適方法は$y=0$である。

注意七、四、

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \min_{0 \leq y \leq 1} M(x, y)$$

と

$$\min_{0 \leq y \leq 1} \max_{0 \leq x \leq 1} M(x, y)$$

とは存在しないが

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \inf_{0 \leq y \leq 1} M(x, y)$$

$$\inf_{0 \leq y \leq 1} \sup_{0 \leq x \leq 1} M(x, y)$$

が存在して等しい場合には、鞍點は存在しないがこの値を以てゲームの値とすることが出來る。

歴史的及び文献的註

無限ゲームの最初の取扱いは Ville によつてなされた。

第八章　分布函數

第九章　スティールチェス積分

この二章は數学なのでこゝには述べない。第十章以下に於ては主として連續ゲーム及びn人ゲームについて述べられているが、それらの紹介はさきに約した如く後日に讓り一先ず筆を洗うことゝしよう。

（昭和二八、一〇、二〇）