ブ ラ ウ ワ ー 論 理

武 隈 良 一

I. 排中律の拒否

周知の如く論理学には三つの根本法則がある。I. 同一律, II. 矛盾律, III. 排中律がそれである。これを説明すれば

I. aはaである。

II.「aはbである」と「aは非bである」とは同時に成立しない。

III.「aはbである」と「aは非bである」とはいずれか一方が必ず成立する。

となるが, このうちIIIの排中律を拒否するものがブラウワー論理である。

和蘭の數学者ブラウワー (L.E.J. Brouwer 1881年生) によれば有限個のものを取扱う場合には疑もなく排中律は適用されるが, 無限に多くのものを取扱う際には無批判にこれを適用することは危險であるという。

例えばいま自然數の或性質をEとし, この性質に對して「性質Eを有する自然數は存在するや」という問を提出してみよう。このとき次の答が可能である。

1: 性質Eを有する自然數nが存在することの證明, 又は何んらかの方法でかゝるnが一つでも具體的に見出されること, が出來たときこの問は肯定的の答を有する。

2.　如何なる自然數nも性質Eを有しないことが證明されたとき、この問は否定的の答を有する。

この二つの場合の何れもが起らない場合，即ちEを有するnの存在することも存在しないことも確認できない場合でも，從來ならば「性質Eを有する自然數nは存在するか，或は全然存在しないか，の二つの場合だけでその他の場合はない」とするのであるがこれ即ち排中律である。

然るにブラウワー一派の直觀主義者はこれを速斷なりとし次の第三の場合を主張するのである。

3.　性質Eを有する自然數の存在又は非存在が確認されないとき，この問は解決されない即ち排中律は成立しない。

そして性質Eを有する自然數nが實際に見出されるか又はかゝる自然數を構成する方法が與えられなければ肯定的の答ができないというのである。つまり有限個の自然數ならば性質Eを有するか否かは實際に檢證できるので差支えないが，自然數全體となれば無限個になるのでそれを一々檢證することは不可能なので，性質Eを有する自然數を構成する方法を要求するのである。

この要求に對して一應次の如く言うことは出來る。「無限個の自然數であつてもこれを檢證すれば，性質Eを有するか否かの二つの場合しか起らないではないか」と。然しこれに對して直觀主義者は「排中律が有限無限を問わず如何なる場合にも絕對に妥當ならばそれでよいが，排中律が絕對妥當性を有することが如何にして分るか」と反駁し，排中律の絕對妥當性を疑う權利があると主張するのである。

以上を約言すれば，構成する方法が與えられない場合には排中律は認められないということになる。かゝる意味で排中律を拒否しようとするのがブラウワー論理である。

ブラウワー以前にも自然科学方面に於て排中律の絕對妥當性を疑つた人は古くにあつた。哲人エピクロスの高弟の一人が師に問うて曰く，「私から見れば，友人ヘルシアスは明日も生きているか，或は生きていないかの何れかであらうと思われます。その上この命題は正しいばかりでなく，また必然的である

と主張したいのでございますが」と。これに對してエピクロスの答は意外も，「否，私はその二つの何れをも承認しない。何故ならば，もし二つの中の一つが必然的であことを許容するならば，明日ヘルシアスは生きているか，生きていないかの何れかである，ということが必然的となる。然しながら自然の中にはかゝる必然性はない」というたとのことである。この哲人のこの言葉は聽者をして驚きの餘り一時啞然たらしめたのである。(7)*

それてさておき，無限を取扱う數学に於て排中律を拒否するということになれば在來の數学は著しく危機に瀕んするのである。というのは數学の證明に於て排中律の適用を制限することになれば，これまでに得られた貴重な定理のうち，不確實であるとして打棄てなければならぬものが數多く出てくるからである。「我々は我々の最も貴重な寳の大部分を失わうとする危險に瀕している」とヒルベルトの警告が發せられた由因である。

このブラウワーの革命に對して，數学の再建がブラウワー自身並びにヒルベルト等によつて企てられ，數学基礎論は華々しく展開されたのであるがそれらの記述は本稿の意圖する處ではない。(8)

Russellの論理主義に對立するBrouwerの直觀主義，加うるにHilbertの公理主義といつたものが今世紀の初頭から互に論戰を交えたのである。

Russell の古典論理に對してブラウワー論理はやゝ廣い立場をとるものであり直觀主義になぞらえてこれを直觀論理とよぶことがある。

排中律の拒否から起つた數学基礎論の問題，そして古典論理の再反省とその擴張，等々問題は際限なく繰展げられる。これらに關する文献を揭げることは汗牛充棟たゞならざるものがあるが，こゝでは次の興味深い(1)(4)(5)(6)(9)(10)(13)(14)(29)なるもののあること丈を注意しておこう。

II. Heyting の公理

ブラウワー論理を Heyting の論文によつて述べてみよう。これは Heyting の原著「直觀論理の式法則」(28)によるものである。

* 括弧内の番號は後揭文献の番號を示す。

先ず Glivenko (26) が證明したように，ブラウワー論理は次の二性質の意味に於て完全である。

1. 定理aが古典論理に於て證明可能ならば，「aは僞とはなり得ない」という定理がブラウワー論理に於て成立する。

2. 定理「aは僞である」が古典論理に於て證明可能ならば，それはブラウワー論理に於ても成立する。

こゝで以下に用いる記號を説明しておこう。

$a \supset b$,　　a ならば b なり

$a \wedge b$,　　a 且つ b

$a \vee b$,　　a 又は b

$\neg a$,　　a ならず（非 a）

$\vdash p$,　　p は眞である

また例えば簡單のために $\vdash p \supset \vdash q$ とかくことがあるが，これは「$\vdash p$ 且つ $\vdash p \supset q$ ならば $\vdash q$ なり」を意味する。

古典論理に於ては $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ は互に他のものによつて表わされるが，直觀論理に於てはこれは不可能である。また直觀論理に於ては次の定理は正しいが、その逆は全部證明不可能である。

4.46.　$\vdash . \neg a \vee b \supset . a \supset b$

4.9.　$\vdash . a \supset b . \supset \neg (a \wedge \neg b)$

4.47.　$\vdash . a \vee b \supset . \neg a \supset b$

4.91.　$\vdash . a \vee b \supset \neg (\neg a \wedge \neg b)$

3.6.　$\vdash : a \vee b \supset : a \supset b . \supset b$

4.92.　$\vdash . a \wedge b \supset \neg (\neg a \wedge \neg b)$

さてこれより直觀論理を系統的に述べることゝしよう。

1.1.　眞なる式の表(die Liste der "richtigen Formeln")に屬する式に對しては $\vdash$ をつける。また式が公理なるとき，即ち何んとしても(willkürlich)眞であるとみなされるとき，記號 $\vdash$ を二度つけることにする。

1.2.　aとbが眞なる式ならば $a \wedge b$ も眞なる式である。

1.3. aと$a \supset b$が眞なる式ならばbは眞なる式である。

これらを演算法則として計算が行われる。式に於て括弧でくゝる代りに・を用いることがある。先ず$\wedge$に關する公理を掲げよう。

2.1. $\vdash\vdash \cdot a \supset a \wedge a.$

2.11. $\vdash\vdash \cdot a \wedge b \supset b \wedge a.$

2.12. $\vdash\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b \wedge c.$

2.13. $\vdash\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot b \supset c \cdot \supset \cdot a \supset c.$

2.14. $\vdash\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset b.$

2.15. $\vdash\vdash \cdot a \wedge \cdot a \supset b \cdot \supset b.$

2.01. $\vdash \cdot a \supset\subset b \cdot \overline{\mathrm{D}} \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot b \supset a.$

こゝに$\overline{\mathrm{D}}$は定義を意味し左邊は右邊の式で表わされるものとする。逆も然り。

以上を公理及び定義としてこれより次の$\wedge$に關する定理を導くのであるが證明は省略する(38)

2.2. $\vdash \cdot a \wedge b \supset a.$

2.21. $\vdash \cdot a \supset a.$

2.22. $\vdash \cdot a \wedge b \supset b.$

2.23. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot c \supset d \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b \wedge d.$

2.24. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot a \supset c \cdot \supset\subset \cdot a \supset b \wedge c.$

2.25. $\vdash \cdot b \cdot \wedge \cdot a \supset c \cdot \supset \cdot a \supset b \wedge c.$

2.26. $\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset a \wedge b.$

2.27. $\vdash : a \supset \cdot b \supset c : \supset\subset \cdot a \wedge b \supset c.$

2.271. $\vdash : a \supset \cdot b \supset c : \supset\subset : b \supset \cdot a \supset c.$

2.28. $\vdash \cdot a \supset c \cdot \supset \cdot a \wedge b \supset c$

2.281. $\vdash : a \supset b \cdot \supset : a \supset \cdot c \supset b.$

2.282. $\vdash \cdot a \wedge \cdot a \wedge b \supset c \cdot \supset \cdot b \supset c.$

2.29. $\vdash : a \supset b \cdot \supset : b \supset c \cdot \supset \cdot a \supset c.$

2.291. $\vdash : b \supset c \cdot \supset : a \supset b \cdot \supset \cdot a \supset c.$

2.3. $\vdash : a \wedge b \cdot \wedge c \cdot \supset \cdot a \wedge \cdot b \wedge c.$

2.31. $\vdash\cdot a\wedge b\cdot\wedge c\cdot\supset\cdot b\wedge a\cdot\wedge c.$

2.32. $\vdash\cdot a\wedge\cdot b\wedge c\cdot\supset\cdot a\wedge b\cdot\wedge c.$

2.02. $\vdash\cdot a\wedge b\wedge c\,\overline{\supset}\cdot a\wedge b\cdot\wedge c.$

2.33. $\vdash\cdot a\wedge b\wedge c\supset\subset a\wedge c\wedge b\supset\subset b\wedge a\wedge c$, usw.

2.4. $\vdash\cdot a\supset b\cdot\wedge\cdot b\supset c\cdot\wedge\cdot c\supset d\cdot\supset\cdot a\supset d.$

次に∨に關する公理を掲げこれに關する定理を導こう。

3.1. $\vdash\vdash a\supset a\vee b.$

3.11. $\vdash\vdash a\vee b\supset b\vee a.$

3.12. $\vdash\vdash\cdot a\supset c\cdot\wedge\cdot b\supset c\cdot\supset\cdot a\vee b\supset c.$

3.2. $\vdash\cdot a\vee b\cdot\vee c\cdot\supset\cdot a\vee\cdot b\vee c.$

3.21. $\vdash\cdot a\vee\cdot b\vee c\cdot\supset\cdot a\vee b\cdot\vee c.$

3.01. $\vdash\cdot a\vee b\vee c\,\overline{\supset}\cdot a\vee b\cdot\vee c.$

3.22. $\vdash\cdot a\vee a\supset a.$

3.3. $\vdash\cdot a\supset b\cdot\wedge\cdot c\supset d\cdot\supset\cdot a\vee c\supset b\vee d.$

3.31. $\vdash\cdot a\supset b\cdot\supset\cdot a\wedge c\supset b\vee d.$

3.32. $\vdash\cdot a\supset b\cdot\supset\cdot a\vee b\supset b.$

3.33. $\vdash\cdot a\vee b\supset b\cdot\supset\cdot a\supset b.$

3.34. $\vdash\cdot a\supset b\cdot\supset\cdot a\vee c\supset b\vee c.$

3.35. $\vdash\cdot a\vee b\vee c\supset b\vee a\vee c\supset a\vee c\vee b$ usw.

3.4. $\vdash\cdot a\wedge c\cdot\vee\cdot b\wedge c\cdot\supset\cdot a\vee b\cdot\wedge c.$

3.41. $\vdash\cdot a\vee b\cdot\wedge c\cdot\supset\cdot a\wedge c\cdot\vee\cdot b\wedge c.$

3.42. $\vdash\cdot a\wedge b\cdot\vee c\cdot\supset\subset\cdot a\vee c\cdot\wedge\cdot b\vee c.$

3.5. $\vdash\cdot a\supset b\vee c\cdot\wedge\cdot b\supset d\cdot\wedge\cdot c\supset e\cdot\supset\cdot a\supset d\vee e.$

3.51. $\vdash\cdot a\supset b\vee c\cdot\wedge\cdot b\supset d\cdot\wedge\cdot c\supset d\cdot\supset\cdot a\supset d.$

以上により次の重要な定理が得られるがこの逆は證明不可能である。

3.6. $\vdash : a\vee b\supset : a\supset b\cdot\supset b.$

次に¬に關する公理を掲げこれに關する定理を導こう。

4.1. $\vdash\vdash\cdot\neg a\supset\cdot a\supset b.$

4.11. $\vdash\vdash\cdot a\supset b\cdot\wedge\cdot a\supset\neg b\cdot\supset\neg a.$

4.01.　$\vdash\cdot\neg\neg a\overline{\overline{\mathrm{D}}}\neg(\neg a).$

4.2.　$\vdash\cdot a\supset b\cdot\supset\cdot\neg b\supset\neg a.$

4.21.　$\vdash\cdot a\supset\neg b\cdot\supset\cdot b\supset\neg a.$

4.22.　$\vdash\cdot a\supset b\cdot\supset\cdot\neg\neg a\supset\neg\neg b.$

4.23.　$\vdash\cdot a\wedge b\supset c\cdot\supset\cdot a\wedge\neg c\supset\neg b.$

4.24.　$\vdash\cdot a\supset b\cdot\wedge\neg b\cdot\supset\cdot\neg a.$

4.3.　$\vdash\cdot a\supset\neg\neg a.$

この定理ははじめ Heyting が公理とおいたが Glivenko によつて誘導されるようになつた。

4.31.　$\vdash\cdot\neg a\supset\neg\neg\neg a$

4.32.　$\vdash\cdot\neg\neg\neg a\supset\neg a$

この二つの定理により直観論理に於ては，三重否定は一重否定に等しいという著しい性質が得られる。(25)

4.4.　$\vdash\cdot a\wedge\neg a\supset b.$

4.41.　$\vdash\cdot a\wedge\neg a\cdot\vee b\cdot\supset b.$

4.42.　$\vdash\cdot a\vee b\cdot\wedge\neg a\cdot\supset b.$

4.43.　$\vdash\cdot\neg a\supset\cdot\neg b\supset\neg(a\vee b)$

4.44.　$\vdash\cdot\neg(a\vee b)\supset\subset\neg a\wedge\neg b.$

4.45.　$\vdash\cdot a\vee\neg a\cdot\supset\cdot\neg\neg a\supset a.$

4.46.　$\vdash\cdot\neg a\vee b\cdot\supset\cdot a\supset b.$

4.47.　$\vdash\cdot a\vee b\supset\cdot\neg a\supset b.$

この 4.46と4.47 は逆が證明不可能である。

4.5.　$\vdash\cdot b\wedge a\supset\neg a\cdot\supset\cdot b\supset\neg a.$

4.51.　$\vdash\cdot a\wedge\neg(a\wedge b)\supset\neg b.$

4.511.　$\vdash\cdot\neg\neg a\wedge\neg(a\wedge b)\ \neg b.$

4.52.　$\vdash\cdot\neg(a\wedge b)\supset\cdot a\supset\neg b.$

4.521.　$\vdash\cdot a\supset\neg b\cdot\supset\neg(a\wedge b)$

4.53.　$\vdash\cdot\neg a\vee\neg b\supset\neg(a\wedge b)$

4.54.　$\vdash \cdot \neg(a \wedge b) \wedge \cdot a \vee \neg a \cdot \supset \neg a \vee \neg b.$

次に二重否定に關する定理を述べよう。

4.6.　$\vdash \cdot \neg\neg a \wedge \neg\neg b \supset \neg\neg(a \wedge b).$

4.61.　$\vdash \cdot \neg\neg(a \wedge b) \supset \neg\neg a \wedge \neg\neg b.$

4.62.　$\vdash \cdot \neg\neg a \vee \neg\neg b \supset \neg\neg(a \vee b).$

4.63.　$\vdash \cdot \neg\neg(a \vee b) \wedge \cdot \neg a \vee \neg\neg a \cdot \supset \neg\neg a \vee \neg\neg b.$

4.7.　$\vdash \cdot a \supset \neg(b \wedge c) \cdot \supset \cdot a \wedge b \supset \neg c.$

4.71.　$\vdash \cdot a \supset b \vee \neg c \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b.$

次に第三者拒否の定理 (Satz vom ausgeschlossenen Dritten 排中律) は次の形に於てのみ成立する。

4.8.　$\vdash \cdot \neg\neg(a \vee \neg a).$

4.81.　$\vdash \neg\neg(\neg\neg a \supset a).$

4.82.　$\vdash \cdot a \vee \neg a \supset b \cdot \supset \cdot \neg\neg b.$

4.83.　$\vdash \cdot a \vee \neg a \supset \neg b \cdot \supset \neg b.$

最後に述べる以下の定理は逆の證明が不可能である。

4.9.　$\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \neg(a \wedge \neg b).$

4.91.　$\vdash \cdot a \vee b \supset \neg(\neg a \wedge \neg b).$

4.92.　$\vdash \cdot a \wedge b \supset \neg(\neg a \vee \neg b).$

以上で直觀論理に於ける重要な定理はすべて導かれたが，以下に公理だけを整頓して述べておこう。

2.1.　$\vdash \vdash a \supset a \wedge a.$

2.11.　$\vdash \vdash a \wedge b \supset b \wedge a.$

2.12.　$\vdash \vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b \wedge c.$

2.13.　$\vdash \vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot b \supset c \cdot \supset \cdot a \supset c.$

2.14.　$\vdash \vdash \cdot b \supset \cdot a \supset b.$

2.15.　$\vdash \vdash \cdot a \wedge \cdot a \supset b \cdot \supset b.$

3.1.　$\vdash \vdash a \supset a \vee b.$

3.11.　$\vdash \vdash a \vee b \supset b \vee a.$

3.12.　$\vdash\vdash\cdot a\supset c\cdot\wedge\cdot b\supset c\cdot\supset\cdot a\vee b\supset c.$

4.1.　$\vdash\vdash\cdot\neg a\supset\cdot a\supset b.$

4.11.　$\vdash\vdash\cdot a\supset b\cdot\wedge\cdot a\supset\neg b\cdot\supset\neg a.$

これらの公理の獨立性は Bernays(17) の與えた方法で證明できるがこゝでは省略する。

Ⅲ. 束論的基礎付け

ブラウワー論理は Birkhoff により今日束論に於て次の如く特徴づけられている。(19).

定義　ブラウワー論理とはOとIとを有する束で，$x\to y$ なる演算が次のように定義されている。

B1.　$(x\to y)=O \iff x\geqq y$

B2.　$x\to(y\to z)=(x\cup y)\to z$

なお $x\to I$ を x^* で表わし，$x=O$ を $\vdash x$ でしるす。前節の記號と束論の記號との對應は次の通りである。

$a\supset b$	$a\to b$
$a\wedge b$	$a\cup b$
$a\vee b$	$a\cap b$
$\neg a$	a^*
$O,(x=o)$	眞, $(\vdash x)$
I	僞

補題 1.　$x\to y$ は $t\cup x\geqq y$ を満足する最小の t である。

證明　B1 により $t\geqq(x\to y)$ は $\vdash t\to(x\to y)$ と同値である。B2によりこれは $\vdash(t\cup x)\to y$ と同値である。再び B1 によりこれは $t\cup x\geqq y$ と同値である。

補題 2.　ブラウワー論理は分配束であり，$t\cup x\geqq y$ を満足する t の交り(meet)$x\to y$ が存在し且つそれに對しては $(x\to y)\cup x\geqq y$ が成立する。

逆にこの條件が成立する束はブラウワー論理となる。

證明　前半は補題 1 により明らかであり分配束なることは次の如く證明され

る。それは

$$y \cup x \geqq (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

$$z \cup x \geqq (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

より　$(y \cap z) \cup x \geqq (x \cup y) \cap (x \cup z)$

となるので分配法則が導かれる。

逆に補題1で定義された $x \to y$ を有する束がブラウワー論理なることを證明しよう。先ず上に證明した如く分配束になる。

B1 の成立は次の如く

$$(x \to y) = o \quad \Longleftrightarrow \quad x \cup o \geqq y$$

おくことによつて得られる。

B2 の成立は次の如くである。

$$t \cup (x \cup y) \geqq z \qquad (1)$$

$$\therefore \quad (t \cup x) \cup y \geqq z \qquad (2)$$

$$\therefore \quad t \cup x \geqq (y \to z \qquad (3)$$

(1)より　$t \geqq ((x \cup y) \to z)$　　(4)

(3)より　$t \geqq (x \to (y \to z))$　　(5)

(4)(5)よりB2が成立する。この際上の各式はみな同値の關係に於て成立している。Q,E,D.

補題2を約言すれば，ブラウワー論理は補題1を満足し，逆に補題1を満足する束はブラウワー論理となる。つまり $x \to y$ の定義の仕方ははじめの定義と補題1と二つあることを述べている。なお補題1によりブラウワー論理は分配束になることを注意されたい。

さて補題1と2により容易に次の定理が得られる。

定理1.　完備束は次の分配法則

$$a \cup \wedge x_\alpha = \wedge (a \cup x_\alpha)$$

が成立するとき，そしてそのときに限りブラウワー論理に對して基 (base) となる。この場合 $x \to y$ は $t \cup x \geqq y$ を満足する最小の t なることが必要である。

この定理の系の一つとして，有限分配束はブラウワー論理に對して基となることが得られる。更に他の系として位相空間（T_0空間）の閉集合族がこの性質を有することが得られるがこれは Tarski や Tang の結果の本質を含むものである。(32)(34)(41)(42)(43)。

補題3. ブラウワー論理は直觀論理に對する Heyting の公理 (28) 及び "strict implication" に對する Lewis の公理 (30) を滿足する。

證明は困難ではない，B1 により $\vdash f \to g$ は $f \geqq g$ と同値なるを以てこれを用いればよい。以下に本節の記號で Heyting の公理を述べておくがこれは前節の末尾のものと全く同一である。

$\vdash a \to (a \cup a)$

$\vdash a \cup b \to b \cup a$

$\vdash (a \to b) \to (a \cup c \to b \cup c)$

$\vdash [(a \to b) \cup (b \to c)] \to (a \cup c)$

$\vdash b \to (a \to b)$

$\vdash [a \cup (a \to b)] \to b$

$\vdash a \to (a \cap b)$

$\vdash a \cap b \to b \cap a$

$\vdash [(a \to c) \cup (b \to c)] \to (a \cap b \to c)$

$\vdash a^* \to (a \to b)$

$\vdash [(a \to b) \cup (a \to b^*)] \to a^*$

同じことが strict implication についてもいえる。この場合に Lewis の $\Diamond p$ は $p < I$ として證明される。但し $(x^* \cup y^*)^*$ としての $x \cap y$ なる Lewisの定義だけは滿足されないがこれは彼の定義の誤りである。

次にブラウワー論理の否定に關する諸性質を導こう。

定理 2.

L 1　$(x^*)^* \leqq x$

L 2　$x \geqq y$ ならば $y^* \geqq x^*$

L3 $(x \cap y)^* = x^* \cup y^*$

L4 $(x \cup y)^* \leqq x^* \cap y^*$

L5 $((x^*)^*)^* = x^*$

この定理に於けるL1, L2, L3, L4, L5 はそれぞれ前節の4.3, 4.2, 4.44, 4.53, 4.31 及び 4.32 である。L3とL4とは双對ではない。これと同様なモデルはヒルベルト空間にありそこに於ては x^* は x の直補元 (orthocomplement) である。(40) (19, §159)

さて本定理の證明は次の如くである。

L1. 補題1により $(x \to I) \cup x \geqq I$, 故に $x \cup (x \to I) = I$. また $t \cup (x \to I) \geqq I$ を満足する t は $t \geqq ((x \to I) \to I)$ である。故に $x \geqq ((x \to I) \to I)$, 即ち $x \geqq (x^*)^*$

L2. 假定により $x \cup y^* \geqq y \cup y^* = I$ 故に補題1により $y^* \geqq (x \to I)$, 故に $y^* \geqq x^*$

L3. 補題1により $t \geqq (x \cap y)^*$ は $t \geqq ((x \cap y) \to I)$ と同値である。これはまた $t \cup (x \cap y) \geqq I$ と同値である。即ち

$(x \cap y) \cup t = I$ ………………(1)

然るに $(x \cap y) \cup t = (x \cup t) \cap (y \cup t)$ なるを以て (1) より

$(x \cup t) \cap (y \cup t) = I$

$\therefore \quad x \cup t = y \cup t = I$

$\therefore \quad t \geqq x^*, \ t \geqq y^* \quad \therefore \quad t \geqq x^* \cup y^*$

L4. これは L2 から導かれる。即ち

$x \cup y \geqq x$ より $(x \cup y)^* \leqq x^*$

$x \cup y \geqq y$ より $(x \cup y)^* \leqq y^*$

故に $(x \cup y)^* \leqq x^* \cap y^*$

L5. これは L1 と L2 とから導かれる。

即ち L1 より $((x^*)^*)^* \leqq x^*$

また L2 よりは L1 より $((x^*)^*)^* \geqq x^*$ となる。 Q, E, D.

ブラウワー論理の法則を少し強化すると古典 (Boole-Whitehead) 論理となる。即ち $(x^*)^* = x$ 又は $\vdash x \cap x^*$ を入れればよい。何んとなれば $(x^*)^* = x$ な

らば L2 により，對應 $x \to x^*$ は對合 (involution) となり，$x \cup x^* = I$ は $x^* \cap x = 0$ (第二の假定) を意味する。この二つを一しよにすると，我々の分配束は可補束となるのでブール代數となる。しかもこの際定理1により $x \to y$ は $x^* \cap y$ を意味する。以上を整頓して，

定理 3. ブラウワー論理に於て $(x^*)^* = x$ 又は $x \cap x^* = 0$ が成立すれば古典論理となる。このとき $x \to y = x^* \cap y$ である。

ブラウワー論理はその中に古典論理を含んでおり，二重否定になつている命題は古典命題計算を形成している。(26)(27)(20, 148頁)

古典論理とブラウワー論理との著しい相違は，前者に於ては $\cup$ と $\to$ は $\cap$ と $'$ の函數として表わされ，$(x \cup y) = (x' \cap y')'$ 及び $x \to y = x' \cap y$ となるが，後者に於てはこれは不可能である。$\cup$ や $\to$ が他のもので表わされない實例を Hasse の圖式で作ることが出來るがこゝには省略する。

以上は Birkhoff の舊版 (19) によつて述べたものであるが，改版(20) によつて若干補足しておこう。

定義 ブラウワー論理とは相對擬補束 (relatively pseudocomplemented laltice.) である。

こゝにいう相對擬補束とは，束の二元 a, b に對して擬補元 $a*b$ が存在するものをいう。元 a の元 b に對する擬補元 $a*b$ とは，$x \leqq c$ なるときそしてこのときに限り $a \cap x \leqq b$ なる如き元 c のことをいう。また $a*0$ を a の擬補元といゝ a^* で表わす。(37)。

定理 4. 完備束は $x \cap \vee y_\beta = \vee (x \cap y_\beta)$ を滿足するときそしてこのときに限り相對擬補束である。(20, 147頁)。

さて相對擬補束に於て $a*b$ を $a \to b$ で表わし，$x = 0$ (即ち tautologies) を $\vdash x$ で表わす。$x \to y$ は $x \cup t = y$ を滿足する最小の元 t なるを以て $\vdash x \to y$ は $x \geqq y$ なるときそしてこのときに限り成立する。依て本節のはじめの議論にかえる。

なお束順序半群から導かれた次の興味深い定理がある。

定理 5. ブラウワー論理は束交りの下に剩余づけられる束で O, I を有するも

のの双對として定義される。(20,204頁)。

これはイデヤル論とトポロジー，數学的論理学との間の注目すべき關係を與えるものである。(21)。

Ⅳ. 古典論理と直觀論理

論理学を束の記號で表わすために次の用法に従う。(11).(12).

$a \cap b$	連言	a且つb
$a \cup b$	選言	a又はb
a'	否定	aならず
$a=b$	等値	
I	眞	
O	僞	

1. $a \cup a' = I$ 　排中律
2. $a \cap a' = O$ 　矛盾律
3. $(a')' = a$ 　二重否定律
4. $(a \cup b)' = a' \cap b'$
5. $(a \cap b)' = a' \cup b'$ 　(4, 5) De Morgan 律

束に於て I,O が存在し，任意の元 a に對して 1,2を滿足させる a′ が存在するときこの束を可補束といゝ a′ を a の補元という。可補束に於て更に 3,4,5が成立するときこれを直可補束という。

さて以上の用法によれば，古典論理は直可補分配束(直ブール束)であり，直觀論理は 2 と 4 のみが成立する分配束である。直觀論理に於て 1 を採用しないことは勿論，3,5の成立しないことは前節に述べた通りである。

なお古典論理と直觀論理との間に存在するものとして黑田論理(6)があるが，これは 2 と 4 の外に次の式が成立するものである。

$$(a \cap b)' = (a' \cup b')''$$

また2,4の外に 5が成立するものを De Morgan 論理という。

なお分配束にならない著名な論理として量子論理があるが，これは模束で

1,2,3,4,5 を滿足するものである。即ち直可補模束である。(18)。

以上は束の記號で表わせる論理であるが，すべての論理が束で表わせるとは限らない。

さて古典論理を二つの運算 ⊃，∼ を以て述べてみよう。(39)

定義されない術語として類C，類T，二項演算⊃，單項演算∼を基礎におく。

證明されない命題（公理）として次のものをおく。

A 1. pがTにあるならば，pはCにある。

A 2. pとqがCにあるならば，$p \supset q$は一意に定められたCの元である。

A 3. pがCにあるならば，$\sim p$は一意に定められたCの元である。

A 4. p, q, rがCにあるならば

$$[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$$ はTにある。

A 5. p, qがCにあるならば，$p \supset (q \supset p)$はTにある。

A 6. p, qがCにあるならば，

$$[(\sim p) \supset (\sim q)] \supset [q \supset p]$$ がTにある。

A 7. pと$p \supset q$がTにあるならば，qはTにある。

以上の公理を滿足する四重系 (C, T, ⊃, ∼) をブール命題論理（古典論理）という。

具體的な例としてはCは命題の類であり，Tは眞なる命題の類である。$p \supset q$は，「p ならば q なり」という命題であり，$\sim p$は「pなることは僞である」という命題である。

簡單のために，「pがTにある」ことを「⊦p」で表わし「p なることは眞である」という。

また式に於て括弧の代りに點を用いることがある。

例えば A4を次の如くかく。

$$p \supset . q \supset r . \supset . p \supset q \supset . p \supset r$$

文字の右下についている點はそこまでで終つていることを示し，左について

いる點は以下を括弧に括ることを意味する。但し⊃は點よりも優位にあるものとする。また次のように書くこともある。

$p\supset.q\supset r:\supset:p\supset q\supset.p\supset r$

$p.\supset.q\supset r:\supset:p\supset q.\supset.p\supset r$

A5とA6は次の如くかく。

$p\supset.q\supset p$

$\sim p\supset\sim q.\supset.q\supset p$

次に古典論理に於ては ∪, ∩, = を次の如く定義する。

$p\cup q$,	$\sim p\supset q$
$p\cap q$,	$\sim.p\supset\sim q$
$p=q$;	$p\supset q.\cap.q\supset p$
pEq,	$\vdash p=q$

これより周知の種々の定理が導かれるのである（39,33頁以下）。

直觀論理に於ては，定義されない術語として，類C，部分類T，三つの二項演算∩，∪，⊃と單項演算～を基礎におく。また「pがTにある」ことを「$\vdash p$」で表わす。

證明されない命題（公理）として次のものをおく。

I1. pとqがCにあるならば，$p\cap q$，$p\cup q$，$p\supset q$，$\sim p$は一意に定められたCの元である。

I2. $\vdash p$にして$\vdash p\supset q$ならば$\vdash q$である。

I3. pとqがCにあるならば，$\vdash p\supset.q\supset p$

I4. p，q，rがCにあるならば，

$\vdash p\supset.q\supset r.\supset.p\supset q\supset.p\supset r$

I5. pとqがCにあるならば

$\vdash p\supset.q\supset p\cap q$

I6. pとqがCにあるならば，$\vdash p\cap q\supset p$

I7. pとqがCにあるならば，$\vdash p\cap q\supset q$

I8. pとqがCにあるならば，$\vdash p\supset p\cup q$

I 9. pとqがCにあるならば，$\vdash q \supset p \cup q$

I 10. p，q，rがCにあるならば，

$\vdash p \supset r \supset . q \supset r \supset . p \cup q \supset r$

I 11. p，q，がCにあるならば

$\vdash p \supset q \supset . p \supset \sim q \supset \sim p$

I 12. p，qがCにあるならば，

$\vdash \sim p \supset . p \supset q$

これらのうち古典論理に於ては定理となるものもあるが，直觀論理は以上を公理として出發しなければならない。これより得られる定理として例えば

$\vdash p \supset \sim\sim p$

$\vdash \sim\sim\sim p \supset \sim p$

$\vdash \sim\sim . p \cup \sim p$

などがあるが成立しないものとして次のものがある。

$\vdash \sim p \supset \sim q . \supset . q \supset p$

$\vdash p \cup \sim p$

$\vdash \sim\sim p \supset p$

Gödel は古典論理と直觀論理との間の重要な關係を證明した。Gentzen は直觀論理の公式が上の12の公理から導かれたものであるかどうかを決定する方法を見出した。

演算$\cap$，$\cup$，$\supset$，$\sim$ は互に獨立であり，一つを他のもので定義することは出來ない。

また「$\sim p$」は樣相論理（modal logic）でいう「pは不可能である」と共通な性質をもつているので，直觀論理は樣相論理として考えることが出來る。然しこゝでは樣相論理に就ては述べないこととする。(2)(3)(15)(30)(33)(35)。

V. 直觀論理と三値論理

直觀論理は排中律を拒否するので，眞僞の外に第三者が豫想される。それ故直觀論理は二値以上の論理と考えられる。こゝでは三値論理のなかで De

Morgan 論理になるものがあることを示そう。先ず二値論理（古典論理）に於ける眞理函數圖式を掲げてみよう。

(I)

′	
0	1
1	0

(II)

∩	0	1
0	0	0
1	0	1

(III)

∪	0	1
0	0	1
1	1	1

(IV)

⊂	0	1
0	1	1
1	0	0

(V)

=	0	1
0	1	0
1	0	1

こゝに，(I) は否定 (II)は連言 (III) は選言 (IV) は含意 (V) は等値を表わす。（前節の記號の～及び⊂は本節では′及び⊂になつている。）

さて三値を 0,t,1 とし次の三値論理を考える。(11)(37)。

(I)

′	
0	1
t	0
1	0

(II)

∩	0	t	1
0	0	0	0
t	0	t	t
1	0	t	1

(III)

∪	0	t	1
0	0	t	1
t	t	t	1
1	1	1	1

(IV)

⊂	0	t	1
0	1	1	1
t	0	1	1
1	0	t	1

(V)

=	0	t	1
0	1	0	0
t	0	1	t
1	0	t	1

この三値論理は t のないときには古典論理に歸着する。いま如何なる等式を滿足するかを調べてみると

L1　$a \cap b = b \cap a$

　　$a \cup b = b \cup a$

L2　$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

　　$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$

L3　$a \cap (a \cup b) = a$

$$a \cup (a \cap b) = a$$

L4 $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

が成立するのでこの三値論理は分配束になる。然し

1. $a \cup a' = I$
2. $a \cap a' = O$
3. $(a')' = a$
4. $(a \cup b)' = a' \cap b'$
5. $(a \cap b)' = a' \cup b'$

のうち1と3は成立せず 2, 4, 5 は成立する。從て De Morgan 論理となる。

さてこの三値論理と同値な體系を J, Lukasiewicz (31)(37) が導いたが，それを次に述べよう。

H_1， $P \subset (Q \subset P)$

H_2， $(P \subset (P \subset Q)) \subset (P \subset Q)$

H_3， $(P \subset Q) \subset ((Q \subset R) \subset (P \subset R))$

H_4， $(P \cap Q) \subset P$

H_5， $(P \cap Q) \subset Q$

H_6， $(P \subset Q) \subset ((P \subset R) \subset (P \subset (Q \cap R)))$

H_7， $P \subset (P \cup Q)$

H_8， $P \subset (Q \cup P)$

H_9， $(P \subset R) \subset ((Q \subset R) \subset ((P \cup Q) \subset R))$

H_{10}， $(P \subset Q') \subset (Q \subset P')$

H_{11}， $P' \subset (P \subset Q)$

H_{12}， $(P' \subset Q) \subset (((Q \subset P) \subset Q) \subset Q)$

これを Lukasiewicz 論理とよぼう。

このうち H_{12} を省いたものが直觀論理である。これは元來 Scholtz が Heyting の公理から導いたものであるが，Scholtz は11個の公理の他に

$$((p \subset p') \subset q) \subset ((p \subset q) \subset q)$$

を附加したとき古典論理になるといつている。

なお上の三値論値と同値でブール束にならない束が得られている。(37)

一般に三値論理は直観論理にはならないのであるが，上の例の他にも直観論理にならない三値論理のあることを示そう。判定として Heyting の公理を満足していないことを示す。(28)。

例 1.

(I)

′	
0	t
t	1
1	t

(II)

∩	0	t	1
0	t	t	t
t	t	t	t
1	t	t	1

(III)

∪	0	t	1
0	0	0	1
t	0	t	1
1	1	1	1

(IV)

⊂	0	t	1
0	0	0	1
t	1	1	1
1	0	0	1

この例に於ては2.1の$a \subset a \cap a$が成立しない。何んとなれば

$$0 \subset 0 \cap 0 = 0 \subset t = 0$$

例 2,

(I)

′	
0	t
t	0
1	t

(II)

∩	0	t	1
0	0	t	0
t	t	t	t
1	0	t	0

(III)

∪	0	t	1
0	0	0	0
t	0	t	0
1	0	0	0

(IV)

⊂	0	t	1
0	0	t	t
t	0	0	0
1	0	t	t

この例に於ては 2.14 の $b \subset . a \subset b$ が成立しない。何んとなれば

$$1 \subset . 0 \subset 1 = 1 \subset t = t$$

例 3.

(I)

$'$	
0	1
t	1
1	t

(II)

$\cap$	0	t	1
0	t	t	t
t	t	t	t
1	t	t	1

(III)

$\cup$	0	t	0
0	0	0	0
t	0	t	1
1	1	1	1

(IV)

$\subset$	0	t	1
0	1	1	1
t	1	1	1
1	0	t	1

この例に於ては3.11の $a\cup b\subset b\cup a$ が成立しない。何んとなれば

$$1\cup 0\subset 0\cup 1=1\subset 0=0$$

例 4.

(I)

$'$	
0	t
t	1
1	t

(II)

$\cap$	0	t	1
0	0	t	0
t	t	t	t
1	0	t	1

(III)

$\cup$	0	t	1
0	0	0	1
t	0	t	1
1	1	1	1

(IV)

$\subset$	0	t	1
0	1	t	1
t	1	1	1
1	0	t	1

この例に於ては $(a')'\subset a$ が成立しない。何んとなれば

$$(0')'\subset 0=t'\subset 0=1\subset 0=0$$

以上で例を打切るが，各節に於て用いられた記號がまちまちであるから以下にその對照表を掲げておこう。

II	$\neg a$	$a\wedge b$	$a\vee b$	$a\supset b$	0	I
III	a^*	$a\cup b$	$a\cap b$	$a\rightarrow b$	$\vdash x$	
IV	a' $\sim a$	$a\cap b$	$a\cup b$	$a\supset b$	I	0

V	a′	a ∩ b	a ∪ b	a ⊂ b	I	0
	否定	連 言	選 言	合 意	眞	僞
	ならず	且 つ	又 は	ならば		

VI. Weyl の 所 見

Weyl が直觀數学 (Intuitive Mathematik) と題して述べている所見をその著書 (45, 第1部9節) から飜刻してみよう。以下その全文である。

明らかにこの立場は最初 L. E. J. Brouwer によつて (1907年以來) 知られておつた。即ち彼は數学の建設を企圖したが，それは§6 (自然數の構成についての)終りに述べたような，彼岸の中への跳躍を實行するものではなかつた。存在定理——例えば「偶數は存在する」——は一般にその事實を主張するという本來の意味での命題ではない。(1は偶數であるか又は2は偶數であるか又は3は偶數であるか又は……ad infinitum) という定理の如き「無限論理和」は明らかに實行不可能である。「2は偶數である」というのは現實の命題であつて (27頁に於て性質「偶數」が循環的に定義される限りに於て),「偶數は存在する」というのは單にこの命題から導かれた命題的抽象 (Urteilsabstrakt) である。私が洞察 (Erkenntnis, insight) を價値ある實物で表わすならば，命題的抽象は實物の現存を示すがその場所を洩らしてくれない紙片である。その唯一の價値は實物を見出すように私を促がしてくれることに存し得るのである。「2は偶數である」というような背後に立つている命題によつて確實化されない限り，この紙片は無價値である。議論が構成の可能性 (Möglichkeit) にすぎない處に内容豊かな命題は存在せず，かえつて到達する構成法 (gelungene Konstruktion) や實施する證明 (geführte Beweis) を顧慮することによつてのみ存在の主張が意義を得るのである。數学の多くの存在定理に於て往々かゝる定理は價値がない，これに反して價値あるものは證明に於て構成法が實施されており，これなしでは定理は空虚な影である。

§3（論理的推理）に於て提出された問題，存在定理から如何にして何にかを結論することが出來るか，に就てはこゝに，方法なし即ち何にも言えないし又それからは何にも推論できないと，答える。「命題的抽象」からは孤立している意義ある全體性を存在定理の立場におきかえねばならないのである。然しながら一方に於て我々はいかにして自然數に關する一般の定理に到達するであろうか。これは最も簡單な例で明らかにつくられる。數論的函數 $\varphi(n)$ を完全歸納法によつて次の如く定義する。

α) $\varphi(1)=1$;　　β) $\varphi(n')=(\varphi(n))'$

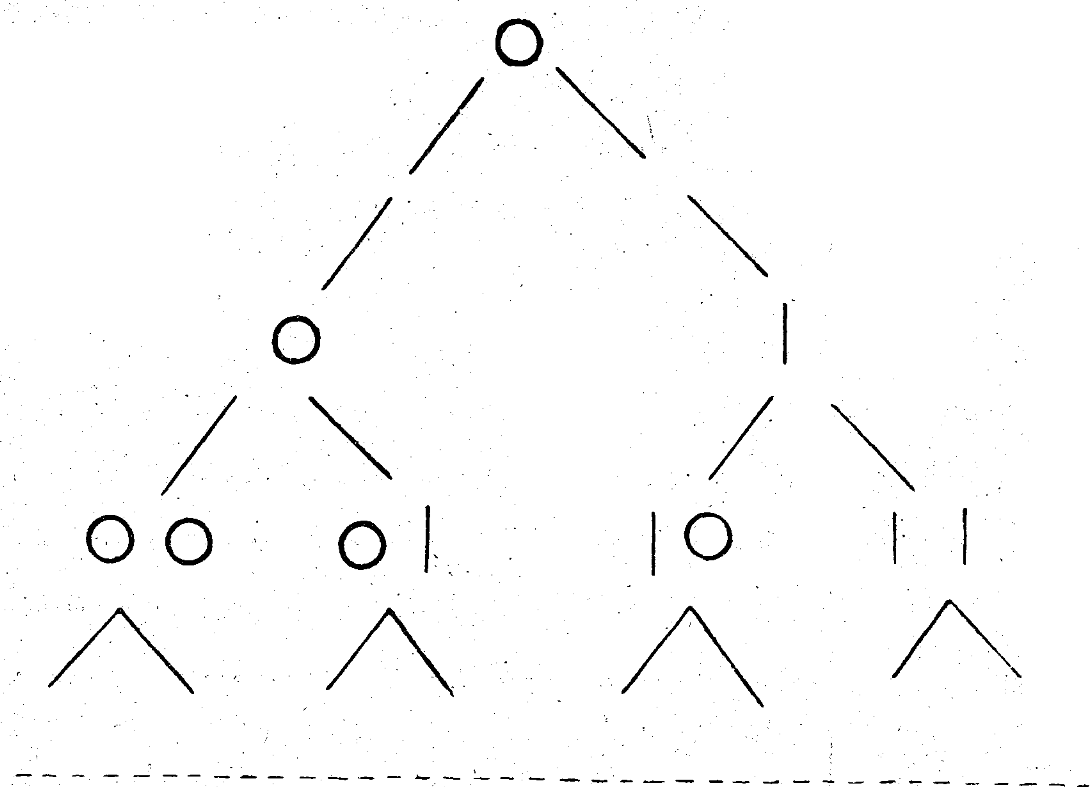
β) は一般に成立する命題であつて，いま α) と一しよにすることによつてそれからは完全歸納法によつて例えば一般に $\varphi(n)=n$ と推論することが出來る。それ故定義自身は一般性の根元であり，一般性から完全歸納法によつてさらに歩むのである。式に用いられずむしろ各段階に於て具體的に應用される完全歸納法（定義及び推理の道具としての）は，數学の，數学的直觀の本來にして唯一の力である。これより Brouwer は H. Poincaré (Science et hypothèse) と一致した。數に關する一般命題の否定は存在定理であつてこれは無價値なので，一般命題は否定可能ではない。また一般命題は本來打建てられた事實を指示するものではなく，それは無限に多くの個々の命題の論理積と考えられずに，反つて假設的に即ち一つの與えられた定まつた數に適用するならば一定の命題が生ずるというように考えられる。tertium non datur（排中律，すべての數が性質 A を有するか又は性質 A を有する數は存在しない）はこゝでは余地がない。そこへ到達した信念は Brouwer (J. der D. M. V. 28, 1920. 204) によれば，「第一に一定の（即ちその要素が示されて與えられている）有限集合の部分集合に關する數学から古典論理が抽象した事實，次いでこの論理が數学とは獨立な存在を先驗的に歸屬せしめたこと，そして最後にこの想像上の先驗性を不正當に無限集合の數学に適用したこと，から歴史的にひき起された」という。

Brouwer の解析に於ては，連續體 (Kontinuum) に於ける個體的場所即

ち實數は集合（Menge）によつて定義されずに，自然數の數列（Folge）によつて即ち各自然數 n は同等な φ(n)に對應するという法則によつて，定義される（この兩方の定義は，自然數がもはや擴大的に定義された集團として取扱れることが許されないとき，同等でなくなる。）しかるときすべての自然數ではなく，むしろすべての實數，實變數のすべての値に關する表述は如何にして成立するであろうか。Brouwer は多くの場合に於て，この形式の在來の解析の命題は正しく說明されることによつて單に自然數の全體に關係があることを示した。然らざる場合には數列の概念は意味が變る，即ちそれは最早つねに法則によつて決定されるものではなく，むしろ自由な選擇行爲によつて一步一步（Schritt zu Schritt durch freie Wahlakteentsteht）作られて，生成された（werdene）ものと考え得る數列である。生成された選擇數列は連續體又は變數（Variable）を表わす，しかるに法則によつて無限に決定された數列は連續體に落入る個體的實數を表わす。こゝでは最早連續體は，Leibniz の語を借れば，固定した要素の集團としてではなくむしろ自由な生成の媒介（Medium freien Werdens）として現われる。生成された選擇數列に就ては性質は自然に次の如く意義深く確言され得るのである，即ち數列が或場所にまで到達するとき性質に對する決定が然りか否か（性質が數列に歸屬しているか否か）が定まつており，生成のこの點を越えての數列の擴張に對して，はそれが行われ得るとしても，この決定は否認され得るのである。

連續體の本質は要素と集合との關係ではなく，むしろ部分（Teil）と全體（Ganze）との關係にあると Brouwer は直觀の立場からそうみている。それは「延長した全體（extensive Ganze）」の概念の下に理解されるもので，それを Husserl は「若し一つの全體が，部分はその本性の上から最低位の種——それは恰度不可分の全體によつて規定されているような種であるが——から成つているというが如き分解を許容する場合には，（全體を延長した全體といゝその部分を延長した部分という）（川村敎授譯）」によつて特徵づけた。一次元連續體の分割模型は有限線分によつて一番明らかにされる。それを二つの部分

に半分に分けて，左を (0) 右を (1) どし，またそれらを再び二つに半分に分



け左右に（名稱を圖の如くつけて）おく。云々。この手續きは純粹に組合せ的に描かれるそして遂に境界ある一次元連續體の算術的空虛な形が與えられる。これは空間の線分のような具體的に示される連續體とはその實現が區別される。それは算術的模型に對應した連續分割によつて行われるが，その際たゞ部分の精細は結局可能な精密の發端の下に落ちなければならない限りに於て，兩方の部分がつねに等しい長さであるか又は一般にかゝる量概念が連續體の內部に於て設定されておるかはその時の事情次第による。具體的にはつねに與えられた段階までのみ遂行するというこの手續きによつて連續體に座標系が決定され，それは二重分數によつて個體的部分を概念的算術的に指示することが出來る。具い體的な連續體に於ては精密な限界は設定されていないので，分割の足場はままで一歩たりとも正しく固定されておらず反つて以前の部分點は前進した分割によつて銳く確認されているものと思わなければならぬ。——ν番目の分割段階の二つの隣接した部分は「ν番目の段階の部分區間」に連結される。ν番目の段階の部分區間は次のように食違つて重なる，即ち或る凡そではあるが十分

近似な與えられた數に對しては確實にν段階の部分區間が與えられそれにその數が落ちるのである。それ故數列の先立つものの內部に入るような，增大する段階の部分區間の無限數列（eine unendlich Folge von Teilintervallen wachsender Stufe, deren jedes innerhalb des vorhergehenden der Folge liegt）として，個體的實數が定義されるのである。

數列αの第n番目の區間と數列βの第n番目の區間とがnの各値に對して（für jeden Wert von n）全部又は一部が重なるとき，二つの實數α, βは一致する。順序數nが存在してそれに對して兩方の區間が分たれているとき二つの實數は異なる。この種の定理には tertium non datur（排中律）を應用することが出來ないので，Brouwer によれば完全に打建てられた二者選一は絕對に存在しない。これが直觀連續體の性格に非常によく適合している，何んとなればそこでは二つの場所の分離性は互に接近することによつていわば順次に漠然とした段階で接近することにより區別不可能に移されていく。連續體に於ては Brouwer によれば連續（stetige）函數のみが存在する。連續體は部分から成立されておらない（Das Kontinuum lässt sich nichts aus Teilen zusammensetzen）。それ故私は實數の連續體の內部から正數の部分連續體を，區間と區間數列の寫像に正の二重分數を用いることによつて，取出すことが出來る。しかしながら各數が三つの連續體の一つに屬さなければならぬという意味に於て，全連續體が正，負，及び0と一致する數の連續體から構成されているというのは正しくない。こゝに古い眞理は精密な仕上げをされるのである。即ち Aristoteles（περὶ ἀτόμων γραμμῶν 分割されずに描かれた線について）が「動くものは數えられないで動く」又は（フィジック，VIII第8章）「連續する直線を二つの半分に分けたとき，一つの點は二つに考えられ始點とも終點ともとれる。しかしこのように分割したとき直線と運動とは最早連續ではない……連續に於てはその上限りなく多くの半分がある。しかしそれは具體的ではなく可能的である。」と言表したものにである。これに關しては Leibniz の往復書簡の中の連續體に關する前に引用した箇所と比較してみるがよい！原理はそ

の本質即ち「既に分離されてないものは分離させられない」(Gassendi) に再び立戻るのである。

数学は Brouwer とともに最高の直観明晰を獲得した。彼は今迄以上に密接に直観と接觸することによつて，解析学の發端を自然な方法で展開せしめた。しかしより高い一般理論へと前進したとき，古典論理の簡單な基本定理の適用不可能は殆んど耐え難い重苦しい結果を生ぜしめた。そして數学者は固い切石で接ぎ合わされたと信ずる高樓の建築の大部分が霧の中に消え失せるのを苦痛を以て見るのである。

Weyl は以上の如く述べて文献 (16)(22)(23)(24)(44) を附加している。

(1953. 5. 21)

引用文献

(1) 石本新，近代論理學の展望，思想 (1953年5月號)

(2) 伊藤誠，科學論理學の展望，基礎科學第10號 (1949年5月)

(3) 伊藤誠，様相論理學の研究，基礎科學第14號 (1949年12月)

(4) 黒田成勝，數學の直觀性とその無矛盾性に就て，基礎科學第2號 (1947年12月)

(5) 黒田成勝，Aristotle の論理と Brouwer の論理について，科學 (1948年1月號)

(6) 黒田成勝，解析の基礎に關する一考察，基礎科學第11號 (1949年7月)

(7) ハインリッヒ・レーヴィ，數學の危機とその哲學的意義 (1926)，(吉田洋一，白林帖，1943年，215頁)

(8) 下村寅太郎，無限論の形成と構造 (1944)

(9) 白石早出雄，數と連續の哲學，共立社

(10) 白石早出雄，科學的認識の基礎，共立社

(11) 杉原丈夫，多値論理學，哲學研究 392 號 (1949—50) 48頁

(12) 杉原丈夫，Brouwer 論理學の多値論理學的特性，科學21卷6號 (1951) 294頁

(13) 渡邊慧，栗鼠と猫，自然第24號 (1948年4月)

(14) 横光利一，旅愁第5篇 (昭和文學全集角川書店版) 354頁

(15) O. Becker, Zur Logik der Modalitäten, Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung. Bd. XI (1930)

(16) O. Becker, Beiträge zur phänomenonlogischen Begründung der Geometrie

und ihrer physikalischen Anwendungen, Husserls Jahrbuch für Philosophie, 6, 398—436, 459—477.

(17) P. Bernays, Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der "Principia mathematica," Math. Zeitschr. 25 (1926) S. 316.

(18) G. Birkhoff and J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, Ann. of Math. 37 (1936) No. 4.

(19) G. Birkhoff, Lattice theory, 1st ed. (1940) p. 128.

(20) G. Birkhoff, Lattice theory, 2nd ed. (1948) p. 195.

(21) G. Birkhoff, Lattice-ordered groups, Ann. of Math. 43 (1942) p. 298—331. Th. 46.

(22) L. E. J. Brouwer Over de grondslagen der wiskunde, Dissertation 1907.

(23) L. E. J. Brouwer, Intuitionisme en Formalisme, Groningen, 1912, English translation in Bull. Amer. Math. Soe. 20 (1913—14).

(24) L. E. J. Brouwer, Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik, Math. Ann. 93, 95, 96 (1924—27).

(25) L. E. J. Brouwer, J.der. D. M. V. 33 (1925) S. 253.

(26) Glivenko, Sur quelques points de la logique de Brouwer, Acad. r. de Belgique, Bull. de la Classes des Sciences, S. 5, t. 15, (1929) p. 183—188.

(27) K. Gödel, Ergibnisse eines Kolloquium, Vienna, 4 (1933) 35—40.

(28) A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionstischen Logik, Berlin Sitzungsberichte (1930) S. 42—56.

(29) S. Kuroda, Intuitionistische Untersuchungen der Formalistischen Logik, Nagoya Math. Journ. 2 (1951) 35—47.

(30) C. I. Lewis and C. H. Langford, Symbolic Logic, New York, 1932. p. 493.

(31) J. Lukasiewicz, Die Logik und das Grundlagenproblem, Les Entretiens de Zürich (1941)

(32) J. C. C. McKinsey and A. Tarski, The algebra of topoloyy, Ann. of Math. 45 (1944)

(33) J. C. C. McKinsey, On the syntactical construction of systems of modal logic, J. of S. L. 10 (1945)

(34) J. C. C. Mc Kinsey and A. Tarski, On closed elements in closure algebra, Ann. of Math. 47 (1946).

(35) J. C. C. McKinsey and A. Tarski, Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting, J. of S. L. 13 (1948).

(36) K. Matsumoto, Sur la structure concernant la logique modernee. J. of Osaka Jnst. of Sci. and Tech. 2 (1950) 67—78.

(37) K. Matsumoto, On a lattice relating to the intuitionistic logic, J. of Osaka Inst. of Sci. and Tech. 2 (1950) 97—107.

(38) Peano, Formulaire de mathématiques. tome I (1895)

(39) P. Rosenbloom, The elements of mathematical logic. (1950).

(40) M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, New York, 1932.

(41) M. H. Stone, Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics, Cas. Mat. Fys. 67 (1937) 1—25.

(42) Tsao-Chen Tang, Algebraic postulates and a geometric interpretation for the Lewis calculus of strict implication, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938) p. 737.

(43) A. Tarski, Der Aussagenkalkul und die Topologie, Fund. Math. 31 (1938) 103—134.

(44) H. Weyl, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, Math. Zeitschr. 10 (1921)

(45) H. Weyl, Philosophie der mathematik und Naturwissenschaft.. (1927).

(46) H, Weyl, Philophy of mathematics and natural science. (1949)