

MATHEMATICA の経済学への応用 (2)

——ギッフェン財をもたらず効用関数の特徴について——

小樽商科大学商学部経済学科 鷗 沢 秀

0. はじめに

ギッフェン財 (Giffen good)¹⁾とはある財に対する需要曲線が右上がりの部分を持つ財のことである。すなわち、価格が上昇したとき、その財への需要量が増加する財である。大部分の財は「需要法則」を満たす。すなわち、価格が上昇すればその財への需要量は減少する。

ギッフェン財をめぐる議論については、Marshall [1895] によるパン (bread) の例で始まった。その所得の大部分を主食であるパンに費やしていたイギリスの貧しい労働者がパンの価格上昇に直面したとき、パンの需要量を増やした。Marshall [1895] が「需要法則」に反する事例として説明し、この逆説的な主張をギッフェンが始めて指摘したと紹介した²⁾。それ以来、ギッフェン財の可

1) McDonough and Eisenhauer [1995] によれば、ギッフェン財の伝説 (legend) は一つには Marshall の『経済学原理』(Principles of Economics) 第3版 [1895] に述べられている、イギリスの貧しい労働家族にとってのパンがギッフェン財の場合であり、もう一つは Samuelson の『経済学』(Economics) 第5版 (1961) に述べられている、1845年のアイルランド飢饉におけるジャガイモがギッフェン財の場合である。ただし、Samuelson and Nordhaus の場合は『経済学』(Economics) 第13版 (1989) までにはアイルランドのジャガイモの例が「所得効果」の脚注に述べられている。しかしながら第15版 (1995) 以降の版では、ジャガイモ大飢饉の例はなぜか本文はもちろん脚注からも消滅している (第14版については未確認である)。この点及び経済学説史的な話題については、Stigler [1947, 1948], Masuda and Newman [1981], 及び McDonough [2003] を参照せよ。なお、Mason [1989] には Giffen の人物像、業績及び Giffen Paradox について出版時点における、網羅的な検討がなされている。

2) ギッフェン・パラドックスを始めて指摘したのはギッフェンではなく、ペーキ

能性,あるいはギッフェン・パラドックスは需要法則にとっての例外となった。

Hicks [1946,1956] や Stigler [1947] が主張するように,ギッフェン財は可能性としてはありうるが,実際に観測されたことはないと思われてきた。

最近,実証分析 (Jensen and Miller [2002], Bopp [1983]) や実験経済学の研究 (Battalio, Kagel and Kogut [1991]) により,ギッフェン財の存在を示唆する結果が示されてきている。また,ネットワーク外部性 (Shy [1995,2001]) や消費外部性 (Yeung [2002]) を考慮すると,それぞれ右上がりの需要曲線が得られる研究が公表されている。

他方,入門ミクロ経済学及び中級ミクロ経済学の標準的な教科書あるいは授業においては代替効果と所得効果を図形的に説明して,ギッフェン財の可能性を指摘している³⁾。しかしながら,需要関数の性質を検討する際に通常用いられる,効用関数から需要関数を導出する手法がギッフェン財の議論のときには,ほとんど取られていない (Wold and Juréen [1953] の例を用いている Katzner [1970,1988] の例と著者 [1986,1992] の例がある)。

これまでのギッフェン財をめぐる議論から,個人の需要曲線が右上がりの部分を持つ場合 (ギッフェン財) と市場で観測された価格と数量のデータが右上がりの関係を持っている場合を明確に区別する必要がある (例えば, Dougan [1982] を参照せよ)。ギッフェン財あるいはギッフェン行動⁴⁾ (Giffen behavior) の定義についても, (1) いわゆる Slutsky-Hicks 流の固定所得のもとで考察する

(Beeke) であるとされている (Rashid [1979], Mason [1989, pp.95-96] を参照せよ)。なお,ギッフェン・パラドックスに関する経済学説史的な文脈でのグレイ (Gray) とギッフェンをめぐる話題については Masuda and Newman [1981] 及び Mason [1989] を参照せよ。

- 3) 2本の無差別曲線図を用いた解説で,学生にとってわかりやすいものではないことが指摘されている (Sørensen [2004,2006], Spiegel [1994] を参照せよ)。中級ミクロ経済学では消費者の最適行動 (予算制約のもとでの効用最大化) からスルーツキー方程式を導出して,ギッフェン財の可能性を説明する場合もある。武隈 [1989, pp.47-48], 西村 [1990, p.69] などのミクロ経済学のテキストを参照せよ。
- 4) ある財に関し,その財の価格が低いときの需要量と比べ,価格が高いときに需要量を増加させる消費者の行動をギッフェン行動という。

か、(2)所得の変動を考慮する一般均衡の中で定義するのか(Nachbar [1998]),あるいは(3)初期保有量を考慮した場合に拡張する(Berg [1987])などに分かれている。この小論では(1)の定義による。

この小論の構成は以下のようになっている。第1節では、ギッフェン財をもたらずアプローチについて若干の紹介を試みる。第2節では、ギッフェン財の存在の可能性を効用関数から示そうとするアプローチについて考察する。特に、効用関数を提示しているいくつかの例についてその特徴をMATHEMATICAの計算能力及び描画能力を用いて解明する。第3節で若干の結語を述べる。なお、付録にはSørensen [2006]の命題についての修正とその証明を掲載した。

1. ギッフェン財をもたらずアプローチについて

ギッフェン財あるいはギッフェン行動を説明しようとする試みには多数のアプローチがある⁵⁾。以下、それらの研究結果を簡単に要約しよう。

- (1) Hicks 流の Giffen 財の存在の可能性を効用関数から示そうとするアプローチには、Wold and Juréen [1953] を嚆矢とし、Vandermeulen [1972], Silberberg and Walker [1984], Spiegel [1994], Butler and Moffatt [2000], Jensen and Miller [2002], 及び Sørensen [2004, 2006] などがある。Mof-

5) この小論では、ギッフェン財の存在を論証あるいは実証する立場の論文を主に取り上げた。ギッフェン財の存在あるいはギッフェン・パラドックスをありえないとする立場の議論として Hicks [1946, 1956], Stigler [1947, 1948] の他に価格変動に対する保険を考慮した Barzel and Suen [1992], Weber [2001] などがある。また、Dwyer and Lindsay [1984] はアイルランドで1845-49年に発生した飢饉についての歴史統計を利用し、需要・供給分析に従えばジャガイモがギッフェン財であることを否定した。同様に1840年代のアイルランドのジャガイモはギッフェン財でないことを Rosen [1999] は当時の価格及び数量データを用いて論証している。この点についても Mason [1989] を参照せよ。なお、生産ショックを考慮した競争的一般均衡分析ではギッフェン財が出現する事はほとんどないことを示したのが Nachbar [1998] である。

fatt [2002] の巧妙な例をここで指摘しておく。価格オプファー曲線⁶⁾が右下がりの部分を持てば、その範囲で当該財はギッフェン財になる。この性質を利用し、限りなくその曲線に近似する関数をもたらず効用関数を構成的に求める方法を Moffatt [2002] は実行している。

- (2) Lancaster [1966] により創始された消費特性アプローチ (characteristic approach) を用い、消費量が含まれている必要栄養摂取量 (nutrition) を明示的に提示し、ギッフェン財をもたらず状況を解明しようとした研究として Lipsey and Rosenbluth [1971] 及び Jensen and Miller [2002] をあげることができる。また、予算制約のほかには他の制約 (たとえば、必要栄養摂取量制約、生存最低水準 (subsistence) 制約、あるいは局所飽和 (local satiation) 制約など) をアド・ホック (ad hoc) に設定し、ギッフェン行動を示そうとするアプローチには、Dooley [1988], Gilley and Gordon [1991], Davies [1994], Jensen and Miller [2002], 及び Weber [1997] 等がある。
- (3) 財の同時消費を避ける傾向 (mixture aversion) と飽和 (satiation) を考慮したアプローチを採用している Butler and Moffatt [2000] がある。所得制約のもとで効用を最大にする、最適消費量の組は一般に端点解となる。
- (4) 実験的アプローチとして Battalio, Kagel and Kogut [1991] をあげることができる。かれらは、ラットを用いてキニーネ水がギッフェン財になることを実証している。また、Plot and Smith [1999] は実験的手法を用い、消費外部性の下で右上がりの需要曲線を導出し、市場均衡の安定性について検討した。

6) 初期保有量を考慮しない場合は価格消費曲線に相当することに注意せよ。

- (5) 実証研究によりギッフェン行動の存在可否を検証するアプローチを採用している研究者がいる。Bopp [1983] は実証分析により、灯油 (kerosene) が1967-76年において US ではギッフェン財であることを示す。Jensen and Miller [2002] は実証分析により、中国南部では米、中国北部ではヌードルがそれぞれ貧しい人々にとってギッフェン財であることを示す。他方、McKenzie [2002] はメキシコにおけるトルティーヤ (tortillas) がギッフェン財かどうか実証分析を行い、劣等財 (inferior good) ではあるが、ギッフェン財ではないことを示した。また、Koenker [1977] は1790年頃のイングランドのデータを用いて、bread と meat の需要関数を推計し、bread がギッフェン財ではなく、普通財または正常財 (normal good) であることを実証分析により示した。
- (6) 財の不分割性 (indivisibility) を用いてギッフェン財の可能性を示すアプローチを採用した Garratt [1997] は、不分割性を持つ財が存在すると、分割可能財をギッフェン財にする可能性があることを示した。これに対して、Garratt [2003, 2005] は不分割性を持つ財そのものがギッフェン財になる可能性を「2都物語 (A tale of two cities)」についての論証に加え、数値例をも示した。
- (7) Shy [1995, 2001] は電話サービス (telecommunication) の例を取り上げて考察し、ネットワーク外部性 (network externalities) を仮定した効用関数から、集計的需要曲線は右上がりの部分を持つことを示した。また、Yeung [2002] は消費外部性を仮定した、数値例の需要関数からギッフェン財の存在を示している。
- (8) Berg [1987] は初期保有量を考慮したギッフェン財の定義を用いて1845-49のアイランドのジャガイモがギッフェン財であったかどうかをテストする条件を導いている。

- (9) Cespa [2005] は複数資産の場合でノイズを伴う合理的期待均衡市場 (multi asset noisy rational expectations equilibrium (NREE) market) において、ギッフェン財が存在する数値例を提示した。なお、Cespa [2005] の主要な貢献はギッフェン財が存在しないための条件を明らかにした点にある。
- (10) 一般に、マーケティング理論においては、宝石、毛皮、香水、すばらしい中国磁器、ロールスロイスなど豪華な車、高級カントリークラブ会員権の場合の価格付け、いわゆる名声価格法 (prestige pricing) を説明するのに後屈形 (backward-bending) の需要曲線を用いている⁷⁾。これに対して、販売促進活動、需要サイドや供給サイドを考慮に入れ、Kumcu and McClure [2003] は後屈形の需要曲線を用いない、新しい説明を試みている。Sterns and Borna [2005] のコメント及びそれに対する McClure [2005] の返答を参照せよ。

2. 効用関数、無差別曲線、及びギッフェン財をもたらす需要曲線

2. 1 Wold and Juréen [1953] の数値例

Wold and Juréen [1953] は与えられた財2の価格 (p_2) と所得 (m) のもとで、財1の価格 (p_1) がある範囲の値をとるとき、財1 (x_1) がギッフェン財となることを示した。その効用関数は非常に単純なもので、

$$u(x_1, x_2) = (x_1 - 1) / (2 - x_2)^2$$

である。ただし、 $x_1 > 1, 0 \leq x_2 \leq 1.6$ である。それ以外の (x_1, x_2) の領域では、 $u(x_1, x_2) = x_1$ 、すなわち、財1の消費量だけに依存する。言い換えると無差

7) もちろん右上がりの部分がギッフェン行動を示す。Kumcu and McClure [2003, p. 51] には、名声価格法の対象となる財やサービスの例が表1にまとめられている。

別曲線は財 1 を横軸, 財 2 を縦軸に取ったとき, 縦軸に平行な線分群となる⁸⁾。

いま, MATHEMATICA を用いて, この効用関数の 3 次元における効用曲面を表示してみよう。 $x_1 > 1, 0 \leq x_2 \leq 1.6$ の範囲以外の領域は, 予算制約のもとでの効用最大点を実現しないことがあらかじめわかるので, Wold and Juréen [1953, p.101] のオリジナルの無差別曲線図には描かれているが, 以下の図においては省いている。

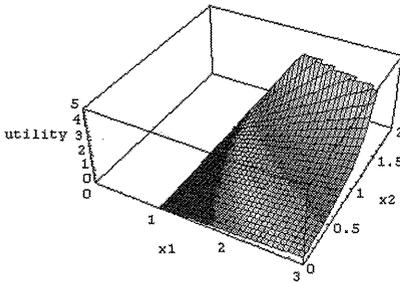


図 1 Wold and Juréen [1953] の場合の 3 次元効用曲面

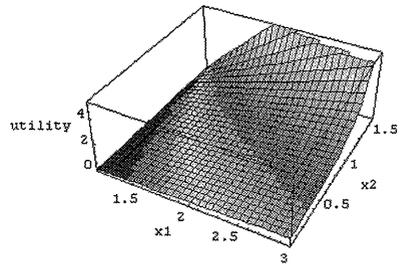


図 2 Wold and Juréen [1953] の場合の 3 次元効用曲面

図 1 は Wold and Juréen [1953] の効用関数を 3 次元に表した効用曲面である。画面手前の左側が $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$ の原点を示している。同じ効用水準をもたらす点の集合 (無差別曲線) がカラー表示では別の色 (紙面ではモノクロの濃淡) で表されている。

図 2 は図 1 より便宜上, $1 < x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 1.6$ の領域のみを表示したものである。

効用曲面の特徴を明示するために, 無差別曲線 (ある効用水準 u をもたらず点 (x_1, x_2) の集合), すなわち,

$$I(u) = \{(x_1, x_2, u) \mid u(x_1, x_2) = u, 1 < x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 1.6\}$$

8) この範囲では効用は飽和点を持っていることに注意しよう。

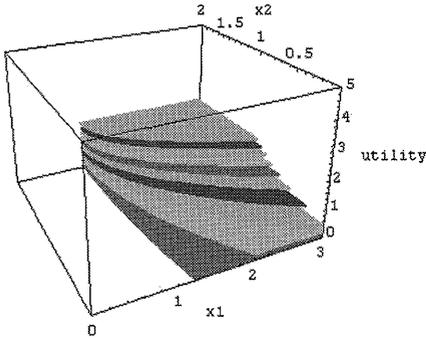


図3 効用水準で切断した切り口を幾重にも重ねたもの

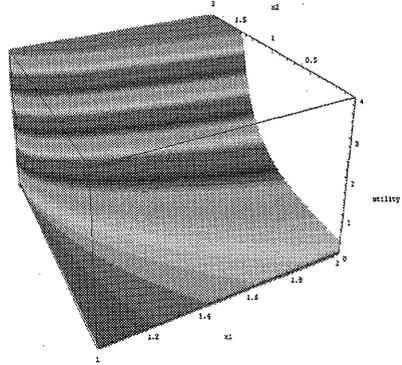


図4 効用水準で切断した切り口を幾重にも重ねたもの

を表示したものが図3と4である。3次元の効用曲面を効用水準 u で切断した切り口を何枚も重ねて表示している。効用関数の式、3次元の効用曲面及び無差別曲線図から明らかなように、飽和 (satiation) が存在している。

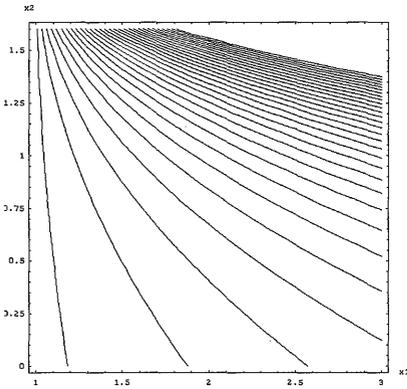


図5a Wold and Juréen [1953] の無差別曲線図

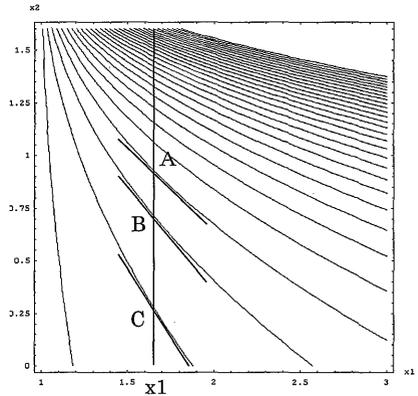


図5b 限界代替率の変化

図5aはWold and Juréen [1953] の無差別曲線群を示す。ある固定した財1の水準 (x_1) で垂直線を考え、無差別曲線との交点をみてみよう (図5b)。

そのとき、後に数式で確認するように、財 2 の消費量 (x2) が 1.6 からゼロに近づくにつれて (点 A, B 及び C を見よ), 無差別曲線の傾きの絶対値はしだいに大きくなっていくことがわかる。

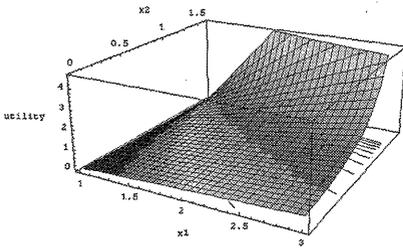


図 6 効用曲面と無差別曲線群

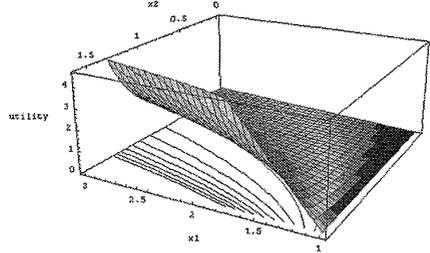


図 7 図 6 を右後ろから見たもの

図 6 は効用曲面と無差別曲線群を同時に表示したものである⁹⁾。また、図 6 を右後方から見たものが図 7 である。これらから Wold and Juréen [1953] の提示した効用関数の特徴が明らかとなる、すなわち、ある領域から急激に効用水準が上昇していることが読み取れる。このことは無差別曲線同士の間隔が急に狭まっていることからわかる。

さて、効用関数から無差別曲線の傾きの絶対値、すなわち、限界代替率 MRS_{12} を MATHEMATICA で求めよう。以下、ゴチック体は入力、その下の行は出力を示す。

財 1 の限界効用は、

$$D[u[x1, x2], x1]$$

$$\frac{1}{(2 - x2)^2}$$

となる。

同様に、財 2 の限界効用は、

9) これを実現する MATHEMATICA のプログラムについては Wickham-Jones [1994, pp. 241-242] を参照のこと。

$$D[u[x1, x2], x2]$$

$$\frac{2(-1+x1)}{(2-x2)^3}$$

となる。

限界代替率 MRS12 は、限界効用の比で与えられる¹⁰⁾ので、

$$D[u[x1, x2], x1] / D[u[x1, x2], x2]$$

$$\frac{2-x2}{2(-1+x1)}$$

となる。

与えられた範囲、すなわち、 $x1 > 1, 0 \leq x2 \leq 1.6$ のもとでは、 $x1$ が一定のとき無差別曲線の傾きの絶対値は $x2$ が小さくなると増大することがわかる(図5b参照)。この性質と、財1の価格($p1$)のみが上昇するとき、予算制約線は点(0, $m/p2$)を中心にして時計回りに回転するという性質を組み合わせると、価格と所得の組($p1, p2, m$)のある範囲において、財1の需要量が上昇する可能性を確かめることができる。このことは図9から図14のアニメーションに示されている。与えられた所得制約のもとで効用を最大にする

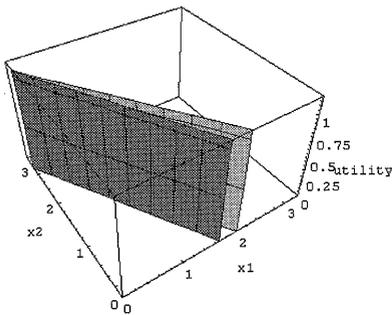


図8 2つの予算制約(垂直平面)

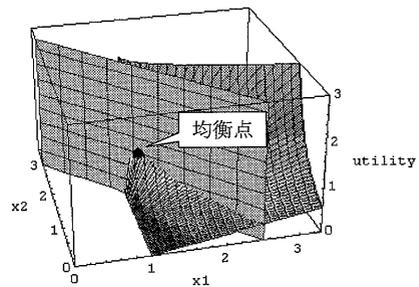


図9 均衡点は予算制約(垂直平面)のもとで効用を最大にする点である

10) たとえば、武隈 [1989, p.35], 西村 [1990, p.16] などのミクロ経済学のテキストを参照せよ。

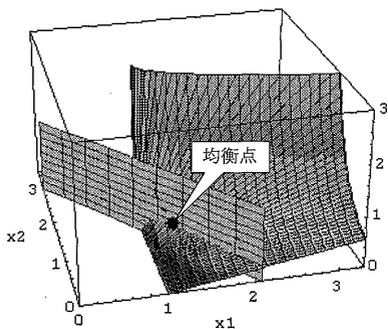


図10 図9より財1の価格が上昇

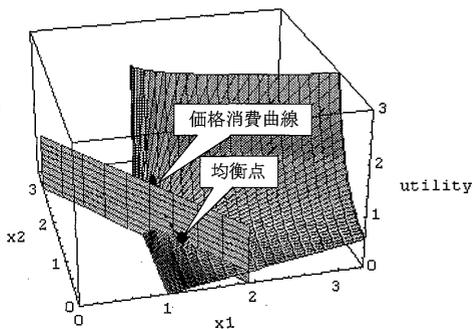


図11 図10より財1の価格がさらに上昇

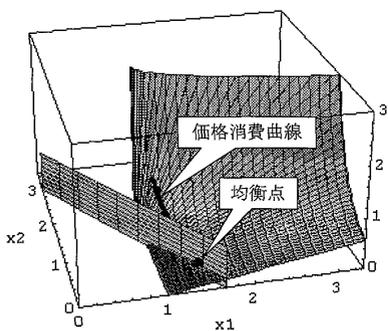


図12 図11より財1の価格がさらに上昇

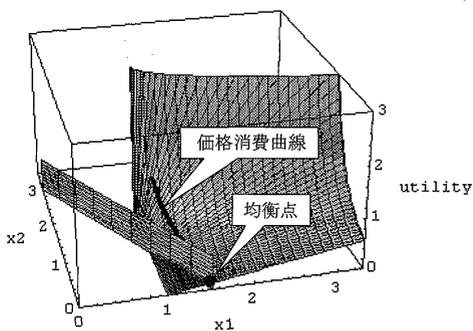


図13 図12より財1の価格がさらに上昇

財1と財2の消費量の組み合わせ (x_1, x_2) が黒丸印 (●) で示されている。この点は消費者均衡点と呼ばれている。この消費者均衡点は予算制約が変化すると連れて移動するが、図の場合、財1の価格のみが変化する場合は描かれている。このときの消費者均衡点の軌跡を(財1の価格変化による)価格消費曲線という。

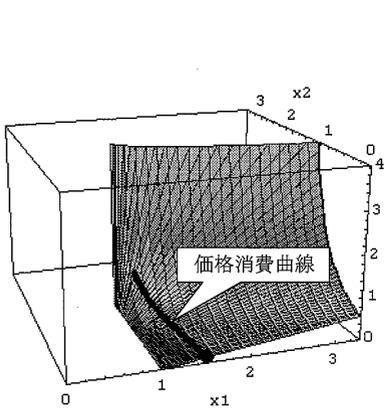


図14 財1の価格が変化したときの価格消費曲線

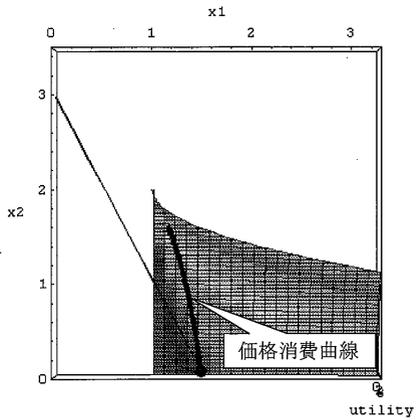


図15 図14を真上から見た図(財1の価格が変化したときの価格消費曲線)

図15は図14をほぼ真上から見た図である。価格消費曲線が右下がりであることから、財1の価格(p_1)のみが上昇するとき、財1の需要量(x_1)が増加していることがわかる。

図16は3本の予算制約線を明示的に表示しているので、右下がりの価格消費線を際立たせている。

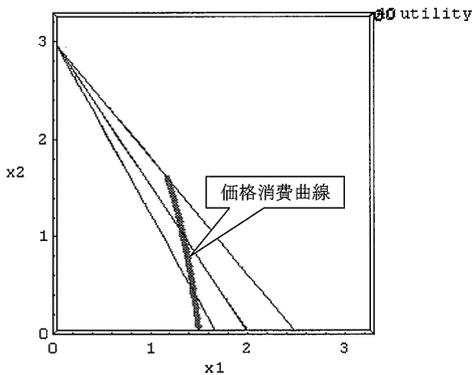


図16 価格消費曲線

所得制約のもとで効用を最大にする財1と財2の消費量（これを需要量という）を求めるには、限界代替率と価格比が等しいことと、財1と財2の消費量が予算制約式を満たすことを利用すればよい。図形的には、予算制約線に接する無差別曲線を探し、その接点が求める消費者均衡点（需要量の組）である。黒丸印（●）がそれぞれの予算制約のもとでの消費者均衡点を示している。図17及び図18において、点A、B、及びCがそれぞれの予算制約線に対応する消費者均衡点である。財1がギッフェン財となることがわかる。

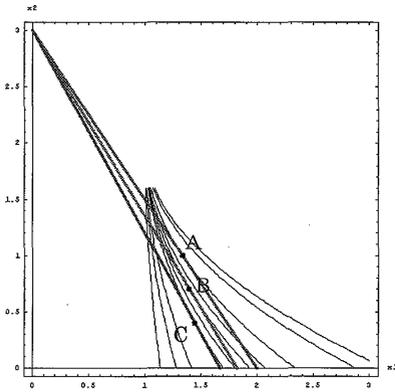


図17 比較静学：点Aが最初の消費者均衡点，点B及びCがそれぞれ財1の価格上昇後の消費者均衡点を示す

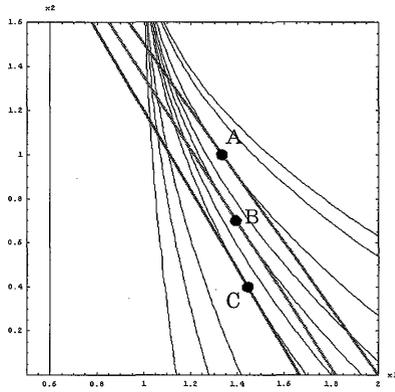


図18 図17の部分拡大した図

財1と財2の需要関数は MATHEMATICA の Solve 関数を用いて、次のようにして求めることができる。

$$\text{equilibrium} = \text{Solve} \left[\left\{ \frac{D[u[x1, x2], x1]}{D[u[x1, x2], x2]} = p1/p2, p1 * x1 + p2 * x2 == m \right\}, \{x1, x2\} \right]$$

$$\left\{ \left\{ x1 \rightarrow -\frac{m - 2 p1 - 2 p2}{p1}, x2 \rightarrow -\frac{2 (-m + p1 + p2)}{p2} \right\} \right\}$$

これから、財1の需要関数 $x1 [p1, p2, m]$ が

$$\frac{m - 2p_1 - 2p_2}{p_1}$$

及び、財2の需要関数 $x_2 [p_1, p_2, m]$ が

$$\frac{2(-m + p_1 + p_2)}{p_2}$$

で与えられることがわかる。

いま、 $p_2 = 1/3$ 、 $m = 1$ のとき財1の需要曲線（すなわち、財1の逆需要関数）を描くと、図19のように右上がりの需要曲線となり¹¹⁾、財1がギッフェン財であることを示している。

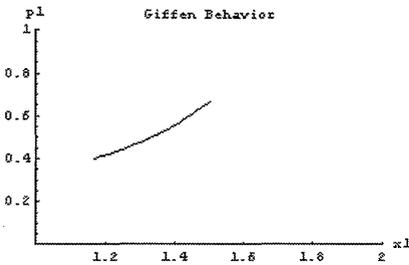


図19 財1がギッフェン財となる右上がりの需要曲線

Wold and Juréen [1953] の数値例の優れた点は、容易に需要関数を求めることができること、さらに、その需要関数からギッフェン財、すなわち、右上がりの需要曲線部分を持つことを簡単に確認できることである。

2. 2 Vandermeulen [1972] の提示した効用関数

Vandermeulen [1972] が示した効用関数は MATHEMATICA の表記で

11) 財1の取りうる価格 p_1 は $0 \leq x_2 \leq 1.6$ を考慮すると、 $2/5 \leq p_1 \leq 2/3$ となる。このとき、 $x_1 > 1$ となっていることに注意しよう。

```
u[x1_,x2_] := (n+1)^(-1)*x2^(n+1)*x1^(-1) - (1-m)^(-1)*k*x1^(m-1)
n=1;m=-1;k=100;
```

である。

3次元の効用曲面及び無差別曲線図から明らかなように、生存最低水準 (subsistence level) 及び飽和 (satiation) が存在している。

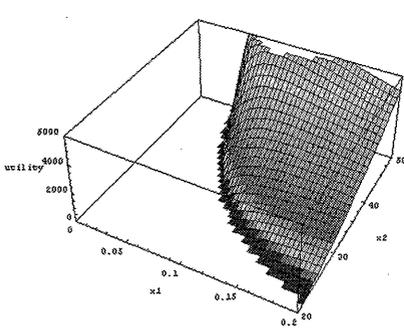


図20 Vandermeulen [1972] の効用曲面

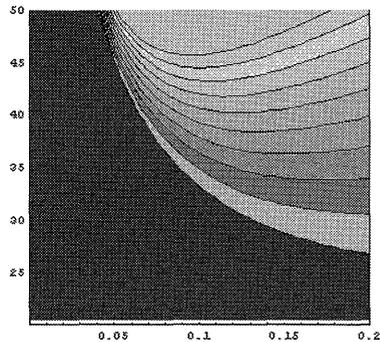


図21 Vandermeulen [1972] の無差別曲線図

図20は Vandermeulen [1972] の3次元の効用曲面を示している。図21及び22は Vandermeulen [1972] の無差別曲線図を示している。生存最低水準 (subsistence) に相当する境界部分と飽和 (satiation) が存在することが見て取れる。

図23及び図24において、黒丸印 (●) がそれぞれの予算制約のもとでの消費者均衡点を示している。財1の価格 (p1) が上昇するに伴い消費者均衡点が点A, B, 及びCとなる。

図23及び24で示されている、比較静学の結果 (価格消費曲線) から、財1の価格 (p1) と財1の需要量 (x1) の関係を示したものが、図25に描かれている、右上がりの需要曲線である。すなわち、財1はギッフェン財である。

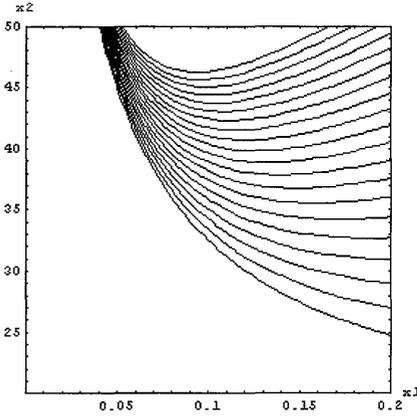


図22 Vandermeulen [1972] の無差別曲線図

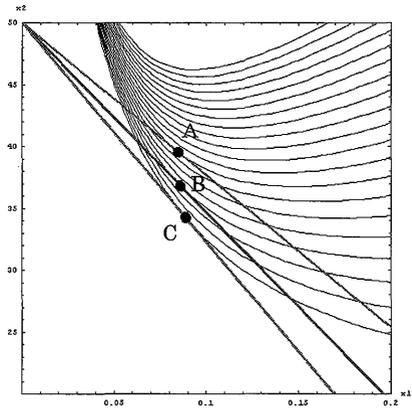


図23 比較静学

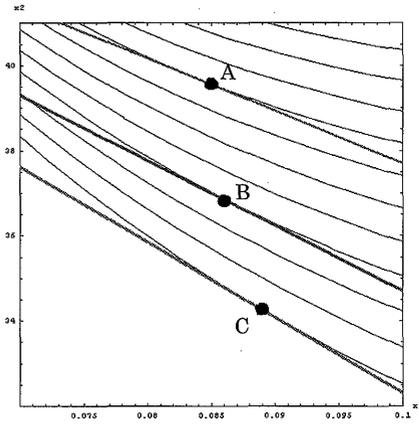


図24 図23の拡大図

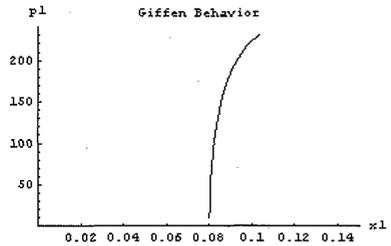


図25 右上がりの需要曲線の一部

2. 3 Silberberg and Walker [1984] の数値例

Silberberg and Walker [1984] の示した効用関数は、MATHEMATICA の記法で表すと、

$$u [x1_, x2_] := a*x1 + \text{Log} [x1] + x2^2/2$$

となる。

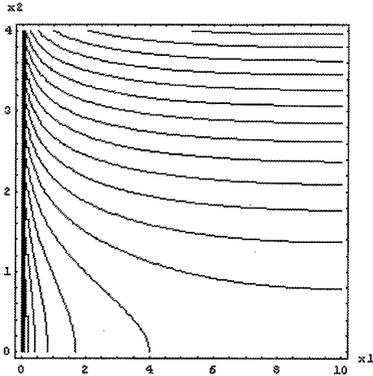


図26 Silberberg and Walker [1984] の無差別曲線図

パラメータ $a = -0.1$ のとき、図26のような無差別曲線図が得られる。原点の近くでは無差別曲線は原点に対して凹になっていることに注意しよう。

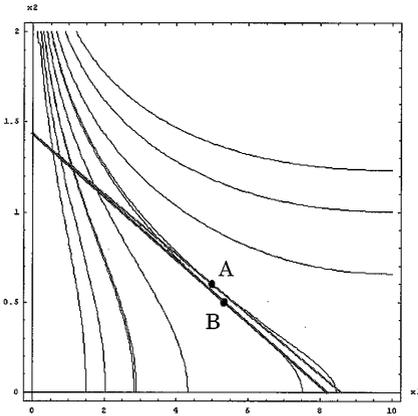


図27 点A及びBは、財1の価格 p_1 が1及び1.05のときの消費者均衡点である

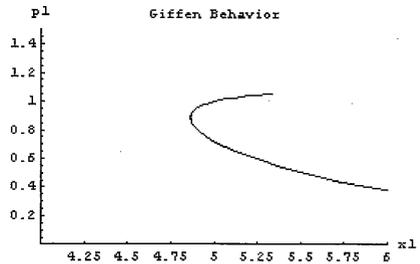


図28 需要曲線の右上りの部分がギッフェン財を示す

無差別曲線の形状から、ある価格と所得の範囲では財1がギッフェン財になりうることが見て取れる。Silberberg and Walker [1984] が示した数値例は $p_1=1$, $p_2=6$, $x_1=5$, $x_2=0.6$ の近傍では $\partial x_1/\partial p_1 > 0$ となる。

実際に、図27及び図28に示すように財1は、 $p_2=6$, $m=8.6$ のとき、 $p_1=1$ の近傍でギッフェン財となる。 $p_1=1$ のときの消費者均衡点が点Aで、 $p_1=1.05$ のときの消費者均衡点が点Bで示されている。したがって、財1は右上がりの需要曲線を持つ。

2. 4 Spiegel [1994] の提示した効用関数

Spiegel [1994] の提示した効用関数は次のように定義されている。すなわち、X財のある値 (α/β) を境に2つの関数で表示されている。

$$U(X,Y) = \alpha X - \beta X^2/2 + \lambda Y + \delta Y^2/2 \quad \text{for } 0 \leq X \leq \alpha/\beta$$

$$U(X,Y) = \alpha^2/2\beta + \lambda Y + \delta Y^2/2 \quad \text{for } X > \alpha/\beta$$

ギッフェン財のケースを示す Spiegel [1994] の数値例は、 $\alpha=100$, $\beta=2$, $\delta=1$, および $\lambda=1$ のパラメータに対し、所得=55, X財およびY財の最初の価格がそれぞれ1の場合から、X財の価格のみ1.1に上昇したときである。

まず、Spiegel [1994] の提示した効用関数から3次元の無差別曲面および無差別曲線図を描いてみる。

図30の無差別曲線図からもわかるように、X財とY財の組が原点に近い領域では、無差別曲線の傾きの絶対値（限界代替率）が増加していること（すなわち、原点に対して凹）がわかる。消費者行動理論では右上の領域に描かれているように、限界代替率が減少すること（すなわち、原点に対して凸）が仮定されている。

図31は Spiegel [1994] の数値例による消費者均衡点の比較静学を示す。黒丸印 (●) がそれぞれの予算制約のもとでの消費者均衡点を示している。X財がギッフェン財であることがわかる。なぜならば、点Aが最初の予算制約のも

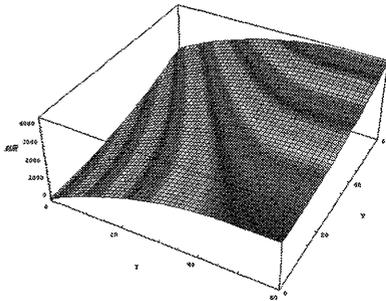


図29 Spiegel [1994] の
3次元の効用曲面

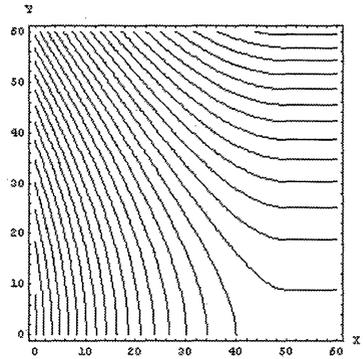


図30 図29に対応した無差別曲
線図

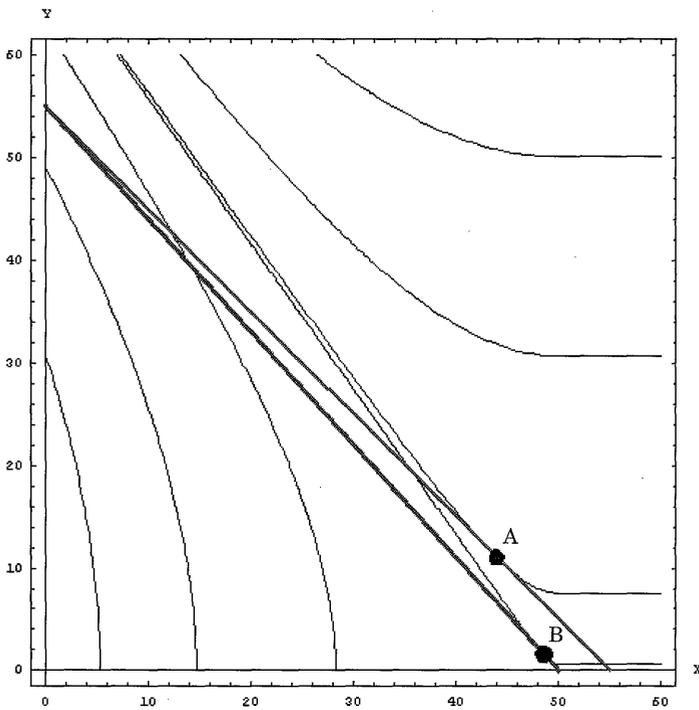


図31 Spiegel [1994] の比較静学 (X財がギッフェン財の場合)

とで効用を最大にする消費者均衡点を示し、点BがX財の価格のみが上昇した場合の新しい消費者均衡点となっているからである。

MATHEMATICA を用いて、点Aと点Bを求めよう。

```
Clear[x,y]
α=100;β=2;δ=1;λ=1;
uSpiegel[x_,y_]:=α*x - β*x^2/2 + λ*y + δ*y^2/2
```

財Xの限界効用 (muldef) をまず求める。

```
muldef=D[uSpiegel[x,y],x]
100-2 x
```

同様に、財Yの限界効用 (mu2def) を求める。

```
mu2def=D[uSpiegel[x,y],y]
1+y
relativeMU=muldef/mu2def
```

$$\frac{100-2x}{1+y}$$

```
Clear[xEq,yEq,p1,p2,mm]
```

限界効用の比が価格比に等しい条件と、予算制約式を連立させて、XとYについて解くと、消費者均衡点が得られる。

```
solution=Solve[{relativeMU=p1/p2,p1*x+p2*y==mm},
{x,y}]
{{x->-frac{-mm p1 - p1 p2 + 100 p2^2}{p1^2 - 2 p2^2}, y->-frac{p1^2 + 2 mm p2 - 100 p1 p2}{p1^2 - 2 p2^2}}}
```

したがって、財X及び財Yの需要関数は、それぞれ

```
xEq[p1_,p2_,mm_]=x/.solution[[1]]
```

$$\frac{-mm p1 - p1 p2 + 100 p2^2}{p1^2 - 2 p2^2}$$

```
yEq[p1_,p2_,mm_]=y/.solution[[1,2]]
```

$$\frac{p1^2 + 2 mm p2 - 100 p1 p2}{p1^2 - 2 p2^2}$$

となる。いま、財 X の価格が 1、財 Y の価格が 1 で、所得が 55 のときの消費者均衡点を求める。これは図 31 の点 A である。

```
p1=1;p2=1;mm=55;  
xEqOld=xEq[1,1,55]  
44  
yEqOld=yEq[1,1,55]  
11
```

財 Y の価格が 1 で、所得が 55 の場合、財 X の価格のみが 1.1 に変化したとき消費者均衡点を求める。これは図 31 の点 B である。

```
xEqNew=xEq[1.1,1,55]  
48.6076  
yEqNew=yEq[1.1,1,55]  
1.53165
```

財 X の価格のみが 1 から 1.1 へ増加するとき、財 X の需要量は 44 から 48.6076 へと増加しているので、財 X がギッフェン財となることがわかる。

2. 5 Jensen and Miller [2002] の数値例について

Jensen and Miller [2002] が示した数値例の効用関数は、次のとおりである。

$$u(x1, x2) = ((x1 + x2 - 6) / (x1 + x2 - 5.99)) x1^{1/6} x2^{5/6} \quad \text{if } x1 + x2 \geq 6$$

$$u(x_1, x_2) = 0 \quad \text{if } 0 \leq x_1 + x_2 < 6$$

この効用関数の3次元効用曲面は Jensen and Miller [2002] の付録にも示されているが、図32のような形状をしている。また、その無差別曲線図は図33に描かれているように図32の断崖絶壁に対応した右下がりの境界が出てくる。この境界線の特徴から、ある所得と価格の組み合わせの範囲内で、財1がギッフェン財となることがわかる。

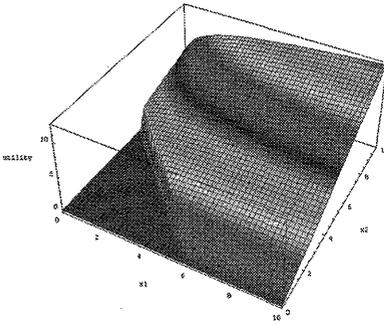


図32 Jensen and Miller [2002]
の効用曲面

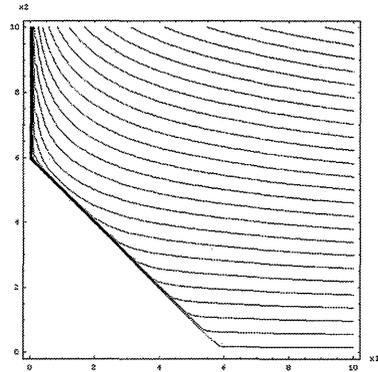


図33 Jensen and Miller [2002]
の無差別曲線図

図34には予算制約線が3本描かれている。財1の価格上昇に伴い、消費者均衡点はそれぞれ点A, B, 及びCとなる。原点に近い予算制約線のほうが、財1の価格(p_1)が高くなっていることを考慮すると、財1の需要量 x_1 は財1の価格 p_1 が高くなるにつれて増加していることがわかる。

図35は図34の関係から MATHEMATICA で導出した財1の需要曲線を示している。右上がりの需要曲線部分がギッフェン財あるいはギッフェン行動 (Giffen behavior) を示している。

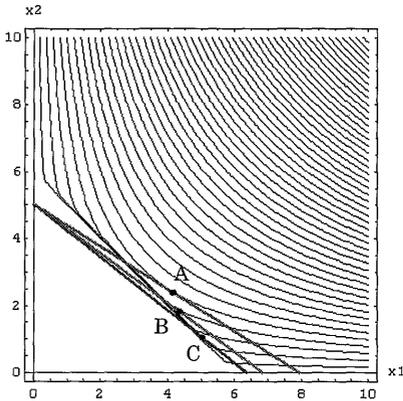


図34 比較静学

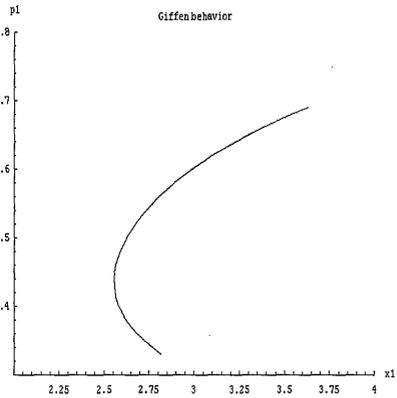


図35 右上がりの需要曲線部分がギッフェン財を示す

2. 6 Sørensen [2004,2006] の例

2. 6. 1 基本的なアイデアに基づく例 (Example 1)

Sørensen [2004,2006] の提示する効用関数を MATHEMATICA の表記であらわすと以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 u1[x1_, x2_] &:= x1 + B; \\
 u2[x1_, x2_] &:= A*(x1 + x2); \\
 u[x1_, x2_] &:= \text{Min}[u1[x1, x2], u2[x1, x2]];
 \end{aligned}$$

あるいは、簡単に

$$u[x1_, x2_] := \text{Min}[x1 + B, A*(x1 + x2)]$$

以下のグラフは、 $A = 2$, $B = 10$ の場合を描いている。

図36は Sørensen [2004,2006] の3次元の効用曲面である。図36及び37からわかるように、 $u1[x1, x2] = u2[x1, x2]$ を満たす点 $(x1, x2)$ の軌跡は直線となっている。すなわち、それぞれの無差別曲線は折れ曲がった角を持っている。この角の軌跡 (kinked curve) は図37から読み取ることができるように、右下

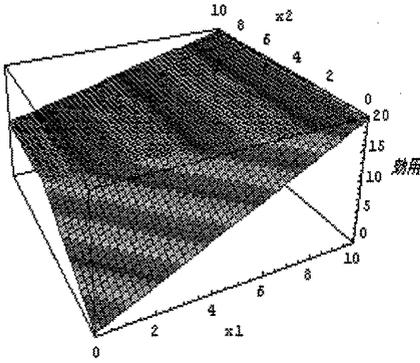


図36 Sørensen [2004,2006]
の効用曲面

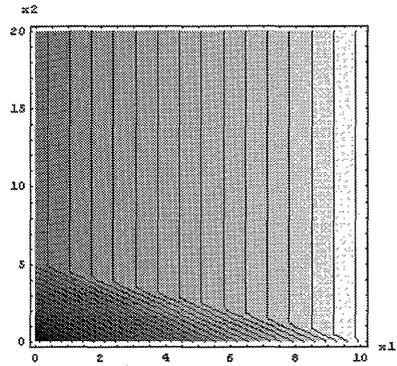


図37 Sørensen [2004,2006]
の無差別曲線図

がりでその傾きの絶対値は $u1[x1,x2]$ の傾きの絶対値（この数値例では無限大）、及び $u2[x1,x2]$ の傾きの絶対値（この数値例では1）よりも小さいことがわかる¹²⁾。

図39において、黒丸印（●）がそれぞれの予算制約のもとでの均衡点を示している。第2財の価格（ $p2$ ）のみが上昇するにつれ、消費者均衡点がそれぞれ点A、B、及びCとなっている。すなわち、財2の需要量（ $x2$ ）が増加していることから、財2がギッフェン財となることがわかる。

実際に財2の需要関数 $x2[p1,p2,m]$ を求めてみると、

$$-\frac{m-10p1}{2p1-p2}$$

となる。

また、財1の需要関数は

$$\frac{2(m-5p2)}{2p1-p2}$$

12) $u1[x1,x2]=u2[x1,x2]$ を満たす点 $(x1,x2)$ の軌跡は与えられた条件より、 $x2=(B-(A-1)x1)/A$ となる。 $A=2$ 、 $B=10$ なので、 $x2=5-x1/2$ となる。この直線の傾きの絶対値は $1/2$ である。

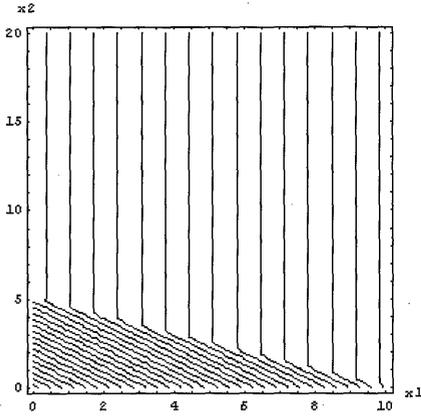


図38 無差別曲線図

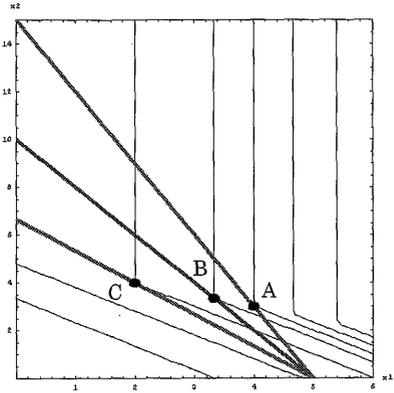


図39 比較静学

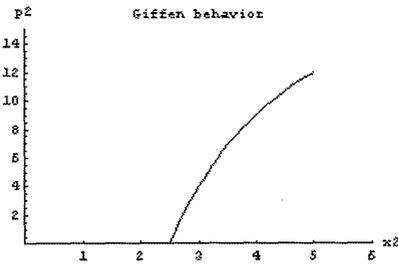


図40 Sørensen [2004,2006] の例に基づき需要曲線(財2がギッフェン財)

となっている。

たとえば、 $p_1 = 12$ 、 $m = 60$ のときの、財2の需要曲線は図40のように右上がりの曲線となる¹³⁾。

2. 6. 2 Sørensen [2002,2006] の一般化を目指した例 (Example 2)

Sørensen の提示する効用関数を MATHEMATICA 表記であらわすと、以

13) 財1と財2の需要量がそれぞれ非負となる条件より、 $0 \leq p_2 \leq 12$ となる。

下のようになる。

$$u_1[x_1, x_2] := (x_1^{c_1} x_2)^{1/(1+c_1)};$$

$$u_2[x_1, x_2] := (x_1^{c_2} x_2^2)^{1/(2+2c_2)};$$

$$u[x_1, x_2] := \text{Min}[u_1[x_1, x_2], u_2[x_1, x_2]]$$

すなわち、関数 u_1 および u_2 は、それぞれコブ=ダグラス型効用関数になっていて、Example 1 の一般化になっていることがわかる。

無差別曲線図はパラメータ c_1 と c_2 の大小関係に依存して、2つのケースに分けられる¹⁴⁾。 c_1 と c_2 の大小関係により、 $u_1[x_1, x_2] = u_2[x_1, x_2]$ となる境界を示す屈折曲線 (kinked curve) の形が異なる。

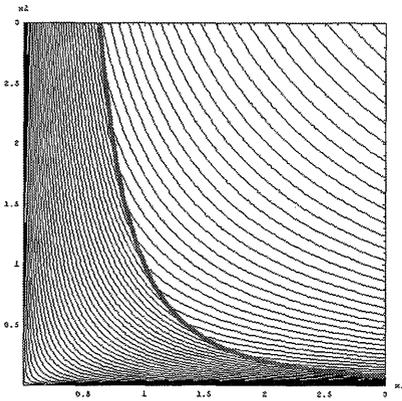


図41 $c_1=3/2$, $c_2=1$ のとき

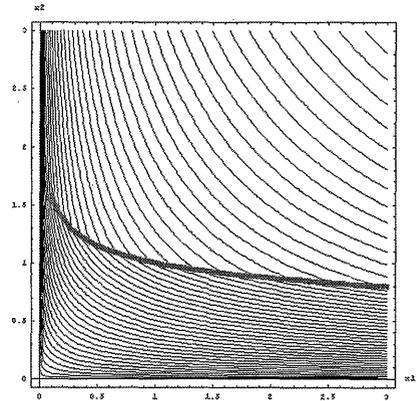


図42 $c_1=1/2$, $c_2=1$ のとき

図41は $c_1=3/2$, $c_2=1$ のときを示す。右下がりの太線は $u_1[x_1, x_2] = u_2[x_1, x_2]$ ならしめる点 (x_1, x_2) の軌跡をあらわしている。この太線の点 $(1, 1)$

14) Sørensen[2006] の命題 1 の主張及び証明には誤りがある。訂正とその証明は付録に示した。

での傾きの絶対値は $u1[x1, x2]$ 及び $u2[x1, x2]$ の点 (1,1) での傾きの絶対値よりも大きいことに注意しよう¹⁵⁾。

図42は $c1=1/2$, $c2=1$ のときを示す。同様に、右下がりの太線は $u1[x1, x2] = u2[x1, x2]$ ならしめる点 $(x1, x2)$ の軌跡をあらわしている。この太線の点 (1,1) での傾きの絶対値は $u1[x1, x2]$ 及び $u2[x1, x2]$ の点 (1,1) での傾きの絶対値よりも小さいことに注意しよう。

2. 6. 2(A) 財1 ($x1$) がギッフェン財の場合 ($c1=0.8$, $c2=0.5$ のとき)

図43には無差別曲線図に右下がりの太線が描かれている。右下がりの太線は $u1[x1, x2] = u2[x1, x2]$ ならしめる点 $(x1, x2)$ の軌跡をあらわしている。すでに述べたように、このケースの場合、この太線の点 (1,1) での傾きの絶対値は $u1[x1, x2]$ 及び $u2[x1, x2]$ の点 (1,1) での傾きの絶対値よりも大きいことに注意しよう。

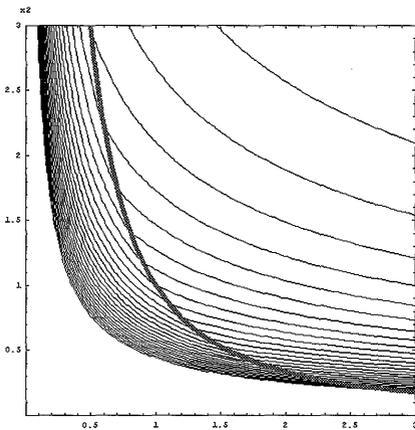


図43 $c1=0.8$, $c2=0.5$ のとき

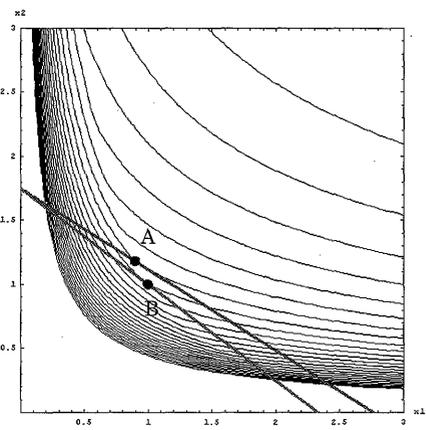


図44 財1 ($x1$) がギッフェン財の場合 ($c1=0.8$, $c2=0.5$ のとき)

15) 付録を参照せよ。

図44及び45において、黒丸印 (●) がそれぞれの予算制約のもとでの消費者均衡点を示している。財1の価格 (p_1) のみが増加すると、点AからBへ消費者均衡点は移動する。

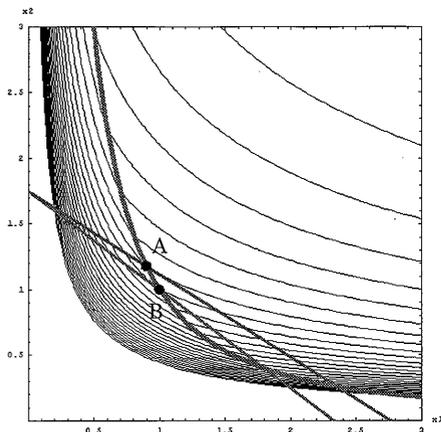


図45 財1 (x_1) がギッフェン財の場合
($c_1=0.8$, $c_2=0.5$ のとき)

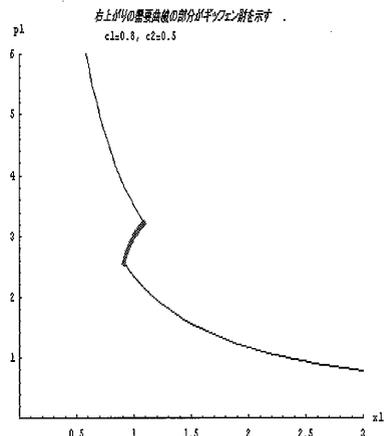


図46 右上がりの需要曲線の太線部分は財1がギッフェン財であることを示す

特に図45より消費者均衡点 (●) が $u_1[x_1, x_2] = u_2[x_1, x_2]$ ならしめる点 (x_1, x_2) の軌跡上にあることがわかる。

図44及び45の比較静学に示されているように、ある価格と所得の範囲内で、財1はギッフェン財である。MATHEMATICAを用いて計算すると、図46に示されるように財1は右上がりの需要曲線の部分を持つことがわかる。

2. 6. 2(B) 財2がギッフェン財の場合 ($c_1=1/2$, $c_2=1$ のとき)

図47には比較静学が描かれている。黒丸印 (●) がそれぞれの予算制約のもとでの消費者均衡点を示している。図48には無差別曲線図に右下がりの太線も描かれている。右下がりの太線は $u_1[x_1, x_2] = u_2[x_1, x_2]$ ならしめる点 (x_1, x_2) の軌跡をあらわしている。すでに述べたように、このケースの場合、

この太線の点 (1, 1) での傾きの絶対値は $u_1[x_1, x_2]$ 及び $u_2[x_1, x_2]$ の点 (1, 1) での傾きの絶対値よりも小さい。

特に図48より消費者均衡点 (●) が $u_1[x_1, x_2] = u_2[x_1, x_2]$ ならしめる点 (x_1, x_2) の軌跡上にあることがわかる。

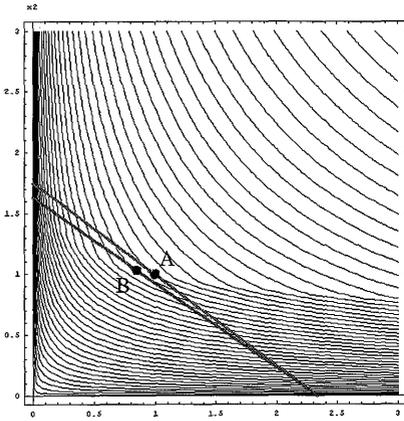


図47 $c_1=1/2, c_2=1$ のとき

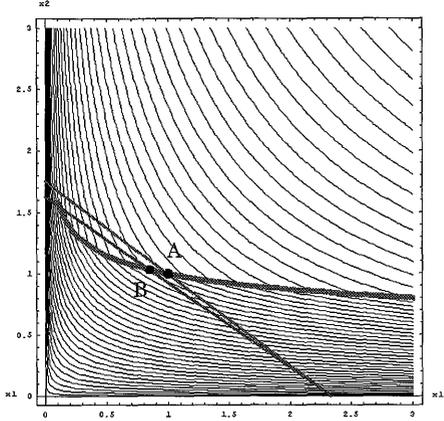


図48 $c_1=1/2, c_2=1$ のとき

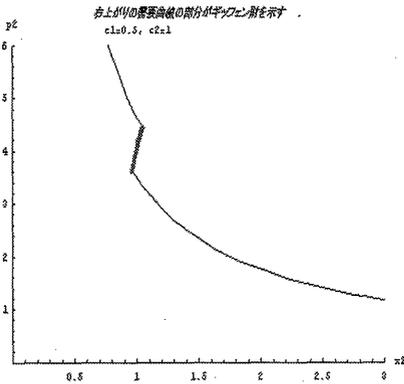


図49 右上がりの需要曲線の太線部分は財 2 がギッフェン財であることを示す

図47または図48の比較静学に示されているように、ある価格と所得の範囲内で、財2はギッフェン財である。MATHEMATICAを用いて計算すると、図49に示されるように財2は右上がりの需要曲線の部分を持つことがわかる。

3. 結 語

この小論では、ギッフェン財をもたらす効用関数の特徴、言い換えれば、無差別曲線図の特徴についてMATHEMATICAの計算力と描画能力を用いて調べてみた。価格と所得のある範囲内で右上がりの需要曲線が生ずるためには、生存最低水準 (subsistence level) あるいは飽和 (satiation) に相当する、所得制約とは別の制約が必要となることを再確認した。

所得制約以外の別の制約 (たとえば、必要栄養摂取量や生存最低水準、あるいは飽和など)、財の不可分割性、ネットワーク外部性、消費の外部性などを仮定することにより、ギッフェン財の可能性が指摘されている。Shy [1995, 2001] によるネットワーク外部性の場合を除き、他の研究は効用関数から出発しないアド・ホックなアプローチである。それらの結果を踏まえると、個人の需要曲線が右上がりの部分を持つ可能性はHicks [1956] やStigler [1947] が「非常にまれで」、あるいは「市場では観測されたことがない」と述べたこととは逆に、その蓋然性は大きくなっていく。

実際、Jensen and Miller [2002] の中国経済についての実証研究やBopp [1983] の軽油についての検証、及びBattalio, Kagel and Kogut [1991] などの実験経済学の研究により、ギッフェン財の存在あるいは、ギッフェン行動を示唆する結果が示されてきている。一般に、マーケティング理論においては、宝石、毛皮、香水、すばらしい中国磁器、ロールスロイスなど豪華な車、高級カントリークラブ会員権の場合の価格付け、いわゆる名声価格法 (prestige pricing) では後屈型の需要曲線を用いて説明している。

他方、Dougan [1982, p.810 or p.815] が既に指摘したように、「個人の需要曲線が右上がりの部分を持つ」ということと「市場で観測される、市場均衡

のトレース¹⁶⁾が右上がりである」ことを混同してはいけない。

ギッフェン財あるいはギッフェン行動の定義についても、(1)いわゆる Slutsky-Hicks 流の固定所得のもとで考察するか、(2)所得の変動を考慮する一般均衡の中で定義するのか (Nachbar [1998])、あるいは(3)初期保有量を考慮した場合に拡張する (Berg [1987]) などに分かれている。この点については今後の研究課題である。

なお、付録には Sørensen [2004, 2006] の命題の修正とその証明を掲載した。

16) すなわち、市場価格と取引数量のデータの組をグラフに表したときの曲線を指す。均衡では需要曲線と供給曲線の交点が観察される。

参考文献

- Battalio, Raymond C., John H. Kagel, and Carl A. Kogut, "Experimental Confirmation of the Existence of a Giffen Good," *American Economic Review*, Vol.81, No.4 (September 1991), pp.961-970.
- Barzel, Yoram and Wing Suen, "The Demand Curves for Giffen Goods are Downward Sloping," *Economic Journal*, Vol.102 (July 1992), pp.896-905.
- Berg, Morten, "Giffen's Paradox Revisited," *Bulletin of Economic Research*, Vol.39, No.1 (1987), pp.79-89.
- Bopp, Anthony E., "The demand for kerosene: a modern Giffen good," *Applied Economics*, Vol.15, Issue 4 (August 1983), pp.459-467.
- Butler, David J. and Peter G. Moffatt, "The Demand for Goods under Mixture Aversion," *The Manchester School*, Vol. 68, No.3 (June 2000), pp.349-359.
- Cespa, Giovanni, "Giffen Goods and Market Making," *Economic Theory*, Vol.25, No.4 (June 2005), pp.983-997.
- Davies, John E., "Giffen Goods, the Survival Imperative, and the Irish Potato Culture," *Journal of Political Economy*, Vol.102, No.3 (June 1994), pp.547-565.
- Dooley, Peter C., "Porter's Hint and Alternative Theories of the Giffen Paradox: A Reply to Michael White," *Australian Economic Papers*, Vol.27, Issue 50 (June 1988), pp.142-144.
- Dwyer, Gerald P., Jr. and Cotton M. Lindsay, "Robert Giffen and the Irish Potato," *American Economic Journal*, Vol.74, No.1 (March 1984), pp.188-192.
- Garratt, Rod, "Indivisibilities, Inferior goods, and Giffen goods," *Canadian Journal of Economics*, Vol.30, No. 1 (February 1997), pp.246-251.
- Garratt, Rod, "A tale of two cities and a Giffen good," *UCSB Departmental Working Papers* 5-03 (May 2003), 9p.
- Garratt, Rod, "A tale of two cities and a Giffen good," *Canadian Journal of Economics*, Vol.38, No.1 (February 2005), pp.49-56.
- Gilley, Otis W. and Gordon V. Karels, "In Search of Giffen Behavior," *Economic Inquiry*, Vol.29, No.1 (January 1991), pp.182-189.
- Gilley, Otis W. and Gordon V. Karels, "More on the Search for Giffen Goods," *Economic Inquiry*, Vol.32, No.1 (January 1994), pp.175-177.
- Hicks, Sir John, *Value and Capital*, 2nd ed., Oxford, 1946.
- Hicks, Sir John, *A Revision of DEMAND THEORY*, Oxford, at the Clarendon Press, 1956.
- Huang, Cliff J. and Philip S. Crooke, *Mathematics and Mathematica for Economists*, Blackwell Publishers, Inc., 1997.

- Jensen, Robert and Nolan Miller, "Giffen Behavior: Theory and Evidence," John F. Kennedy School of Government, Harvard University, Faculty Research Working Paper Series, RWP02-014 (January 2002), 26p.
- Johnston, Richard S. and Douglas M. Larson, "Focusing the Search for Giffen Behavior," *Economic Inquiry*, Vol.32, No.1 (January 1994), pp.168-174.
- Katzner, D. W., *Static Demand Theory*, Macmillan, 1970.
- Katzner, D. W., *Walrasian Microeconomics: An Introduction to the Economic Theory of Market Behavior*, Reading, MA, Addison-Wesley, 1988.
- Koenker, R., "Was Bread Giffen? The Demand for Food in England circa 1790," *Review of Economics and Statistics*, Vol.59, No. (May 1977), pp.225-229.
- Kohli, U., "Robert Giffen and the Irish Potato: Note," *American Economic Review*, Vol.76, No.3 (June 1986), pp.539-542.
- Kumcu, Erdogan and James E. McClure, "Explaining Prestige Pricing: An Alternative to Back-Bending Demand," *Marketing Education Review*, Vol.13, No. 1 (Spring 2003), pp.49-
- Lancaster, K. J., "A new approach to consumer theory," *Journal of Political Economy*, Vol.74, Issue 2 (April 1966), pp.132-157.
- Liebhafsky, H. H., "New thoughts about inferior goods," *American Economic Review*, Vol.59 (December 1969), pp.931-934.
- Lipsey, R. G., Rosenbluth, G., "A contribution to the new theory of demand: a rehabilitation of the Giffen good," *Canadian Journal of Economics*, Vol.4, Issue 2 (May 1971), pp.131-163.
- Mason, Roger S., *Robert Giffen and the Giffen Paradox*, Philip Allan Publishers Limited, 1989.
- Marshall, A., *Principles of economics*, Third Edition. London: Macmillan 1895.
- Masuda, Etsusuke and Peter Newman, "Gray and Giffen Goods," *Economic Journal*, Vol.91, No.364 (December 1981), pp.1011-1014.
- McClure, James E., "Reply to Stearns and Borna: Are the Partially Upward Sloping Demand Models Plausible?" *Marketing Education Review*, Vol.15, No.3 (Fall 2005), pp.73-75.
- McDonough, Terrence and Joseph Eisenhauer, "Sir Robert Giffen and the Great Potato Famine: A Discussion of the Role of a Legend in Neoclassical Economics," *Journal of Economic Issues*, Vol.29, No.3 (September 1995), pp.747-759.
- McDonough, Terrence, "Of Rats and Economists," *Journal of the History of Economic Thought*, Vol.25, No.4 (December 2003), 397-411.
- McKenzie, David, "Are tortillas a Giffen Good in Mexico?" *Economics Bulletin*, Vol.15, No.1 (2002), pp.1-7.

- Moffatt, Peter G., "Is Giffen Behaviour Compatible with the Axioms of Consumer Theory?" *Journal of Mathematical Economics*, Vol.37, Issue 4 (July 2002), pp.259-267.
- Nachbar, J. H., "The Last Word on Giffen Goods?" *Economic Theory*, Vol.11, (1998), pp.403-412.
- Plot, Charles R. and Jared Smith, "Instability of Equilibria in Experimental Markets: Upward-Sloping Demands, Externalities, and Fad-Like Incentives," *Southern Economic Journal*, Vol.65, No. 3 (1999), pp.405-426.
- Rosen, Sherwin, "Potato Paradoxes," *Journal of Political Economy*, Vol.107, No.6 Part 2 (December 1999), pp.S294-S313.
- Samuelson, Paul A., *Economics*, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 1961.
- Samuelson, Paul A. and William Nordhaus, *Economics*, 14th ed., 1992 and 15th ed., 1995, New York: McGraw-Hill.
- Shy, Oz, *Industrial Organization Theory and Applications*, The MIT Press, 1995, Cambridge, Massachusetts and London, England.
- Shy, Oz, *The Economics of Network Industries*, Cambridge University Press, 2001, Cambridge, United Kingdom.
- Sørensen, Peter Norman, "Simple Utility Functions with Giffen Demand," *Discussion Papers 04-22* (October 2004), Institute of Economics, University of Copenhagen, 10p.
- Sørensen, Peter Norman, "Simple Utility Functions with Giffen Demand," *Forthcoming in Exposita Note, Economic Theory*. Published online: 22 March 2006.
- Spiegel, U., "The case of a "Giffen good"," *Journal of Economic Education*, Vol.25, No.2 (Spring 1994), pp.137-147.
- Stearns, James M. and Shaheen Borna, "Beyond Prestige Pricing: Coverage of Counter-Intuitive Demand in Marketing Education," *Marketing Education Review*, Vol.15, No.3 (Fall 2005), pp.65-71.
- Vandermeulen, D. C., "Upward sloping demand curves without the Giffen paradox," *American Economic Review*, Vol.72, No. 3 (June, 1972), pp.453-58.
- Weber, Christian E., "A Difficulty in the Search for Giffen Behavior," *Atlantic Economic Journal*, Vol.25, No.3 (September 1997), pp.289-296.
- Weber, Christian E., "The case of a Giffen good: comment," *Journal of Economic Education*, Vol. 28, (Winter 1997), pp.36-44.
- Weber, Christian E., "Actuarially Unfair Insurance and Downward-Sloping Demand Curves for Giffen Goods," *Manchester School*, Vol.69, No.4 (September 2001), pp.377-386.
- Wichers, C. Robert, "In Search of Giffen Behavior: Comment," *Economic Inquiry*,

Vol.32, No.1 (January 1994), pp.166-167.

Wickham-Jones, Tom, *Mathematica Graphics Techniques & Applications*, Springer-Verlag, TELOS, 1994.

Wold, H., and L. Juréen, *Demand analysis: A Study in Econometrics*. New York: Wiley 1953.

Yeung, David W.K., "Consumption Externalities and Upward-Sloping Demand," *International Advances in Economic Research*, Vol.8, No.3 (August 2002), pp.196-200.

今喜典, 鶴沢秀, 山本賢司『基本現代経済学』(中央経済社, 1992年), 43ページの例, 及び49ページの注11を参照。

武隈愼一『ミクロ経済学』(新世社, 1989年), 増補版は1999年に発行されている。

西村和雄『ミクロ経済学』(東洋経済新報社, 1990年)。

早見弘, 鶴沢秀, 若林信夫, 今喜典, 佐竹正夫『現代経済学講義』(中央経済社, 1986年), 37ページ, 及び44ページの注31を参照。

付録 Sørensen の命題 1 の証明の修正

まず, Sørensen [2006] の命題及び証明を引用する。

Proposition 1 *Assume u_1 and u_2 are utility functions representing continuous, monotone, convex preferences on \mathbb{R}_+^2 . Then $u = \min \{u_1, u_2\}$ has the same properties. Assume that $\hat{x} \in \mathbb{R}_{++}^2$ solves $u_1(\hat{x}) = u_2(\hat{x})$, that u_1 and u_2 are C^1 at \hat{x} , and that the marginal rates of substitution $c_k = [\partial u_k(\hat{x}) / \partial x_1] / [\partial u_k(\hat{x}) / \partial x_2]$ satisfy $c_1 > c_2 > 0$. Take as given a price vector $\hat{p} \in \mathbb{R}_{++}^2$ with $c_1 > \hat{p}_1 / \hat{p}_2 > c_2$, and let $\hat{m} = \hat{p} \cdot \hat{m}$. If $\partial u_1(\hat{x}) / \partial x_2 > \partial u_2(\hat{x}) / \partial x_2$ then good 2 is a Giffen good near (\hat{p}, \hat{m}) for the consumer with utility function u . If, instead, $\partial u_2(\hat{x}) / \partial x_1 > \partial u_1(\hat{x}) / \partial x_1$, good 1 is the Giffen good.*

Proof. Note that $u(x) \geq \bar{u}$ if and only if $u_1(x) \geq \bar{u}$ and $u_2(x) \geq \bar{u}$. It follows that u represents continuous, monotone, convex preferences. The indifference curve for u through \hat{x} has a kink. By the implicit function theorem applied to $u_1(x) = u_2(x)$, if $\partial u_1(\hat{x}) / \partial x_2 \neq \partial u_2(\hat{x}) / \partial x_2$, the locus of kinks extends locally through \hat{x} with slope

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\partial u_1(\hat{x}) / \partial x_1 - \partial u_2(\hat{x}) / \partial x_1}{\partial u_1(\hat{x}) / \partial x_2 - \partial u_2(\hat{x}) / \partial x_2} \quad (1)$$

By the assumptions, the demand $x(p, m)$ is on the kink curve when (p, m) is near (\hat{p}, \hat{m}) . If $\partial u_1(\hat{x}) / \partial x_2 > \partial u_2(\hat{x}) / \partial x_2$, then $c_1 > c_2$ implies $0 > dx_2 / dx_1 > -c_2$. The kink curve is flatter than the indifference curves, as in Figure 1, so good 2 is Giffen. If $\partial u_2(\hat{x}) / \partial x_1 > \partial u_1(\hat{x}) / \partial x_1$, likewise $0 > dx_1 / dx_2 > -1 / c_1$, and good 1 is Giffen. ■

Example 2. In this example, preferences are strictly convex, indifference curves are closed in \mathbb{R}_{++}^2 , and $u_1(0) = u_2(0) = 0$. Specifically, u_1

$(x_1, x_2) = (x_1^{c_1}, x_2)^{1/(1+c_1)}$ and $u_2(x_1, x_2) = (x_1^{c_2} x_2)^{1/(2+2c_2)}$ with $c_1 > c_2 > 0$, so u_1 and u_2 represent the familiar Cobb-Douglas preferences. There is a kink at $\hat{x} = (1, 1)$, where $\partial u_1(\hat{x}) / \partial x_2 = 1/(1+c_1) > \partial u_2(\hat{x}) / \partial x_2 = 1/(2+2c_2)$ if $1+2c_2 > c_1$. Then good 2 is Giffen.

本文において示したように、 $c_1 = 0.8$, $c_2 = 0.5$ のときは財 1 (x_1) がギッフェン財となる。このパラメータの値は、Sørensen [2006] の Example 2 の条件 $1+2c_2 > c_1$ 及び $c_1 > c_2$ を満たしている¹⁷⁾。したがって、このことから Sørensen [2006] の Proposition 1 はそのままでは正しくないことがわかる。

Sørensen [2006] の勘違いは

$$\text{If } \partial u_1(\hat{x}) / \partial x_2 > \partial u_2(\hat{x}) / \partial x_2, \text{ then } c_1 > c_2 \text{ implies } 0 > dx_2 / dx_1 > -c_2.$$

が成立するという証明のミスにある。正しくは、以下に示すように

命題 (A) :

$$\text{If } \partial u_1(\hat{x}) / \partial x_2 > \partial u_2(\hat{x}) / \partial x_2, \text{ then } c_1 > c_2 \text{ implies } -dx_2 / dx_1 > c_1$$

となり、屈折曲線 (kinked curve) の傾きの絶対値が 2 つの無差別曲線の傾きの絶対値よりも大きくなる (図43, 44及び45を参照せよ)。

命題 (A) の証明:

$u_1(\hat{x}) = u_2(\hat{x})$ より,

$$\frac{\partial u_1(\hat{x})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1(\hat{x})}{\partial x_2} dx_2 = \frac{\partial u_2(\hat{x})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2(\hat{x})}{\partial x_2} dx_2 \quad (\text{A. 1})$$

$$\left[\frac{\partial u_1(\hat{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(\hat{x})}{\partial x_2} \right] dx_2 = - \left[\frac{\partial u_1(\hat{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2(\hat{x})}{\partial x_1} \right] dx_1 \quad (\text{A. 2})$$

17) MATHEMATICA では下付きの表示は可能であるが、本文では簡単化のための表示を採用している。

$\partial u_1(\hat{x})/\partial x_2 - \partial u_2(\hat{x})/\partial x_2 \neq 0$ のとき, (A.2) より,

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial u_1(\hat{x})/\partial x_1 - \partial u_2(\hat{x})/\partial x_1}{\partial u_1(\hat{x})/\partial x_2 - \partial u_2(\hat{x})/\partial x_2} \quad (\text{A.3})$$

c_1 及び c_2 の定義と $c_1 > c_2$ を考慮すると,

$$\frac{\partial u_1(\hat{x})}{\partial x_1} = c_1 \frac{\partial u_1(\hat{x})}{\partial x_2} > c_2 \frac{\partial u_1(\hat{x})}{\partial x_2} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial u_2(\hat{x})}{\partial x_1} = c_2 \frac{\partial u_2(\hat{x})}{\partial x_2} < c_1 \frac{\partial u_2(\hat{x})}{\partial x_2} \quad (\text{A.5})$$

(A.4) と (A.5) を (A.3) に代入し, $\partial u_1(\hat{x})/\partial x_2 - \partial u_2(\hat{x})/\partial x_2 > 0$ を考慮すると,

$$-\frac{dx_2}{dx_1} > c_1 > c_2 \quad (\text{A.6})$$

となる。これから, 屈折曲線 (kinked curve) の傾きの絶対値は2つの無差別曲線の傾きの絶対値よりも大きいことがわかる。したがって, 財1 (x_1) はギッフェン財となりうる。

同様に, (A.4) と (A.5) を (A.3) に代入し, $\partial u_2(\hat{x})/\partial x_1 - \partial u_1(\hat{x})/\partial x_1 > 0$ を考慮すると,

$$-\frac{dx_2}{dx_1} < c_2 < c_1 \quad (\text{A.7})$$

となる。これから, 屈折曲線 (kinked curve) の傾きの絶対値は2つの無差別曲線の傾きの絶対値よりも小さいことがわかる。したがって, 財2はギッフェン財となりうる。

したがって, Sørensen [2006] の Proposition 1 は上で証明したように訂正する必要がある。

また, Example 2 のパラメータに即して述べるために, $\hat{x} = (1, 1)$ で評価すると,

$$\frac{\partial u_1(\hat{x})}{\partial x_1} = \frac{c_1}{1+c_1} \tag{A.8}$$

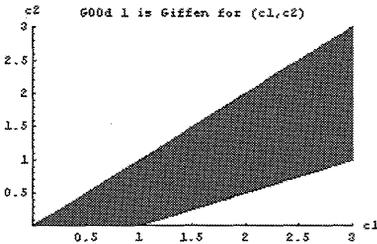
$$\frac{\partial u_2(\hat{x})}{\partial x_1} = \frac{c_2}{2+2c_2} \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial u_1(\hat{x})}{\partial x_2} = \frac{1}{1+c_1} \tag{A.10}$$

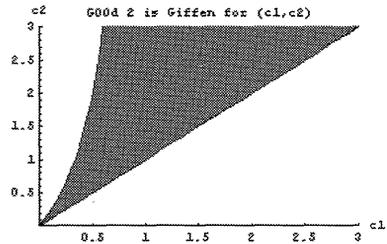
$$\frac{\partial u_2(\hat{x})}{\partial x_2} = \frac{1}{2+2c_2} \tag{A.11}$$

紙幅の関係で詳細を省くが、Example 2 について、次の命題を得る。

- [1] $c_1 > c_2 > 0$ 及び $1+2c_2 > c_1$ のとき、財 1 はギッフェン財となりうる¹⁸⁾。
- [2] $c_2 > c_1 > 0$ 及び $c_2 < 2c_1 + c_1c_2$ のとき、財 2 はギッフェン財となりうる¹⁹⁾。



図A1 財1がギッフェン財となる (c_1, c_2) の領域



図A2 財2がギッフェン財となる (c_1, c_2) の領域

Sørensen [2006] の Example 2 の場合、図A1は財1がギッフェン財となるパラメータ (c_1, c_2) の領域の一部を示している。また、図A2は財2がギッフェン財となるパラメータ (c_1, c_2) の領域の一部を示している。

18) 財1がギッフェン財の場合 ($c_1=0.8, c_2=0.5$) の図44, 45及び46を参照せよ。
 19) 財2がギッフェン財の場合 ($c_1=1/2, c_2=1$) の図47, 48及び49を参照せよ。