J・C・C・マッキンゼイ「ゲームの理論序説」（續）

J. C. C. McKinsey, Introduction to the theory of games.
New York, McGraw-Hill Book Company press, 1952. pp. x＋371

武隈良一

第十章　連續ゲームの基本定理

一、連續ゲームの値

さて二人の競技者に對する連續ゲームの値と最適混合方略を決定する問題へ進もう。利得函數が連續である場合にはつねにこれらが存在することを證明するのである。

連續ゲームに對する利得函數をM、P_1は分布函數Fによつて〔0, 1〕からxを選び、P_2は分布函數Gによつて〔0, 1〕からyを選ぶものとする。與えられたyに對してP_1の期待値は

$$\int_0^1 M(x,y)\, dF(x)$$

となり、これよりyは分布函數Gによつて選ばれるという事實を用いるとP_1の全期待値は

$$\int_0^1\left[\int_0^1 M(x,y)\, dF(x)\right] dG(y)$$

となる。これを簡單のために次のように書く。

$$E(F,G)=\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\, dF(x)\, dG(y)$$

これを、P_1が分布函數Fを用い、P_2が分布函數Gを用いるとき、P_1の期待値はE(F, G)であるという。ゲ

ームは零和なるを以てP_2の期待値は$-E(F,G)$である。

Bray（1919）によればMが連續なるとき、

$$\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\,dG(y)\,dF(x)=$$

$$\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\,dF(x)\,dG(y)$$

なるを以て、Mが連續なるとき$E(F,G)$は

$$E(F,G)=\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\,dG(y)\,dF(x)$$

によつても定義される。若し

$$v_1=\max_{F\epsilon D}\ \min_{G\epsilon D}\ E(F,G)$$

$$v_2=\min_{G\epsilon D}\ \max_{F\epsilon D}\ E(F,G)$$

が共に存在するならば、P_1は最小限v_1を得るように、P_2はv_2以上取られないように、兩者はそれぞれの分布函數を選ぶことが出來る。もしv_1とv_2とが等しいならばP_1は正にv_1を得ることが出來て、P_2が愚かに振舞わない限り、それ以上は望めない。それ故v_1とv_2とが存在して兩者が等しいときの方程式はゲーム理論の見地から甚だ重要である。

この場合にこの相等しい値をP_1に對するゲームの値とよぶ。そして定理一、五に示したように、函數$E(F,G)$の鞍點（F_0, G_0）が存在する。即ちすべての分布函數F、Gに對して．

$$E(F,G_0)\leqq E(F_0,G_0)\leqq E(F_0,G)$$

なる如き一對の分布函數F_0、G_0が存在する。

か丶るF_0又はG_0をP_1又はP_2に對する最適混合方略とよぶ。又ときには最適方略の順序對（F_0, G_0）をゲームの解とよぶことがある。

二、二つの代數學の補題

連續ゲームの基本定理を證明するために二つの代數學の補題を證明している。

補題一〇、一、省略

補題一〇、二、省略

注意一〇、三、この二つの補題は純粋に代數的なるものにも不拘、ゲームに關係した定理（定理二、六）によつて證明されるということは興味深いことである。それ故他方これらの代數的補題を仮定すれば定理二、六を證明することは容易である。

三、基本定理

定理一〇、四、Mが閉單位正方形における二變數の連續函數ならば、

$$\max_{F\epsilon D}\ \min_{G\epsilon D}\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\,dF(x)\,dG(y)$$

と

$$\min_{G\in D}\max_{F\in D}\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\,dF(x)\,dG(y)$$

とは存在して兩者は相等しい。

證明は前章のスティールチェス積分を用いて行われている。

四、解の計算と檢證に對する工夫

連續利得函數をもつ連續ゲームは解をもつことは確言されたが、與えられた利得函數に對して解を計算する方法はまだ示されてはいない。これは一般に困難であり、それを解くためにはスティールチェス積分がすべての分布函數の集合に關して極大化されねばならない。いまのところ問題を取扱う完全な一般な方法は知られておらない。しかし次の二つの章においては解が得られている二つの特別の場合について考えることにする。以下に、與えられた方略がまさに最適であるかどうかを決定するのに役立つ二三の定理を證明している。

定理一〇、七、Mを連續ゲームの連續利得函數とし、vは實數にしてF_0とG_0は[0,1]におけるすべてのxとyに對して

$$\int_0^1 M(x,y)\,dG_0(y)\leqq v\leqq\int_0^1 M(x,y)\,dF_0(x)$$

を滿足する分布函數とすれば、vはゲームの値であり、F_0とG_0はそれぞれ第一及び第二の競技者に對する最適方略である。

この定理の使える例として次のものがある。

例一〇、八、連續ゲームの利得函數を

$$M(x,y)=\frac{1}{1+(x-y)^2}$$

とする。

このゲームの解は

$$v=\frac{4}{5}$$

$$F_0(x)=I_{\frac{1}{2}}(x)$$

$$G_0(y)=\frac{1}{2}I_0(y)+\frac{1}{2}I_1(y)$$

である。

このあと二つの定理を證明した後に、興味深い次の例をあげているが、これは與えられたゲームの解を現實に見出すかなり一般な方法を説明している。この方法は本質的には與えられた形（この場合には階段函數）の解を見出そうと試みるのにある。もしこの方法が解の與えられた形に對して失敗したら、別の形（例えば階段函數において更により多くの階段を仮定することが出來る）の函數を試みることによつて續けることが出來る。

例一〇、一一、連續ゲームの利得函數を

$$M(x,y)=\frac{1}{1+\frac{5}{4}(x-y)^2}$$

とする。

いま二人の競技者に對する最適方略は次の形で求めることが可能であるとする。

$$F_0(x)=I_a(x)$$

$$G_0(x)=\beta I_b(y)+(1-\beta)I_c(y)$$

かく仮定して論を進めることによつて次の解が得られる。

$$F_0(x)=I_{\frac{1}{2}}(x)$$

$$G_0(y)=\beta I_0(x)+(1-\beta)I_1(x)$$

$$v=\frac{16}{21}$$

次の例は連續分布函數の與えられた集合が、與えられたゲームに對する最適方略になつていることを如何に検證することが出來るかを示すものである。

例一〇、一二、

$$M(x,y)=\frac{(1+x)(1+y)}{(1+xy)^2}$$

このゲームの解が

$$v=\frac{1}{\log 2}$$

$$F_0(x)=\frac{\log(1+x)}{\log 2}$$

$$G_0(y)=\frac{\log(1+y)}{\log 2}$$

であることを示そうとするものである。

次の定理は或る場合に視察により連續ゲームの値を見出すことを可能ならしめる。

定理一〇、一三、Mを解を有する連續ゲームの利得函數とし、〔0,1〕におけるすべてのxとyに對して

$$M(x,y)=-M(y,x)$$

なりとする。しかるときゲームの値は0であつて一人の競技者に對するすべての最適方略は他のものにとつてもまた最適方略である。

次の例は例一〇、一一のように與えられた形の最適方略を見出す問題を解いているのではあるが、この場合には階段函數に對するよりむしろ與えられた形の連續分布函數に對してのみ研究をしているのである。

例一〇、一四

$$M(x,y)=\sin 2\pi(x-y)$$

二人の競技者に對する最適方略が次の形

$$F_0(0)=0,\quad F_0(x)=a_1+a_2x\quad(x\neq 0)$$

$$G_0(0)=0,\quad G_0(y)=b_1+b_2y\quad (y\neq 0)$$

を有するものとして解いている。結果は

$$v=0,\ F_0(x)=x,\ G_0(y)=y$$

である。

最後に不連續利得函數を有するゲームに對する解を見出す問題を解いている。この問題を解くのに定理一〇、一〇を用いているが、これは不連續の場合に用いても誤りは起らないのである。そしてこの例では問題を微分方程式の解法に歸着させている。この方法は巧妙なものではあるが不幸にも非常に特殊なゲームにしか應用できない。

例一〇、一五、連續ゲームの利得函數Mが

$$M(x,y)=\begin{cases} x-y+xy, & x<y \\ 0 & x=y \\ x-y-xy, & x>y \end{cases}$$

であるとする。

最初の競技者に對して次の條件を滿足する連續最適方略F_0が可能であるとする。

$F_0(x)=0,\qquad 0\leq x\leq \alpha$

$F_0(x)$は二回微分可能，$\qquad x\neq\alpha$

$\dfrac{d}{dx}F_0(x)\neq 0\qquad x>\alpha$

こゝにαは常數とする。

かく仮定してこの例を解いているが、FとGとが不連續のとき無意味となるのを、Lebesgue-Stieltjes 積分の導入によりこれを意味づけている。

注意一〇、一六、利得函數Mが連續でないゲームΓがある。いま〔0,1〕をそれ自身に一對一にうつす函數ΘとΦが存在するならば

$$M'(x,y)=M(\Theta(x),\ \Phi(y))$$

は連續である。それ故M'が利得函數になっているゲームΓ'は解を有する。しかもΓはΓ'から單に名前のつけかえで得られるから、Γが解を有することになる。これに關する例があげられているがこゝには省く。

後章で役立つ定理を次に掲げておく。

定理一〇、一七、Mを連續ゲームの連續利得函數とする。最初の競技者に對して形I_aの最適方略が存在するとすればゲームの値vは次の形で與えられる。

$$v=\max_{0\leq x\leq 1}\ \min_{0\leq y\leq 1} M(x,y)$$

そして常數aは方程式

$$\min_{0\leq y\leq 1} M(a,y)=v$$

の解として得られる。

歴史的及び文献的註

定理一〇、四の最初の證明は Ville（1938）によつて與えられ、この定理の一般化の證明は Wald（1947）と Karlin（1950）によつて與えられた。

第十一章 分離ゲーム

一、寫像方法

本章においては可成り廣い範圍のゲームとそれの解法について述べる。

二變數の函數Mが分離（separable）である又は多項式似（polynomial-like）であるというのは、m個の連續函數 r_1、r_2、……r_m とn個の連續函數 S_1、S_2……S_n 及び m・n個の常數 a_{11}……a_{mn} が存在して、

$$M(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\,r_i(x)\,S_j(y) \qquad (1)$$

がx及びyに關して恒等的に成立することをいう。但しMの表わし方は一通りという譯ではない。

例えば $M(x,y)=x\sin y+x\cos y+2x^2$ などは直に二つの表わし方が考えられる。

(1)はまた次の形にも書ける。

$$M(x,y)=\sum_{j=1}^{n}t_j(x)\,S_j(y) \qquad (2)$$

こゝに函數 t_j と S_j とは連續である。

二變數の多項式は分離函數の特別の場合である。これが多項式似の言葉の由來である。

利得函數が分離である連續ゲームを分離ゲームという。このとき r_i 及び S_j は閉單位區間において連續函數である。

Mを分離ゲームの利得函數とし、P_1 が混合方略Fを P_2 が混合方略Gを用いるならば、P_1 の期待値 $E(F,G)$ は次の如くになる。

$$E(F,G)=\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\,dF(x)\,dG(y)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\int_0^1 r_i(x)\,dF(x)\int_0^1 S_j(y)\,dG(y) \qquad (3)$$

それ故FとGが二つのベクトル

$$\left(\int_0^1 r_1(x)\,dF(x)\cdots\cdots\cdots\int_0^1 r_m(x)\,dF(x)\right)$$

$$\left(\int_0^1 S_1(x)\,dG(y)\cdots\cdots\cdots\int_0^1 S_n(y)\,dG(y)\right)$$

の成分の値に影響を與える限り、$E(F,G)$ はFとGのみに依存する。

と

$$\left(\int_0^1 r_1(x)\,dF^{(1)}(x)\cdots\cdots\int_0^1 r_m(x)\,dF^{(1)}(x)\right)$$

$$\left(\int_0^1 r_1(x)\,dF^{(2)}(x)\cdots\cdots\int_0^1 r_m(x)\,dF^{(2)}(x)\right)$$

とは$F^{(1)}$と$F^{(2)}$とが等しくなくとも同じベクトルなるを以てすべての分布函數Gに對して

$$E(F^{(1)},G)=E(F^{(2)},G)$$

である。それ故P_1が$F^{(1)}$を用いようと$F^{(2)}$を用いようとそれは重要なことではない。それ故二つの與えられたベクトルが同じのとき方略$F^{(1)}$と$F^{(2)}$とは同値であるという。かくして利得函數(1)を有する分離ゲームにおいては、P_1がm次ユークリッド空間の部分集合Uから點$(u_1^{(1)}\cdots\cdots u_m^{(1)})$を選ぶことが混合方略$F^{(1)}$を選ぶことになる。このUはU空間とよばれ、分布函數Fに對して

$$u_i=\int_0^1 r_i(x)\,dF(x) \qquad (4)$$

なる座標を有するすべての點$(u_1,\cdots\cdots u_m)$から成つている。

$u=(u_1,\cdots\cdots u_m)$とFとが(4)を滿足するときuとFとは對應しているという。（一般にU空間の與えられた點は多くの異なる分布函數に對應している。）

同樣にP_2に對してはW空間を考える。Mの表わし方は(1)及び(2)とあるのでその都度U及びWは變るが、今後は一度定めたらそれに從つて行くことにする。

期待値は二つの分布函數FとGとによつて定まるが、これは又U空間からの點uとW空間からの點wとによつて定まるものであるから

$$E(u,w)=E(F,G)$$

とおける。またuはFとF^1に、wはGとG^1に對應するから

$$E(F^1,G^1)=E(F,G)$$

ともなる。(3)より

$$E(u,w)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\,u_i\,w_j$$

なるを以てEはuとwの座標に關して双一次形式である。

さて函數Fが重さ$a_1\cdots\cdots a_r$を有する函數$F^{(1)}$、$F^{(2)}$、……$F^{(r)}$の凸一次結合であるというのは、

$$(a_1,\cdots\cdots a_r)\in S_r$$

にして、〔0,1〕のすべてのxに對して

$$F(x)=a_1F^{(1)}(x)+a_2F^{(2)}(x)+\cdots\cdots+a_rF^{(r)}(x)$$

が成立することをいう。これを簡單に次のようにかく。

$$F=a_1F^{(1)}+a_2F^{(2)}+\cdots\cdots+a_rF^{(r)}$$

定理一一、一、$F^{(2)}\cdots\cdots F^{(p)}$を分布函數とし、$u^{(1)}\cdots\cdots u^{(p)}$を分離ゲームのU空間の對應點とし、$(a_1,\cdots\cdots a_p)$を$S_p$の一員とするならば、點

$$u=a_1u^{(1)}+\cdots\cdots+a_pu^{(p)}$$

はU空間の點であり、分布函數

$$F=a_1F^{(1)}+\cdots\cdots+a_pF^{(p)}$$

に對應している。W空間についても同様である。

U空間の點をそれらが對應している分布函數の種類によつて分類することができる。U空間の特に重要な部分集合は丁度一つの段階を有する階段函數に對應する點からなるものである。この部分集合をU^*とよび、W空間における同様のものをW^*とよぶ。

證明は簡單であるが、非常に役立つ定理を次に述べておく。

定理一一、二、分離ゲームの利得函數Mが

$$M(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}r_i(x)S_j(y)$$

によつて表わされるものとする。こゝにr_i及びS_jはそれぞれxとyの連續函數である。しかるときこの場合の集合U^*は、〔0,1〕の或るtに對して

$$u_1=r_1(t),\cdots\cdots,u_m=r_m(t)$$

なる如きすべての點$(u_1,\cdots\cdots u_m)$から成立つている。

W^*は同様に

$$w_1=S_1(t)\cdots\cdots w_n=S_n(t)$$

なる如きすべての點$(w_1,w_2,\cdots\cdots,w_n)$から成立つている。

系一一、三、U^*とW^*は有界、閉、連結集合である。

定理一一、四、U空間は曲線U^*の凸包であり、W空間は曲線W^*の凸包である。（それ故、U空間及びW空間は閉有界凸集合である。）

定理一一、五、Mを分離ゲームの利得函數とし

$$M(x,y)=\sum_{i=1}^{n}r_i(x)t_i(y)$$

とすれば、すべての混合方略は（二人ともに）多くともn段階を有する階段函數に同値である。特に各競技者は多くともn段階を有する階段函數なる最適方略を有する。

次に最適方略に對應する點を特徴化しよう。その爲にU空間の點をW空間の點集合に又W空間の點をU空間の點集合に寫像することを次のように定義する。U空間の

點uに對するuの像とは

$$E(u,w)=\min_{y\in W} E(u,y)$$

なる如きW空間の點wの集合をいう。これをW(u)で表わす。同様にW空間の點wに對するwの像とは

$$E(u,w)=\max_{x\in U} E(x,w)$$

なる如きU空間の點uの集合であつてU(w)で表わす。

特に w∈W(u) にして u∈U(w) ならばuはU空間の不動點(fixed-point)といい、wはW空間の不動點という。

定理一一、六、Fを分布函數とし、uがU空間の對應點ならば、uが不動點なるときしかして唯そのときにのみ、FはP_1に對する最適方略となる。またGを分布函數とするならば、W空間の對應點が不動點なるときしかしてこのときに限り、GはP_2に對應する最適方略となる。

定理一一、七、uがUの不動點で、wがWの不動點ならば、u∈U(w), w∈W(u) である。

二、説明の例

以上に證明した定理があれば、分離ゲームの解を見出す問題を解決するにはもう十分である。

(a) 曲線U*及びW*をそれぞれm次元空間、n次元空間において描き、その凸包を作る。これは定理一一、四による。

(b) Uのすべての點uに對して W(u)を見出し、Wのすべての點wに對して U(w)を見出す。(これは一次形式が極小と極大とを仮定しているような或る閉凸集合において、これらの點を見出すことと同値である。)

(c) (b)の結果を用いてUとWの不動點を見出す。

(d) 不動點をそれぞれ點U*とW*の凸一次結合として表わす。定理一一、一を用いて不動點に對應する分布函數を見出す。この分布函數が最適方略である。

以上を次の例について行つている。

例一一、八

$$M(x,y)=\cos 2\pi x\cos 2\pi y+x+y$$

三、不動點

前例では不動點の位置を暗默のうちに認めていたが、つねにそう行くとは限らないので一つ定理を證明しておかなければならない。

定理一一、九、分離ゲームに對しては、U空間の不動點の集合は閉にして凸である。W空間についてもまた同じ。

次に或る特別な形で表わされる分離ゲームの解決に必

要な定理が述べられる。これによると今迄の方法よりもつと容易に解決することが出來る。その特別な形というのは利得函數が次の形で表わされるものである。

$$M(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,r_i(x)\,S_j(y)+\sum_{i=1}^{n}b_i\,r_i(x)+\sum_{j=1}^{n}c_j\,S_j(y)+d \qquad \text{(A)}$$

こゝに次の條件が満足されている。

(i)　函數 $r_1 \cdots\cdots r_n$、$S_1 \cdots\cdots S_n$ は〔0,1〕において連續である。

(ii)　行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

は0ではない。

(A)　の形でどのように表わされていてもつねにこの二つの條件が満足されているときMの標準表示(canonical representation)という。

形式(A)は條件(ii)を附加しない限り(1)より一般的であるということもなければ一般的でないということもない。(1)より(A)が便利であるというのは函數記號 r_i と S_j に常數を割當てることを避けるのにある。

注意一一、一〇、本章の始めにおいて

$$\sum_{j=1}^{n}t_j(x)\,S_j(y)$$

と書けることを述べたが、これは行列式が1である。それ故明らかにすべての分離ゲームは標準形である。

例一一、一一、

$$M(x,y)=xy-xe^y+2x\cos y+2e^x y+3e^x e^y+e^x\cos y+5\cos x\, e^y-3\cos x\cos y$$

この例は標準形になることが示されている。

さて(A)を利得函數の標準表示とするとき、P_1 の期待値は次のように表わされる。

$$E(u,w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,u_i\,w_j+\sum_{i=1}^{n}b_i\,u_i+\sum_{j=1}^{n}c_j\,w_j+d$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,u_i+c_j\right)w_j+\sum_{i=1}^{n}b_i\,u_i+d$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,w_j+b_i\right)u_i+\sum_{j=1}^{n}c_j\,w_j+d$$

行列式の値が0ではないので

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\,u_i+c_1&=0\\ \cdots\cdots&\cdots\cdots\\ \sum_{i=1}^{n}a_{in}\,u_i+c_n&=0\end{aligned}\right\} \qquad \text{(B)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n} a_{1j} w_j + b_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} w_j + b_n = 0\end{array}\right\} \quad \text{(C)}$$

は單一の解を有する。(B)の解を**第一決定點**(first critical point) および(C)の解を**第二決定點**という。勿論決定點が各空間に存在しないことがある。

定理一一、一二、利得函數が(A)で與えられ、$p=(p_1,\ldots\ldots p_m)$、$q=(q_1,\ldots\ldots q_n)$を第一第二決定點とし、p、qがそれぞれU及びWに屬するものとする。しかるときpとqは不動點であり、ゲームの値は

$$u=\sum_{i=1}^{n} b_i p_i + d = \sum_{j=1}^{n} c_j q_j + d$$

で與えられる。

注意一一、一三、Mの標準表示を見つけるとき函數r_iとS_jとを出來るだけ少なくとつておかないと次の定理が無意味になる。

定理一一、一四、(A)によつて利得函數が與えられ、Wの内部I(W)が不動點を含むならば、第一決定點はUに屬し、Uの唯一の不動點である。同樣にI(U)が不動點を有するならば第二決定點はWに屬しWの唯一の不動點

となる。

定理一一、一二の直接の結果として次の系が得られる。

系一一、一五、第一決定點がU空間に屬さなければ、Wのすべての不動點はB(W)(Wの境界)にある。同樣に第二決定點がWに屬さないならば、Uのすべての不動點はB(U)に屬する。

系一一、一六、第一第二決定點p、qが$p \in I(U)$, $q \in I(W)$なるときpはUの唯一の不動點でありqはWの唯一の不動點である。

注意一一、一七、例一一、八については定理一一、一二、定理一一、一四、系一一、一五、系一一、一六において述べられていることが何にも効いておらない。

四、種々の例

例一一、一八、

$$M(x,y)=3\cos7x\ \cos8y+5\cos7x\ \sin8y +2\sin7x\ \cos8y+\sin7x\ \sin8y$$

例一一、一九、

$$M(x,y)=3\cos4x\ \cos5y+5\cos4x\ \sin5y +\sin4x\cos5y+\sin4x\ \sin5y +4\cos4x+\sin4x+\cos5y+2\sin5y+3$$

例一一、二〇、

$$M(x,y)=3(1+\cos 2\pi x)(1+\cos 2\pi y)$$
$$+5(1+\cos 2\pi x)(1+\sin 2\pi y)$$
$$+2(1+\sin 2\pi x)(1+\cos 2\pi y)$$
$$+(1+\sin 2\pi x)(1+\sin 2\pi y)$$

例一一、二二、

$$M(x,y)=5(2+\cos\pi(1+x))(\sin\pi y)$$
$$+2(\sin\pi(1+x))(-2+\cos\pi y)$$
$$+(\sin\pi(1+x))(\sin\pi y)$$

例一一、二三、

$$M(x,y)=3(\cos 2\pi x)(2+\cos 2\pi y)$$
$$+5(\cos 2\pi x)(2+\sin 2\pi y)$$
$$+2(\sin 2\pi x)(2+\cos 2\pi y)$$
$$+(\sin 2\pi x)(2+\sin 2\pi y)$$

五、**分離**ゲームとして解かれる矩形ゲーム

矩形ゲームを分離ゲームに用いられる方法によつて解くことが出來ることを例を以て示している。

この例は3×3の利得行列であるが他の場合も明らかである。

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

六、**分離**ゲームとして解かれる强制ゲーム

矩形ゲームの混合方略が、混合方略を定義する條件に加えて更に若干の一次不等式を滿足しなければならないことがある。これを强制を有するゲーム（game with constraints）という。かゝるゲームはしばしば數理統計學（第十三章を見よ）において起る。それは統計的判定問題を統計學者と自然との間に行われるゲームとして考えるのである。というのは統計學者はしばしば與えられた範圍における自然の過去の行動を十分經驗しているので、事が起る頻度に對して少くとも上界又は下界を定めることが出來るからである。

强制を有するゲームの場合に加わる一次不等式は、U空間とW空間を變えるけれども空間はなお閉有界凸である。勿論利得は不變であり双一次である。それ故分離ゲームの方法が應用できるのである。卽ち不動點を調べることによつてゲームを解くことが出來る。

例えば前節のゲームに次の强制を加えたものを取扱つている。

$$u_1 \geqq \tfrac{1}{3},\quad u_2 \leqq \tfrac{1}{2},\quad w_2 - w_1 + \tfrac{1}{3} \leqq 0$$

歴史的及び文獻的註

本章は Dresher, Karlin, Shapley(1950)とDresher, Karlin (1953) の二論文及び Dresher (1950) からの私信を綜合したものである。

第十二章　凸利得函數を有するゲーム

一、凸函數

分離利得函數を有するゲームの外に、比較的その解を見出しやすいゲームとしては、利得函數が連續で一つの變數に關して凸になつているものがある。本章においてはこの場合について述べることにする。

實變數函數fが區間(a,b)において凸であるというのはS_2のすべての(λ_1, λ_2)と(a,b)の異なる數の各對x_1, x_2に對して

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

が成立することである。特に$\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$に對して等號が成立しないとき嚴密に凸 (strictly convex) であるという。

凸性の概念の幾何學的意義はこゝに省略する。

微分學において知る如く、函數が區間のすべての點において正なる二次微係數を有するならば嚴密に凸である。然しすべての點でなくともよいことは次の例でも分る。

$$f(x) = 2 + (x+4)^2 \quad (x \geqq 0 \text{ のとき})$$
$$f(x) = 2 + (x-4)^2 \quad (x < 0 \text{ のとき})$$

この函數は x=0 において第一次微係數も存在しないので勿論第二次微係數をもたない。然し容易に分るように(−∞, +∞)において嚴密に凸である。

二變數の函數が一つの變數に關して凸であつても他の變數に關して凸であるとは限らない。

n變數の函數fがn次元區間において凸であるというのは、S_2のすべての數(λ_1, λ_2)と區間の相異なる二點$(x_1, \ldots\ldots, x_n)$と$(\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_n)$のすべての各對に對して

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \bar{x}_1, \ldots\ldots, \lambda_1 x_n + \lambda_2 \bar{x}_n) \leqq \lambda_1 f(x_1, \ldots\ldots, x_n) + \lambda_2 f(\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_n)$$

が成立することである。特に$\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$に對して等號が決して成立しないとき、嚴密に凸であるという。

この凸性の概念は各變數ごとの凸性の概念に導くことが出來ない。という意味は各變數に對して凸であつても、すべての變數に對して連立的に凸であるとは限らないということである。

凸に双對な概念として凹 (concave) があるが、これは−fが凸なるとき f は凹であるという。多くの變數に

ついての凹、嚴密に凹も同様に定義される。

補題一二、一、fが閉區間において連續であり嚴密に凸ならば、fが極小値をとるような一點が區間内にまさしく存在する。

二、一人の競技者に對する唯一の方略

利得函數が凸である連續ゲームを、極小ならしめる競技者に對して考えることにしよう。

定理一二、二、Mを連續ゲームの利得函數とし、Mは二つの變數に關して連續、その上$M(x,y)$はすべてのxに對してyに嚴密に凸であるとする。然るとき第二の競技者に對して唯一の最適方略が存在する。それは第一次の階段函數である、卽ち第二の競技者に對して（唯一の）最適方略が階段函數I_cであるようなcが閉區間$[0,1]$に存在する。ゲームの値vは次の公式

$$v=\min_{0\leqq y\leqq 1}\ \max_{0\leqq x\leqq 1} M(x,y)$$

によつて與えられる。常數cは方程式

$$\max_{0\leqq x\leqq 1} M(x,c)=v$$

の唯一の解である。

この定理の證明は省略するが、更に$M(x,y)$が各々のyに對してxに嚴密に凸なるときも同様な定理が得られる。

例一二、四、

$$M(x,y)=\sin\frac{\pi(x+y)}{2}$$

三、他の競技者に對する方略

右の例では最初の競技者に對する最適方略を決定することが出來たが、第二の競技者に對してはできない。以下の二つの定理は兩者に對する最適の方略を決定するのである。これらの定理における記號として$M^{(1)}(x,y)$及び$M^{(2)}(x,y)$は$M(x,y)$のx及びyに關する偏微係數を表わす。

定理一二、五、Mを連續ゲームの利得函數とし、Mは二つの變數に關して連續、$M^{(2)}(x,y)$は單位正方形の各xとyに對して存在し、しかも$M(x,y)$は各xに對してyの嚴密に凸なる函數とす。I_{y_0}を第二競技者に對する唯一の最適方略とし、vをゲームの値とする。もし$y_0=0$又は$y_0=1$ならば、第一の競技者に對して最適方略I_{x_0}が存在する。常數x_0は次の條件を滿足する數として得られる。

$$0\leqq x_0\leqq 1,\quad M(x_0,y_0)=v$$

$$M^{(2)}(x,y)\begin{cases}\geqq 0 & y_0=0\text{ のとき}\\ \leqq 0 & y_0=1\text{ のとき}\end{cases}$$

もし又 $0<y_0<1$ ならば第一の競技者に對して最適の方略が存在してその形は

$$\alpha I_{x_1}(x)+(1-\alpha)I_{x_2}(x)$$

となる。常數 α、x_1、x_2 は次の條件を滿足する數として得られる。

$$0\leqq x_1\leqq 1,\quad 0\leqq x_2\leqq 1,\quad 0\leqq \alpha\leqq 1$$

$$M(x_1, y_0)=v \qquad M(x_2, y_0)=v$$

$$M^{(2)}(x_1, y_0)\geqq 0 \qquad M^{(2)}(x_2, y_0)\leqq 0$$

$$\alpha M^{(2)}(x_1, y_0)+(1-\alpha)M^{(2)}(x_2, y_0)=0$$

この定理の證明は省略するが、更に $M^{(1)}(x,y)$ が存在し、しかも $M(x,y)$ が各 y に對して x の嚴密に凹なる函數なるときも同樣の定理が得られる。

四、注意と例

注意一二、七、いまの二つの定理において存在を確言された最適方略は必ずしも一意的でないことは注意さるべきである。その例として

$$M(x,y)=(y+\tfrac{1}{2})^2$$

がある。

注意一二、八、定理一二、六を用いると例一二、四における第二の競技者の最適方略が容易に見出される。

例一二、九、

$$M(x,y)=16y^6-3xy+x^2$$

注意一二、一〇、凸函數に關する以上の定理は弱い特殊の形において述べているが、これらは種々の方法で強化したり一般化することが出來るのである。

歴史的及び文獻的註

本章において證明した定理は Bohnenblust, Karlin, Shapley (1950) によつて得られた一般の定理の特別の場合である。

第十三章　統計的推理への應用

第一章に於て指摘した如く、人が何物かを極大化することに關心をもつとき、それは二つの態度に別けられる。一つは自然の威力の前にただ頭を垂れるだけで滿足するという態度、他は或理性的存在——それは第一の人が大きくしたいと思う量をなるべく小さくしようと願つてる人——の行動を考慮のうちに入れておくという態度である。かかる立場の二つ型はゲームとみなすことが出來る。最初の型は一人ゲームであり、第二の型はn人ゲームである。既に指摘した如く、自然は零和二人ゲーム

に於て見らるるような、我々を出し拔こうと試みたり我々に直接的な敵對觀念をもつている等とは考えられない。それ故非零和一人ゲーム（零和一人ゲームはつまらない）は古典的な意味に於て純粹の極大問題とみなし得る。その場合他の理性的動物の手段を計算に入れる問題は起らない。

上の二つの態度の著るしい相違にも拘わらず、自然に對して行われる非零和ゲームの場合に於ては、最惡の自然が競技者に爲し得る事柄を決定することに競技者が關心を持つことがあり得る。即ち自然が全く不利な出方であらわれてきたとしても、競技者自身を保證する極小のものを計算しておきたいと願うのである。

このような立場は特に統計學との關連に於ておこる。というのは統計學者は次のような問題にしばしば遭遇するからである。與えられた價格に對する量の決定の精密さを極大化すること、又は與えられた精密さに對して或物を決定することの價格を極小化すること、又は產出高をテストする適當な方法（品質管理）を工夫することによつて製造者の利益を極大にすることなどがそれである。ゲーム理論の統計學に對する關係は最近非常に緊密になつており、數理統計學者はこの題目に非常な注目を拂つている。この關連に於て得られている一般の定理をこゝに述べようとは思わないが、ゲーム理論を統計の問題に應用する若干の特殊の例に就て研究しておこう。

取扱う例は餘り簡單で計算機械を用いる程でないのは一寸つまらないが、それは統計理論の豫備知識を仮定しなかつたり行列を餘り使わないようにしたからである。然し簡單な問題に於ける原理と同じものでもつと現實的な問題を考えることも出來るのである。統計學者に立向つてくる最も普通な問題の一つは、標本の檢査という基盤の下に、物の大きな集まりに就て或る推測をなすことである。統計學者は標本の大いさを增すことによつて彼の推測の信頼性を高めることが出來る。然し大きなテストをすれば莫大な費用がかさむ。それ故統計學者にとつて檢査に最善を期すには如何なる大きさがよいかが問題になる。次の問題はかゝる問題を非常に簡單化しかつ理想化したモデルである。

例一三、一、或壺に2球が入つている。その各々は黑か又は白である。今統計學者Sがいくつ黑が入つているかをあてようとする。もし正しくあてたならばαを貰うことが出來る。もし答が1だけ違つたら（即ち2あるのに1と答えたり、1あるのに2と答える）βを貰う。も

し答が2だけ違つたらγを貰う。ここに$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$と仮定するが、この三つの正負については仮定しない。球を一つテストすることとSはにとつてδの價があるものとする。

然るときSには次の8個の可能な方法（8個の純粋方略）がある。

Ⅰ　テストしないで二つとも黒という

Ⅱ　テストしないで一つは黒、一つは白という

Ⅲ　テストしないで二つとも白という

Ⅳ　一つを調べて、他はそれと同色という

Ⅴ　一つを調べるだけで、他はそれにかまわず黒という

Ⅵ　一つを調べるだけで、他はそれにかまわず白という

Ⅶ　一つを調べて、他はそれと異色という

Ⅷ　二つを調べて、黒球の正しい數をいう

自然の状態としては二つが黒でないか、一つが黒か、二つが黒かである。この方略を0、1、2で表わす。Sが1を用い、自然が0を用いると、Sは2だけ違うので利得はγとなる。

SがⅤを用い自然が1を用いると、テストされる球が白又は黒である確率はともに$\frac{1}{2}$である。そこで黒のときは二つとも黒ということになるので1だけ違つたことになり、テストした分を支拂うと$\beta-\delta$となる。一方白のときは、あてたことになり$\alpha-\delta$となる。故にSの期待値は

$$\frac{1}{2}(\beta-\delta)+\frac{1}{2}(\alpha-\delta)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\delta$$

となる。

このように考えると次の表が得られる。

行列 1

	0	1	2
Ⅰ	γ	β	α
Ⅱ	β	α	β
Ⅲ	α	β	γ
Ⅳ	$\alpha-\delta$	$\beta-\delta$	$\alpha-\delta$
Ⅴ	$\beta-\delta$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\delta$	$\alpha-\delta$
Ⅵ	$\alpha-\delta$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\delta$	$\beta-\delta$
Ⅶ	$\beta-\delta$	$\alpha-\delta$	$\beta-\delta$
Ⅷ	$\alpha-2\delta$	$\alpha-2\delta$	$\alpha-2\delta$

このゲームのSに對する値と最適方略はα、β、γ、 δの相對的な値によつてきまる。實際にその値が與えられた場合については以下に述べられている。δの値が非常に小さいか、又は非常に大きいか又は中間な値の三つの場合に分けられている。第一の場合にはⅧがよく、第二は純粋方略、第三は混合方略をSがとればよい。

次の例はゲーム理論を品質管理へ應用するものである。

例一三、四、或非常に高價な品物が製造されるとする。それは似たような三つの關連した部分からなつており、品物は三つの部分の各々が満足の狀態にあるとき満足なものであるとする。例えば三つの幅を有する車輪に於ては各々の幅が適當な張力を有するとき車輪は満足な製品であるとする。

この車輪の消費者Aは製造者Mと次の契約を行う。一定の規格にあてはまる車輪を製造したならば一定の代價を先ず支拂う。受取つた後にAに於てテストしてみて三つの幅とも完全ならば更に追加としてAはMにαを支拂う。もし一つでも不完全ならばβだけ逆にMから辨償してもらう。但しMはAに渡す前にテストすれば一つの幅についてγの費用を要するものとする。このときMには四つの行動（純粋方略）が可能である。

Ⅰ　テストしないで車輪をわたす。

Ⅱ　三つの幅の一つを勝手に（at random）選んでそれをテストする。もしこの幅が完全ならば車輪をわたし、不完全ならばすてる。

Ⅲ　幅の一つを勝手に選んでテストし、これが不完全ならばすてる。これが完全ならば殘りの二つの幅の一つを勝手に選んでテストする。これが不完全ならばすて、完全ならばわたす。

Ⅳ　幅の一つを勝手に選ぶ、これが不完全ならばすてる。これが完全ならば殘りの二つの幅の一つを勝手に選んでテストする。これが不完全ならばすてる。完全ならば第三の幅をテストしてすてるかわたす。

次に自然にとつて四つの可能性がある。幅の0、1、2、3個が不完全である場合である。この方略を0、1、2、3、で表わそう。

そこで二組の方略の組合せを考える。

先ずMがⅠをとり自然が0をとると，Mはテストはしないが幅は完全なのでAはMにαを支拂う。依てこの場合にMの利得はαである。

次にMがⅡをとり自然が0をとると、Mは一度テスト

を行うがAは満足するので、テストに要する費用γを差引くと、Mの利得は $\alpha-\gamma$ となる。

同様にMがIIIをとり自然が0をとるとMの利得は $\alpha-2\gamma$ となる。

MがIVをとり自然が0をとるとMの利得は $\alpha-3\gamma$ となる。

MがIをとり自然が1をとると、Aは不完全を見出すのでMはAにβだけ辨償しなければならぬ。即ちMの利得は $-\beta$ である。

MがIをとり、自然が2又は3のときは、同様にMの利得は $-\beta$ である。

もし自然が3をとればすべての輻は不完全なので、Mがテストをするとせば最初のテストで不完全を見出すので、車輪をすてることが出來る。それ故Mの損失は一回のテストの分だけであり、利得は $-\gamma$ となる。このことは自然が3をとり、MがII、III、IVの一つをとるときつねに成立する。

MがIIをとり自然が1をとると、Mが不完全な輻を見出す確率は$\frac{1}{3}$であり、見出さぬ確率は$\frac{2}{3}$である。見出せば利得は $-\gamma$ であり、見出さねば更にβを辨償するので利得は $-\beta-\gamma$ である。故にMの利得は

$$\frac{1}{3}(-\gamma)+\frac{2}{3}(-\beta-\gamma)=-\frac{2}{3}\beta-\gamma$$

である。

同様にMがIIをとり自然が2をとればMの利得は

$$\frac{2}{3}(-\gamma)+\frac{1}{3}(-\beta-\gamma)=-\frac{1}{3}\beta-\gamma$$

である。

MがIIIをとり自然が1をとれば、Mが最初のテストに不完全を見出す確率は$\frac{1}{3}$であり、第二回のテストで見出す確率は $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ である。故に不完全な輻が見逃がされる確率は $1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$ である。最初に見出されればMの利得は $-\gamma$ であり、第二回に見出されれば利得は -2γ である。見出されないときは利得は $-\beta-2\gamma$ となる。故にMの利得は

$$\frac{1}{3}(-\gamma)+\frac{1}{3}(-2\gamma)+\frac{1}{3}(-\beta-2\gamma)=-\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}\gamma$$

となる。

これを續けて次の行列が得られる。

	0	1	2	3
I	α	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$
II	$\alpha-\gamma$	$-\frac{2}{3}\beta-\gamma$	$-\frac{1}{3}\beta-\gamma$	$-\gamma$
III	$\alpha-2\gamma$	$-\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}\gamma$	$-\frac{4}{3}\gamma$	$-\gamma$
IV	$\alpha-3\gamma$	-2γ	$-\frac{4}{3}\gamma$	$-\gamma$

このゲームの値と最適方略はα、β、γの値によつて定まる。その實例が種々の數値に對して説明されている。

歴史的及び文献的註

ゲーム理論を統計學へ應用する文献としてはWald (1945), (1947), (1949), (1950), Arrow, Blackwell, Girshick (1949), Dvoretzky, Wald, Wolfowitz (1950) のものがある。

第十四章　線型計畫法

本章に於ては線型計畫法 (linear programming) と呼ばれる特殊の極小化・極大化問題を取扱う。これは經濟理論から起つたものであり、ゲーム理論と非常に密接な關連を有するものである。先ず例を以て説明しよう。

人が健康を保持するために毎日二つのビタミンB_1、B_2をそれぞれb_1及びb_2單位を必要とすると假定する。しかしそれらは純粋な形では得られないので藥品C_1及びC_2からとることにする。C_1は一オンスp仙でありその中にB_1をa_{11}單位、B_2をa_{12}單位含み、C_2は一オンスp_2仙であり、その中にB_1をa_{21}單位、B_2をa_{22}單位含む。いまB_1及びB_2を最小費用で最小限度にとるためにはC_1及びCを如何程購入したらよいか。

C_1をx_1オンス、C_2をx_2オンス購入すればその價格は$p_1x_1 + p_2x_2$となり、B_1及びB_2の量はそれぞれ、$a_{11}x_1 + a_{21}x_2$, $a_{12}x_1 + a_{22}x_2$となる。それ故

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \geqq b_1, \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geqq b_2$$

を満足するx_1及びx_2を非負にとり

$$p_1x_1 + p_2x_2$$

を出來るだけ最小にすればよい。

この問題は解析幾何の力で容易に解くことが出來る。實際に數値を入れた例が示されている。

この種の極値問題に對しては微積分は無力である。という譯は極値に於ては導函數が0にならないからである。

しかし解析幾何學的方法も變數が多くなると非常に複雜困難になつてくる。例えば右の例で六つの藥品となれば六次元の空間を考えなければならない。といつてその困難をほつておく譯にはいかない。この種の問題は非常に重要なので (例えば一定の荷物を最小費用、又は最小時間内に輸送するとき、貨物車に經路を指示してやる問題に關連して起つた)、これを取扱う一般の方法が必要になつてきたのである。

かくして線形計畫法とよばれる數學の特殊分野が誕生したのである。線形計畫法の問題とは、變數が一次不等式の下に制限されている條件の下に、一次函數で表わされる値を極小又は極大ならしめるものを意味する。即ち一般に次のように述べられる。

$$a_{11}y_1+\cdots\cdots+a_{1n}y_n \geqq b_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}y_1+\cdots\cdots+a_{mn}y_n \geqq b_m$$

を滿足する $(y_1,\cdots\cdots,y_n)$ で一次函數

$$p_1y_1+\cdots\cdots+p_ny_n$$

を極小又は極大ならしめるものを求めよ。

こゝでは線形計畫法の一般論を述べようとは思わないが、ゲーム理論との關連について説明しておこう。後に分る如く、矩形ゲームは特殊線形計畫法問題とみられ、逆に多くの線形計畫法問題はゲーム理論の問題に歸着することが出來る。

先ず線形計畫法問題の解の存在について注意しておこう。不等式が矛盾している場合には解が存在しないことは當然であるが不等式が矛盾していない場合にも解が存在しないことはあり得る。それは一次函數の値が不等式の示す範圍に入らない場合である。こうした場合を省けば一つ以上の解が存在する。さらに解の凸一次結合はまた解となるので、一つ以上の解があれば無限の解が存在することになる。

なお一見した處線形計畫法の問題でないものでも、これに歸着するものがある。即ち

$$a_{11}y_1+a_{12}y_2=b_1$$
$$a_{21}y_1+a_{22}y_2=b_2$$

の下に $p_1y_1+p_2y_2+p_3y$

を極小化する問題は不等式

$$a_{11}y_1+a_{12}y_2 \geqq b_1$$
$$-a_{11}y_1-a_{12}y_2 \geqq -b_1$$
$$a_{21}y_1+a_{22}y_2 \geqq b_2$$
$$-a_{21}y_1-a_{22}y_2 \geqq -b_2$$

の下に $p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3$

を極小化する問題と等値である。

さて矩形ゲームが線形計畫法の問題に歸着することを示そう。

いまゲームの行列が

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

でゲームの値がvなるものを考えよう。

値vはS_2の元（y_1, y_2）に對して次の不等式

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \geqq z \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \geqq z \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \geqq z \end{array}\right\} \quad (1)$$

を満足する最小のzである。そして定理二、一〇によればzがvにおきかえられてy_1とy_2が(1)を満足するときそしてそのときに限り、方略(y_1, y_2)はP_1に對して最適となる。次に容易に分ることであるが

$$\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + z_1 = z \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + z_2 = z \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + z_3 = z \end{array}$$

を満足する非負z_1、z_2、z_3が存在しそしてこのときに限り(1)を満足するy_1、y_2、zが存在する。この三つの等式は

$$\begin{array}{l} z = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + z_1 \\ (a_{21} - a_{11})y_1 + (a_{22} - a_{12})y_2 + z_2 - z_1 = 0 \\ (a_{31} - a_{11})y_1 + (a_{32} - a_{12})y_2 + z_3 - z_1 = 0 \end{array}$$

と變化されるので

$$\left.\begin{array}{l} z = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + z_1 \\ (a_{21} - a_{11})y_1 + (a_{22} - a_{12})y_2 + z_2 - z_1 = 0 \\ (a_{31} - a_{11})y_1 + (a_{32} - a_{12})y_2 + z_3 - z_1 = 0 \\ y_1 + y_2 = 1, \quad y_1 \geqq 0, \quad y_2 \geqq 0 \\ z_1 \geqq 0, \quad z_2 \geqq 0, \quad z_3 \geqq 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

なる體系を考えると、或るy_1 y_2 z_1 z_2 z_3に對して(2)が満足される最小のzがvである。更にzがvでおきかえられたときy_1 y_2 z_1 z_2 z_3が(2)を満足しそしてそのときに限り、方略(y_1, y_2)がP_2に對する最適方略となる。かくしてゲームの値とP_2に對する最適方略を見出す問題が線形計畫法として(2)を解く問題に歸着する。

一般に矩形ゲームを解くことは次の特殊の形の

$$\left.\begin{array}{l} z = p_1 u_1 + \cdots\cdots + p_n u_n \\ a_{11}u_1 + \cdots\cdots + a_{1n}u_n \geqq b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}u_1 + \cdots\cdots + a_{mn}u_n \geqq b_m \\ u_1 \geqq 0 \cdots\cdots u_n \geqq 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

線形計畫法に歸着する。逆にこの形の線形計畫法の問題

は矩形ゲームの問題に等値である。證明は省略するが、(3)で與えられたzを極小にする問題は次の行列で表わされるゲームとなる。

$$
B=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{m1} & -p_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{1n} & \cdots & a_{mn} & -p_n \\
-a_{11} & \cdots & -a_{1n} & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
-a_{m1} & \cdots & -a_{mn} & 0 & \cdots & 0 & b_m \\
p_1 & \cdots & p_n & -b_1 & \cdots & -b_m & 0
\end{pmatrix}
$$

歴史的及び文献的註

ゲーム理論と線形計畫法問題の等値なことの證明は Dantzig (1951) と Gale, Kuhn, Tucker (1951) による。なお他の結果に就ては Dantzig (1951) (1949) と Dantzig, Wood (1949) の論文を見られたい。

第十五章　零和n人ゲーム

一、特性函數

二人以上のゲームに於ては不幸にして、二人ゲームの場合において直視的に取入れられる如何なる理論といえども役立たないのである。ノイマンとモルゲンシュテルンの書物の大部分は二人以上のゲームに費されているが、數學者からみるとそこに展開されている理論には不滿足なものが見受けられる。最近數年間はゲーム理論のこの分野は殆んど開拓されておらない。

かくn(2以上)人ゲームの理論は一應滿足な狀態にはないが、現在の形においてその理論に慣れておくことは重要なことである。というのは將來改良されるとしても現在の理論には確にいくらかの堅實さがあるからである。本章においてはノイマンとモルゲルシュテルンによる理論を紹介する。

先ず有限n人ゲームに於ては、競技者による段階、偶然の段階、それに類したものの外に部分的な情報があることを注意しておく。

さて今後矩形零和人ゲームに就てのみ述べることとする。このゲームにはn個の段階があり第i番目$(i=1, 2, \ldots\ldots n)$の段階に於て競技者P_iは、それ以前の段階の結果に就ては何にも知らされることなく、有限集合C_iから數x_iを選ぶものとする。n段階が完全に終つた後に競技者P_iは $M_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ を受取るものとする。ゲ

ームは零和なるを以て

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0$$

である。

利得函數によつて與えられる値の性質について二三の注意をしておこう。その値は各競技者にとつて良いか悪いかの判定がつくものとする。例えば +2 が -1, 0, +1 よりも良いとする。またゲームを工合よく運ぶために、その値は物質的（objective）であり可動的（transferable）であるとしよう。例えば +2は「2弗を得る」というようにして、「味覺の滿足の2單位をうける」などとはしないことにする。

n人ゲームの理論は、競技者の如何なる組合せ（即ち連合 coalition）があるか、又この種々の連合に加入する動機としてお互に作つた支拂を競技者がどれだけ期待できるかという問題に多く關連している。

競技者を單に1、2……nで表わし、その集合をN＝{1, 2, ……n} で表わす。

いまN人が二つの連合Tと N－T＝－T に別れたとすると、各連合に於ては互に共力するので、これは「Tと－Tとの二人ゲームになる。この場合は簡單であり、Tの側のマックスミニ v(T) をゲームの特性函數（characteristic function）という。この特性函數の性質として次の定理が成立する。

定理一五、一、

（i） $v(N)=0$

（ii） $v(-T)=-v(T)$

（iii） RとTとが互に排反的な部分集合のとき

$$v(R \cup T) \geqq v(R)+v(T)$$

逆にこの條件を滿足するvは特性函數なることが示される。即ち

定理一五、三、Nをn人を含む有限集合とし、vはNのすべての部分集合Tの上に定義される實數値函數とし、一五、一、の三條件を滿足するものとする。然るときvが特性函數になるようなn人零和ゲームが存在する。

二、誘導形

既に述べたように問題の焦點は、種々の連合を作る競技者の傾向の力と、連合に加わる動機として組んだ競技者間に如何なる片側支拂（side-payment）がなされるかの二つである。それ故利得函數と特性函數が異なつていても、この二點に於て二つのゲームが異ならなければ、そ

の關係に名稱を與えることは自然であり、このとき二つのゲームは**方略的同値**(strategic equivalence)であると名付ける。

方略的同値という概念は勿論正確な數學的內容をもたない直觀概念である。というのは「連合を作る傾向」というそれ自身數學的に定義されない概念に基いているからである。しかしその概念は我々の目的にとつて非常に重要であり、ゲーム理論の基礎的仕事の一つはそれに對する正確な數學的定義を見出すことであるのは明らかである。ある條件が方略的同値に對する十分條件になることを示す直觀的命題を與えることは可能であり、それを以下に示そう。

二つの矩形n人零和ゲームΓとΓ'があつて、兩方のゲームに於て競技者i(i=1,2,……,n)は集合C_iから選擇を行う。ΓとΓ'に於ける利得函數をそれぞれ$M_1,\ldots\ldots,M_n$及び$M'_1,\ldots\ldots,M'_n$とする。更にi=1,……n と、$C_1,\ldots\ldots,C_n$のカルテシアン積の元$(x_1,\ldots\ldots,x_n)$とに對して

$$M'_i(x_1,\ldots\ldots,x_n)=k\cdot M_i(x_1,\ldots\ldots,x_n) \quad (1)$$

なるものとする。然るときΓとΓ'とは方略的同値であることは直觀的に明らかである。この(1)が一つの十分條件である。

他の十分條件は(1)を次のように置換することによつて得られる。

$$M'_i(x_1,\ldots\ldots,x_n)=M_i(x_1,\ldots\ldots,x_n)+a_i \quad (2)$$

と $a_1+\ldots\ldots+a_n=0$

を滿足するn個の數$a_1,\ldots\ldots,a_n$が存在する。

これも十分條件である。というのは競技者iはΓに於てたゞa_i丈よけいに貰うという違いはあるが、これは勝負の經過には無關係であり、勝負の終りに$a_1,\ldots\ldots,a_n$が支拂われる代りに勝負の始めに支拂われるならばΓ'の方略性格は不變である。

これらを一般化して次の**S同値**(S-equivalent)の定義が得られる。

定義一五、五、ΓとΓ'とを二つのn人零和ゲームとし選擇集合をそれぞれ$C_1,\ldots\ldots,C_n$及び$C'_1,\ldots\ldots C'_n$また利得函數をそれぞれ$M_1,\ldots\ldots,M_n$及び$M'_1,\ldots\ldots,M'_n$とする。しかるとき次の三條件を滿足する函數$f_1,\ldots\ldots f_n$實數$a_1,\ldots\ldots,a_n$及び實數kが存在するならば

(i) $\sum_{i=1}^{n} a_i=0$

(ii) C_iはC'_iの上に一對一にうつされる

(iii) $M_i(x_1, \ldots\ldots x_n)$

$$=kM'_i\left[f_1(x_1),\ldots\ldots,f_n(x)\right]+a_i$$

このときΓとΓ'とはS同値であるという。

定理一五、六、S同値の關係は反射的、對稱的、推移的である。

この定理により類に分けることが出來る。

定理一五、七、ΓとΓ'とがS同値なるとき、v及びv'を特性函數とすれば

$$v(T)=k\cdot v'(T)+\sum_{i \in T} a_i$$

である。

この方程式が滿足されるときvとv'とはS同値であるという。

定理一五、八、特性函數vを有するn人ゲームは

$$v(\{1\})=v(\{2\})=\ldots\ldots=v(\{n\})=\gamma$$

なるとき誘導形(reduced form)という。但しγは0又は-1である。またこの方程式が成立するとき特性函數vは法γを有する誘導形という。

定理一五、九、vが法γを有する誘導形における特性函數にして、Tがp個の元を含むNの部分集合ならば

$$p\gamma \leqq v(T) \leqq (p-n)\gamma$$

である。

系一五、一〇、法0を有する誘導形のときは$v(T)=0$である。

定理一五、一二、すべての特性函數は誘導形における一つのしかして唯一つの特性函數にS同値である。

注意一五、一三、定理一五、一一と一五、七とによつて誘導形におけるゲームだけを考えればよいことになる。系一五、一〇によれば0を法とするものは-1を法とするものと著るしく異なつている。實際法が0ならば、競技者の各集合は利得0を得る。それ故かゝるゲームに於ては連合は起らないから問題にならない。それ故法が-1のもの丈を考えるとよい。かゝるゲームを本質的(essential)とよび、法0のものを非本質的(inessential)という。ゲームが誘導形でない場合にも、この言葉は用いられる。

nが3のとき誘導形における本質的ゲームは一つしかない。

$$v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=-1$$

とすれば、定理一五、一の(ii)により

$$v(\{2,3\})=v(\{1,3\})=v(\{1,2\})=+1$$

となる。それ故v(T)の値はすべてのTに對して決定するので、誘導形における本質的3人ゲームとよぶことが出來る。

nが3より大ならば誘導形における無限に多くの本質的ゲームが存在する。nが4の場合の例があるがここには省く。

例一五、一六、奇數の人アウト (odd man out) という三人ゲームがある。三人とも密かに紙片に表又は裏と書く。審判者がそれを集めて同時に開いてみる。全部が表又は裏とあれば無勝負、一人丈が表（又は裏）で他の二人が裏（又は表）ならば表を出した人が他の二人に一弗ずつ支拂うことにする。

いま表を1、裏を2であらわし、三人の利得函數をM_1、M_2、M_3とすれば、

$$M_1(1,1,1)=M_1(2,2,2)=0$$

$$M_1(1,1,2)=M_1(2,2,1)$$

$$=M_1(1,2,1)=M_1(2,1,2)=1$$

$$M_1(1,2,2)=M_1(2,1,1)=-2$$

となる。M_2とM_3についても同様である。

いま競技者2と3が連合して1に對抗したとする。競技者1は勿論二つの方略がある即ち1を出すか2を出すかの。連合{2,3}は四つの方略がある即ち(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)のいずれかである。そこで決戰は次の行列の下に行われることになる。

	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
1	0	1	1	−2
2	−2	1	1	0

この表によれば連合{2,3}は最適方略として、(1,2)(2,1)をとることはない。この行列を解くことによつて競技者1に對するゲームの値は-1である。即ち

$$v(\{1\})=-1 \quad \therefore \quad v(\{2,3\})=1$$

となる。同様にして

$$v(\{2\})=v(\{3\})=-1$$

$$v(\{1,3\})=v(\{1,2\})=1$$

その上三人ゲームに於てはつねに

$$v(\Lambda)=v(\{1,2,3\})=0$$

なるを以て、このゲームの特性函數が完全に決定できる。この場合特性函數は誘導形に於けるものである。

歴史的及び文献的註

本章に述べたことは von Neumann と Morgenstern の書物にある。S同値の完全な研究は Mc Kinsey(1950)の論文に見出される。

第十六章　n人ゲームの解

一、歸屬

旣に述べたように我々の關心は、n人ゲームにおいて如何なる連合が作られやすい傾向にあるか、また（片側支拂がすまされた後に）各競技者が如何程支拂われるか、という問題にある。各競技者への支拂をベクトル$(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$で表わす。然るときゲームは零和なるを以て$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$である。さらに各々のiに對して$x_i \geqq v(\{i\})$でなかつたならば解は存在しない。というのは各人は人と協力しないとき最小限度$v(\{i\})$を得るが、自分の利得がこれ以下になると分れば他と協力してこれ以上にしたいと企策するからである。ベクトルを考えるときつねにこの二條件が成立しているものとする。

定義一六、一、特性函數vを有するn人ゲームの歸屬(imputation)とは

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$x_i \geqq v(\{i\}) \quad \cdots\cdots(2)$$

を満足するベクトル$(x_1, \ldots\ldots, x_n)$をいう。

注意一六、二、この定義の第二の條件は次のように强化できる。即ち

TがNの或部分集合ならば

$$\sum_{i \in T} x_i \geqq v(T)$$

なりと。然しこの强化條件は前の弱い條件よりも直觀的見地からは明瞭ではない。というのは連合すれば確かに右の式は成立するが、喜んで互に加入しているかどうかが明瞭ではないからである。

注意一六、三、歸屬の集合はn次元ユークリッド空間の凸部分集合をなす。それ故ゲームに二つの異なる歸屬があれば、無限に多くあることになる。非本質的ゲームは唯一の歸屬$(v(\{1\}), \ldots\ldots v(\{n\}))$を有するし、一方本質的ゲームは無限に多くの歸屬を有する。

定義一六、四、特性函數がvなるゲームの歸屬を$(y_1, \ldots\ldots y_n)$と$(x_1, \ldots\ldots x_n)$とし、Tを競技者の部分集合とする。そのとき$(y_1, \ldots\ldots y_n)$がTに關して$(x_1, \ldots\ldots x_n)$より優位である(dominates)というのは次の條件が滿足するときである。

（i） $T \neq \Lambda$

（ii） $v(T) \geqq \sum_{i \in T} y_i$

（iii） $y_i > x_i$ （Tのすべてのiに對して）

そしてこれを次の記號で表わす。

$$(y_1,\cdots\cdots y_n) \underset{T}{>} (x_1,\cdots\cdots x_n)$$

またかかる集合Tが存在するときは單に優位であるといつて

$$(y_1,\cdots\cdots y_n) > (x_1,\cdots\cdots x_n)$$

と表わす。

注意一六、五、優位關係の性質を調べてみると一六、四の(i)により空集合に關して一つの歸屬が他の歸屬より優位であるということはない。さらに一六、一の(ii)と一六、四とから一つの元よりなる集合に關して或歸屬が他の歸屬より優位であることはできない。すべての競技者の集合に關しても同樣である。それ故Tは最小限2であり、多くとも $n-1$ である。

一六、四の(iii)によりいかなる歸屬もそれ自身より優位ではあり得ない。またTを固定したとき優位關係は推移的である。それ故優位關係は準順序である。但し完全順序ではない。

優位關係を一般に考えたとき、即ち固定した集合Tに關してのみ考えるということをしないとき、事態は非常に複雜になる。その場合それ自身より優位になることはないが、推移的でなくなる。

二、解の定義

さてゲームの實際の勝負から如何なる歸屬が生ずるかを問題としよう。歸屬 $\alpha=(a_1,\cdots\cdots,a_n)$ はαより優位である歸屬βが存在しないとき實際の勝負に於て實現される。そしてαが最初から分れば誰しもこれに從うのであるが、不幸にしてこれは分らない。しかも如何なる歸屬も他の歸屬によつて優位されてしまうことが容易に示されるので歸屬を見出す問題は厄介になる。

かくして問題は袋小路に入り我々はただ惑うばかりになる。それ故こゝでは話を戻して、誘導形における本質的三人ゲームを考えることにしよう。この場合には三つの可能性しかない。即ち二人が連合するとしてもそれは三通りしかない。競技者1と2とが連合するとき、それには尤もな理由があるのであり、+1の利得が可能であるからである。このとき競技者3は-1の利得になる。さらにゲームが完全に對稱のとき(即ち競技者1と2が一方だけよけいに有利ということはない)には、獲物を等しく分けあう。それ故1と2とが協力したとき歸屬は$(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -1)$となる。2と3及び1と3が連合したときも同樣である。それ故三つの歸屬の集合が得られる。

$$A=\{(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-1),\ (\tfrac{1}{2},-1,\tfrac{1}{2}),\ (-1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\}$$

この集合に於ては一つの歸屬が他のものより優位ではない。さらに又これ以外の歸屬はAの少くとも一つによつて優位されてしまうことが示される。かかる二性質を有するAを解と名付けるのである。

定義一六、六。n人ゲームの歸屬の集合Aが次の二條件を満足するとき解(solution)という。

(i) Aの各々は他のものより優位ではない。

(ii) Aに入らないすべての歸屬はAの或元によつて優位される。

注意一六、七、この解の定義は二人ゲームのときと全く様子が異なる。解はただ勝負の終りに獲物が分けられる可能な方法の集合を與えるに過ぎない。すべての三人ゲームと四人ゲームには解があることは知られているが、すべての五人ゲームに解があることはまだ知られておらない。

三、同型ゲーム

定義一六、八、二つのn人ゲームvとv'とが同型(isomorphic)であるというのは次の場合である。即ちvの歸屬とv'の歸屬の間に次のような一對一の對應$\longleftrightarrow$がある。αとβがvの歸屬で、α'とβ'とがv'の歸屬のとき、$\alpha\longleftrightarrow\alpha'$、$\beta\longleftrightarrow\beta'$ならば、競技者のすべての部分集合Tに對して、$\alpha \underset{T}{>} \beta$ になるのは $\alpha' \underset{T}{>} \beta'$ になるときでありかつこのときに限る。

同型關係は反射的、對稱的、推移的である。

定理一六、九、ゲームvとv'とが$\longleftrightarrow$の下に同型でAをvの解とし、A'をAの或るαに對して$\alpha\longleftrightarrow\alpha'$なる$\alpha'$のすべての歸屬の集合とすれば、A'はv'の解である。

定理一六、一〇、vとv'とは常數kと$a_1,\ldots\ldots a_n$に關してS同値とす。vの歸屬を$(x_1,\ldots\ldots x_n)$とし

$$(x_1,\ldots\ldots,x_n)\longleftrightarrow(kx_1+a_1,\ldots\ldots,kx_n+a_n)$$

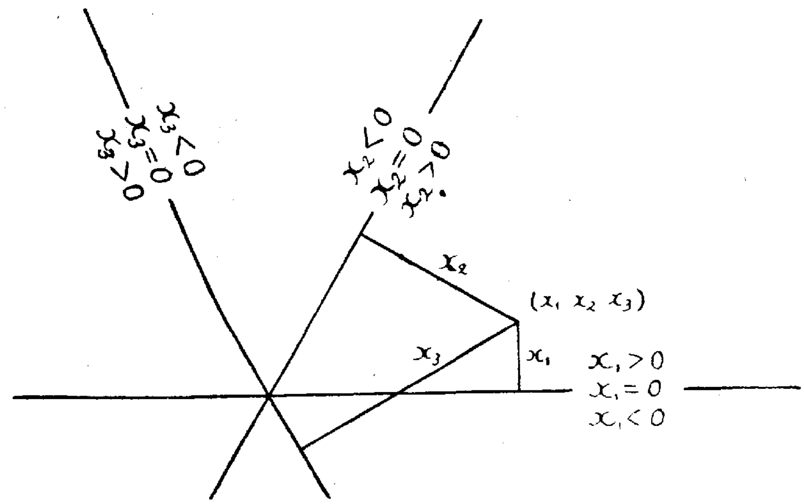
とすれば、關係$\longleftrightarrow$はvとv'との同型をつくる。

この定理はS同型が同型の十分條件なることを示している。それが必要條件なることも證明されるが、ここに省く。

系一六、一二、誘導形におけるすべてのゲームが解を有するとき、すべてのゲームは解を有する。

注意一六、一三、この系により誘導形におけるゲームが解を有することを證明すれば十分である。誘導形における本質的ゲームが解を有することを證明すれば万事終りであるが、これが困難な問題である。三人ゲームの場合は可能である。

注意一六、一四、解の定義に要求さるべきものとして、その一意性があるが、ノイマンはこれに同意しないで次のように主張する。解は單に社會的に受け入られる行動の標準を示すものであり、從つて社會の可能な安定組織に對應する幾通りもの解があり得ると。三人ゲームのすべての解を見出す問題を解いた後にこの點に關する彼の立場を幾分でも明らかにすることが出來る。



第一図

四、三人ゲーム

誘導形における本質的三人ゲームのすべての解を見出すためには、ユークリッド平面に新座標系を導入することが便宜である。

一點に於て交わる三直線で互に六十度の角をなしているものを座標軸としてとり、點の座標とはこれらの三直線からの距離を意味するものとする。その際正負は直線を境として第一圖のように定める。

ユークリッド平面の點は二つの座標によつてのみ定まるので、この三つは互に獨立であるとは期待できない。實際容易に分ることであるが、各點（x_1, x_2, x_3）に對して

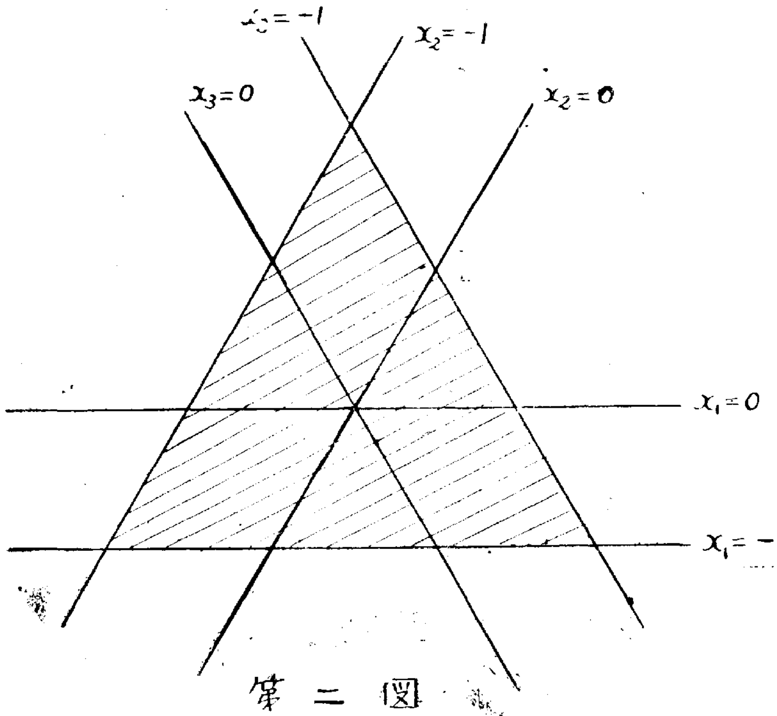
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

である。逆にその和が0になる三數があればそれを座標とする點が存在する。かくして三人ゲームの歸屬に對する一つの條件を滿足する座標系が得られたことになる。他の條件としては、歸屬に對應する點は第二圖の影のついた三角形內に入ることである。

この影のついた範圍を**基本三角形**（fundamental triangle）という。これはゲームに對するすべての歸屬を表わす。

さて優位關係の幾何學的表示を說明しよう。空集合、一元集合、又は全競技者に關しては一つの歸屬は他の歸屬より優位ではないから、三人ゲームの場合には二元集

合に關する優位だけを考えるとよい。



第二図

(x_1, x_2, x_3) を歸屬とすれば

$x_1 + x_2 \leqq v(\{1,2\})$

$x_1 + x_3 \leqq v(\{1,3\})$

$x_2 + x_3 \leqq v(\{2,3\})$

となる。それ故一六、四の(ii)は二元集合Tによってつねに滿足されている。從つて歸屬 (x_1, x_2, x_3) が (y_1, y_2, y_3) より優位であるのは

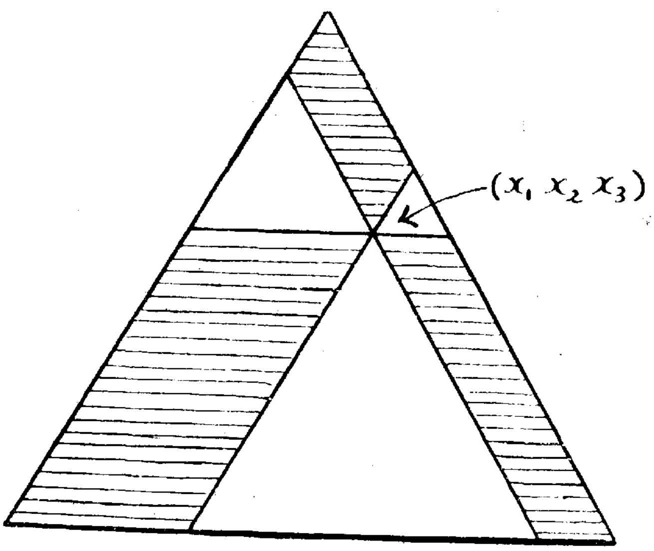
$x_1 > y_1$　$x_2 > y_2$

又は　$x_1 > y_1$　$x_3 > y_3$

又は　$x_2 > y_2$　$x_3 > y_3$

のときでありこのときに限る。

以上により第三圖の歸屬 (x_1, x_2, x_3) は影のついた範



第三図

圍に入る歸屬より優位にある(點 (x_1, x_2, x_3) を通る境

界線は範圍に入らない)。

さらに影のない範圍にあるすべての點は歸屬(x_1, x_2, x_3)より優位にある歸屬を表わす。

それ故二つの歸屬があつて、互に優位でないときは、對應する點は座標軸の一つに平行なる線の上にある。

次にすべての解を決定しよう。ゲームは本質的なるを以て一六、五により、すべての解Aは少くとも二つの歸屬をもつておらなければならぬ。さらにAのどの二つも座標軸に平行な線上にある。

こゝですべての點が同一直線上にあるかないかによつて區別すると、Aのすべての點が同じ線上にないとすれば次の解が得られる。

$$A=\{(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-1)\ (\tfrac{1}{2},-1,\tfrac{1}{2})\ ((-1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\}$$

これは既に得られたものである。

同一直線上にあるとすれば、次の條件のどれか一つを滿足しなければならない。

(i) Aは(C, x_2, x_3)なる歸屬からなる。ここにCは一定で $-1\leqq C<\frac{1}{2}$ なり。

(ii) Aは(x_1, C_1, x_3)なる歸屬からなる。ここにCは一定で $-1\leqq C<\frac{1}{2}$ なり。

(iii) Aは(x_1, x_2, C)なる歸屬からなる。ここにCは一定で $-1\leqq C<\frac{1}{2}$ なり。

注意一六、一五、基本三角形のすべての點が少くとも描かれた集合の一つに入るので、すべての歸屬は少くとも一つの解に對應する。それ故可能な歸屬が除外されておらない。

さきに述べたノイマンの見解はこれを意味する。即ち種々の解は社会行動の種々の標準を示すというのである。三人ゲームの場合に彼は唯一の有限解を無差別解とよび、その他のものを差別ある解とよんだ。

三人ゲームに關する知識が得られたからといつて一層圓滑に一層利益を得るように勝負が出來るとは思われない。ことに相手の二人が何にも知らないときは殊更である。これがn人ゲームが完全に滿足すべき形で解決されておらないと考えられる所以でる。

歴史的及び文献的註

n人ゲームの取扱いは Neumann と Morgenstern の書物にある。又 Nash (1950) の論文もあるが、極最近のものとしては Bott (1953), Shapley (1953) の論文がある。

第十七章　零和制限のないゲーム

――ノイマン・モルゲンシュテルンの理論――

一、特性函數

これまでは零和ゲームに就て考えたが、室内遊戯の大部分はこれである。しかし第一章に於て注意したように零和でないゲームは經濟理論への應用の見地からは非常に重要である。例えば勞働組合と産業會社との相互作用を考えると、或行爲（例えば契約の承任）は兩方に利益であるが、或行爲（例えば工場を閉鎖してしまうストライキ）は兩方を傷つける、勿論兩方に同じ程度ではないが。それ故社會科學が發展する限り零和ならざるゲーム理論は非常に重要な地位をしめる。

本章では零和でないゲームを研究する。しかし零和の場合を除外しようとするのではないから「一般ゲーム」というとき兩方を含むものとする。又誤解がなければ單に「ゲーム」と呼ぶことにする。

社會科學に於ける一般ゲームが非常に重要であるにもかかわらず、不幸にもそのゲームを十分理由のある滿足した形で取扱うことが出來ない場合があることを斷つておかねばならない。またこの方面における種々の理論を完全に述べようとするものでもない。唯ノイマンとモルゲンシュテルンの理論の簡單な描寫を行うだけである。

一般ゲームを考える場合に先ず矩形ゲームだけを考えるとよい。というのは、方略の概念の導入によると、すべての一般ゲームを矩形における一般ゲームに導くことが出來るからである。

かくして競技者$\{1 \cdots\cdots n\}$を有する一般n人ゲームは、n個の選擇集合$\{C_1, \cdots\cdots C_n\}$とn個の利得函數$\{M_1, \cdots\cdots, M_n\}$が與えられたとき完全に定まる。ゲームの勝負は次のように行われる。競技者i $(i=1, \cdots\cdots, n)$が集合C_iから元x_iを選んで審判者に知らせる。全部の選擇がすんだとき、審判者は競技者iに$M_i(x_1, \cdots\cdots x_n)$を支拂う。集合$C_i$の各々が有限なるとき、ゲームを有限という。$(x_1, \cdots\cdots x_n)$が集合$C_1 \cdots\cdots C_n$のカルテシアン積$C_1 \times \cdots\cdots \times C_n$に屬するときつねに$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_1, \cdots\cdots, x_n)=0$ならば、ゲームは零和である。それ故今後は右の等式を必ずしも仮定しない。

また一般n人ゲームを或特殊なn+1人ゲームとみなすことが出來る。それにはC_{n+1}を任意にとつて、M_{n+1}を$C_1 \times \cdots\cdots \times C_n$の元$(x_1 \cdots\cdots x_n)$に對して

$$M_{n+1}(x_1, \cdots\cdots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} M_i(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

とればよい。かくすることによつてこの新しいゲームは零和にもなる。

勿論それ故に一般ゲームはつねに零和ゲームの理論に

導けると結論すべきではない。というのは右に述べた(n+1)人ゲームは特殊の性質を有しているからである。先ず利得函數の値は競技者 $n+1$ によつてなされる選擇とは獨立であるし、更に重要なことには競技者 $n+1$ はもとのゲームに關する限り數學的虚構であるから、連合に入つたり片側支拂をしたりするとは考えられない。併しこの擴張はある形式的な有利をもつている。

Γを一般n人ゲームとし、Γ'を右に述べた擴張での零和 $n+1$ 人ゲームとする。十五章の結果からΓ'は特性函數vを有する。卽ちそれはΓ'の競技者の集合 $N_{n+1}=\{1,\ldots\ldots, n, n+1\}$ のすべての部分集合 $v(T)$ の上に定義された實數値函數で、Tの連合に入つたならば獲得が期待される額を表わす。この函數vはもとのゲームの競技者の集合 $N_n=\{1,\ldots\ldots,n\}$ と N_n の部分集合Tに對しても定義されているので、この $v(T)$ はその場合におけるTの連合を作つたとき獲得が期待される額をも表わす。それ故vを(N_n の部分集合に限つたとき)もとのゲームの特性函數という。

容易に分ることであるが、Γが既に零和ならば右に述べたΓの特性函數は十五章に定義した特性函數と一致する。かく新しい定義は古いものと矛盾しないし、零和であろうとなかろうと問題なしに、ゲームの特性函數として一般に用いることができる。

定理一七、一、 競技者が $N_n=\{1,\ldots\ldots,n\}$ である(一般)ゲームの特性函數をvとすれば

(i) $v(\Lambda)=0$

(ii) RとTとが N_n の互に排反した部分集合ならば

$$v(R\cup T)\geqq v(R)+v(T)$$

である。

更にvが N_n のすべての部分集合族の上に定義されて(i)及び(ii)を滿足するならば、vを特性函數とする(一般)ゲームΓが存在する。

定義一七、二、(一般n人ゲームに對する)二つのn人特性函數vとv'とがS同値であるというのは、N_n のすべての部分集合Tに對して

$$v(T)=k\cdot v'(T)+\sum_{i\in T} a_i$$

を滿足する正常數kとn及び $a_1,\ldots\ldots,a_n$ が存在することである。

注意一七、三、 零和の制限を去つているのでS同値の定義も零和の制限が入つておらない。それ故定義一七、二は一五、五よりも廣くなつている。實際新しい定義によれば零和ゲームは常數和(constant-sum)ゲームにS

同値ということになる。常數和ゲームとは特性函數が

$$v(T)+v(N_n-T)=v(N_n)$$

を滿足するゲームをいう。今後S同値は一七、二の意味で用いることにする。

一五、八の誘導形の定義と一致するもの、定理一五、一二と同樣の定理が得られるがここには省く。本質的、非本質的についてもまた同じ。

二、歸屬と解

定義一七、六、特性函數が v である一般ゲームの歸屬とは次の二條件を滿足するベクトル $(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ である。

(i) $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(\{1, \ldots\ldots, n\})$

(ii) $x_i \geqq v(\{i\}) \qquad i=1, \ldots\ldots, n$

注意一七、七、この定義は零和のとき一六、一と一致する。

優位の概念は十六章におけるものを適當に改變すればよい、S同型であるゲームは優位に關して同型であるから、今後はゲームの誘導形のみを考えるとよいことになる。

解の概念を明らかにするために、誘導形における二人ゲームのすべての解を見出そう。v を特性函數とすれば

$v(T)=0$ 　T が0元を含むとき

$v(T)=\gamma$ 　T が1元を含むとき

$v(T)=0$ 　T が2元を含むとき

それ故 γ が與えられれば特性函數は完全に定まり、$\gamma=0$ 又は -1 に應じて二つの場合だけを區別すればよい。

$\gamma=0$ のとき v は恒等的に0であり、ゲームは非本質的である。この場合には唯一つの歸屬 $(0,0)$ があり、この歸屬からなる集合は解であり、勿論唯一つの可能な解である。

$\gamma=-1$ ならば無限に多くの歸屬がある。卽ち $-1 \leqq x_1$、$-1 \leqq x_2$ 及び $x_1+x_2=0$ なるすべての組 (x_1, x_2) の集合がある。それ故歸屬は $-1 \leqq x \leqq 1$ を滿足する、順序づけられた組 $(x, -x)$ である。歸屬は互に優位ではないので、競技者の種々の可能な集合を考えることによつて得られる。

もしも　$(x, -x) \underset{\{1\}}{\succ} (y, -y)$

ならば　$y < x \leqq v(\{1\})$

なるを以て　$y < v(\{1\})$

となる。これは（v, $-v$）が歸屬である假說に反する。それ故すべての歸屬の集合はまた解であり、それは明らかに唯一の解である。

從て誘導形でない本質的2人（一般）ゲームの解は、次の條件を滿足するすべての組（x_1, x_2）である。

$$v(\{1\}) \leqq x_1$$
$$v(\{2\}) \leqq x_2$$
$$x_1 + x_2 = v(\{1, 2\})$$

この結果を說明すれば、非零和2人ゲームを勝負する2人は次のようにすべき（又は單に、なす）である。即ち彼等は收穫の和を極大ならしめ、これを2人の間で次のように分け合う方法を見出そうとする。分け合うには、各自は少くとも「自分丈で」した分は得ようとし、他に對しては出來るだけ妨害しようとする。この最後の條件から、利得を分け合う方法が示されないことになるのである。

例一七、八、2人ゲームで、各競技者に對してそれぞれ二つの方略があり、利得行列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。

非零和3人ゲームのすべての解を見出すことは可能である。これは本質的には何にも困難なことはないがここには省く。唯ノイマンの理論の基本假定の一つに就て批判しておこう。

ノイマンの理論は特性概念の上に築かれているので、二つのゲームが同じ特性函數を有するとき同じ解を有することになるが、これは一寸直觀的に受入れ難い、その例を述べておこう。

例一七、九、矩形2人ゲームを考える。第一競技者は一つの（純粹）方略を有し、第二競技者は二つの方略を有する。利得行列は次の通りである。

$$(0, 10) \qquad (-1000, 0)$$

歷史的文獻的註

本章で述べたことは大部分ノイマン・モルゲンシュテルンの書物第五、六章からとつたものである。

第十八章　若干の未解決の問題

一、問題の二つの型

ゲーム理論における未解決の問題は數多くあるが、未解決といつても他の數學の難問のように、明確にその難點を述べることが容易ではない。先ず「概念的」に困難

な問題がある。というのは、數學理論の如何なる形式的擴張が實際の應用に際して有用と思われるか、又實際問題に應用するために現存する理論の如何なる修正が必要であるかという問題が起る。即ち合理的行動と衝突しながら、實際問題に道具として適用するのに如何なる數學が最適であるかという問題である。かくの如く概念的問題とは、旣に認められた理論の中に或定理が打建てられるということよりも、ゲーム理論が如何なる種類の科學の上に築かれねばならぬかという問題なのである。

この概念的問題に對して通常の「技術的」問題がある。本章において取扱う三大重要問題はこの二つを含んでいる。第一は部分的には技術的であるが、第二と第三は大部分概念的である。

二、函數空間の上のゲーム

第七章で無限ゲームのことを述べたが、その際連續ゲームの特別の場合である閉區間を取扱つた。（無限の場合に對する）連續ゲームは（有限の場合に對する）矩形ゲームに類似しているので、方略を導入する際にすべての無限ゲームは連續ゲームに導けると考えることが出來る。それは有限ゲームが矩形ゲームに導かれるのと同じである。然し不幸にもこれは成立しない。というのは方略が非常に多いので閉區間の實數に一對一に對應させられないからである。

このことは函數空間（function space）で說明すれば明らかになる。即ち混合方略が函數空間の上の分布函數になるのである。

ここで當惑する問題は、函數空間Fの部分集合の如何なる族Aが指定された確率の下に分布函數となるかという問題である。

三、擬似ゲーム

次の重要な問題は、技術的には零和ゲームではないが闘爭狀態を取扱う合理的方法を見出すことである。この狀態を擬似ゲーム（pseudo-games）と呼ぼう。

闘爭狀態がゲームでなくなるのは、一つに競技者が混合方略を用いることを忘れるからである。この種の狀態は軍の交戰との關係に於て起り勝ちである。闘うチームの二組が分かれておつて、彼等は自分の組內で相互に又本陣とも通信が出來ないものとする。というのはそれによつて自分の場所を敵に知らせる危險が起るからである。彼等は團結して混合方略を用いたいと希望するかも知れぬがそれは不可能である。（その困難は方略の適當な無作意表から成功するものを取出すことによつて除か

れると考えられるが、この工夫は敵にその表が渡ることによつて失う損失を考えれば實行出來なくなるのである。）それ故かかる場合には「ゲーム」は「値」をもたなくなる。從て零和２人ゲームの理論は適用出來ない。

第六章の５(d)の仮定を無視すれば、即ち、同じ情報集合が一度以上交わるように勝負をすれば、擬似ゲームに導かれる。この擬似ゲームは標準形のゲームを勝負する最適の方法を定義する問題に關係づけられる。そこでは利得行列の元の値は正確には知られていないが單に或不等式を満足するように要求されている。

これと關連して、利得の性質における特殊性から技術的にはゲームでなくなる狀態について注意しておこう。今迄利得函數の値は一方から一方へ手渡しされる物であり、すべての人に對して同じ効用があると仮定してきた。然し實際には利得函數の値が金額であつても、種々の人々の財政狀態により一弗の價値は異なつてくる。或はまた利得の値が、チエスに勝つた喜びやロシヤルーレットに負けた悲しみであるとすればこの物の手渡は全然不可能てある。それ故品物の手渡しが可能であるという制限の下に、ゲームの解を如何に定義するかという困難な問題が殘される。

三、非零和ゲームとn人ゲーム

ゲーム理論に於て最も要求を叫ばれているのは、非零和ゲームとn人ゲームのより満足すべき理論である。ノイマンの理論は唯特殊の型を取扱つているに過ぎない。その型とは、協定、交渉、片側支拂が競技者の間で許されるものである。現實には勿論、ゲームの理論を應用したいと思う多くの狀態はこの種のものではない。それ故もしも三人の團體の行動をゲームと考えたいならば、獨占反對法律が連合を作ることを禁止するという事實を以て處理すればよい。連合と片側支拂は實際には室内ゲームですら忘れられている。

これよりナッシュはゲームを非協力的（noncooperative）と協力的（cooperative）とに區別した。前者では競技者の間に通信が行われないし、特に片側支拂については協定をなすことが許されない。後者では通信が許される。

ナッシュは非協力ゲームが基本的であり、協力ゲームを非協力ゲームへ導くことを試みた。それは協力ゲームの交渉は非協力ゲームにおける形式的段階として含まれているというのである。次で彼は均衡點(第六章をみよ)の概念を導入することによつて非協力ゲームを取扱つ

た。

それは相當の進歩を示したものではあるが、ナッシュの理論は若干不適切であり、この方面における概念的問題の定義された解としては認められないものがある。

先ず第一に非協力ゲームを認める限り、均衡點の位置を知ることがゲームを勝負するのに助けになるとは思われない。又第二に非協力ゲームが滿足すべき狀態にあるならば、協力ゲームを非協力ゲームに導く關係に困難があらわれる。

以上により幾多の天才がn人ゲームと非零和ゲームに頭を悩ましたが、まだ解の滿足すべき概念に到達しておらない。ゲーム理論の廣い實際問題への應用はこの定義を要求しているので——これは非常に重要な點である——理論の全貌は數學者に挑戰的問題を提示していることになる。

歴史的及び文献的註

本章の第一と第二の問題は Helmer (1952) によつて提出された。なお未解決の問題については Kuhn と Tucker の Contribution I (1950) を見られたい。

n人ゲームと非零和ゲームの最近の論文に Bott (1953) と Shapley (1953) のものがある。後者は Contribution. I の問題（10）を解いている。なお Nash (1950) と Raiffa (1953) の論文がある。

以上で紹介を終りこれに附加することもないが、說明が初學者向きなので多くの讀者に喜ばれることと思う。ゲーム理論を專門に志す人でなくとも、近代經濟學と數學との關連に關心を持つ人ならばこれは必讀の書物である。というのはゲーム理論の最小限度の知識が展開されてあるので、本書を一應修得しておくことは視野を廣める點からも新しい暗示を與えられる點からも是非必要と思われるからである。

本稿ははじめ小樽商大人文研究第八輯に掲載の豫定であつたが、筆者の都合により少し遲れてここに發表しておく。本稿の前半は本誌第四巻第三號（昭和二八年十二月）に掲載濟みのこと爲念。

（昭和二九、十二、二八）