デカルト：幾何學

武隈良一譯註

まえおき[1]*

これまで私は誰にでも理解しやすいようにと努めてきました[2]。けれどもこの書物は幾何学の本にあることを既に知つている人によつてのみ讀みこなされるのではないかと懸念しております。というのは，幾何学の本はきちんと良く證明された若干の眞理を含んでいるので，それらを繰返えすことは餘計なことと思われるのでありますが，それにもかかわらず幾何学の眞理を用いることを差控えなかつたからであります。

第一巻

圓と直線とのみを用いて作圖できる問題について

幾何学のすべての問題[3]（作圖題）**は結局，それを作圖するために[illegible]るいくつかの直線の長さを知ることだけが必要であるという事項に容易に導くことができる[4]。

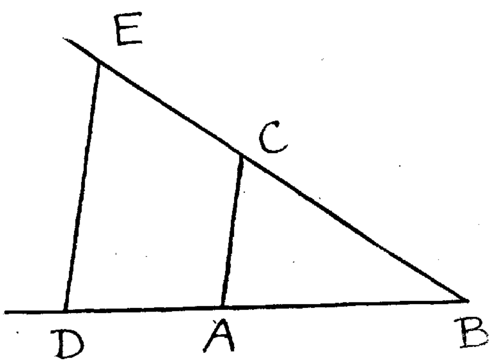
算術の計算が幾何學の演算に如何に關連するか

そして算術全體[5]が四つ又は五つだけの演算，即ち加法，減法，乘法，除法，及び一種の除法と考えられる開方[6]から組立てられているのと全く同様に，幾何学に於ては求める線[7]についてそれの知られるための準備として次のこと以外はしない。即ち線(分)に他の線(分)を加えたり，または引いたり，或はまた一つの線(分)——私はこれを數（カズ）とより多くの關係をつけるために單位と名付けるが[8]，これは一般に

* 番號附きの註は譯者の註であり巻末に一括する。

** 括弧（……）は理解を助けるために譯者が補つたものである。

任意にとることが出來る――と更にまた他の二つの線(分)が與えられたとき，第四の線（分）を見出してこれが二つのうちの一つに對する（比）が（二つのうちの）他の一つが單位に對する（比）になるようにすること，[9] これは乘法と同じである。或はまた第四の線（分）を見出してこれが二つのうちの一つに對する（比）が，單位が他の一つに對する（比）になるようにすること，[10] これは除法と同じである。或は最後に，單位とある他の線（分）との間に一つ，または二つ，または若干の比例中項を見出すこと，[11] これは平方根，または立方根等々を求めることゝ同じである。そして私はより一層理解をしやすくする爲に，算術の術語を幾何学のなかに導入することを躊躇しないであろう。

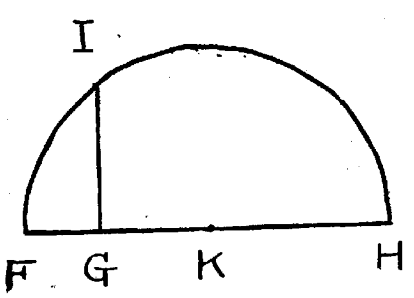


第一図*

乘　法　例えばABを單位としBDにBCを掛けねばならぬものとしよう。(それには)點AとCとを結んで次にDEをCAに平行に引きさえすればよい。然るときBEはこの乘法の結果となる。

除　法　或はまたBEをBDで割らねばならぬとすれば點EとDとを結んでACをDEに平行に引く。然るときBCはこの除法の結果となる。

開平法　またGHの平方根を求めなければならないとき，私はそれ(GH)に單位であるところの直線FGを加えて，FHを點Kで二つの等しい部分に分け，Kを中心として圓FIHを描く，次にFHに直角に點GからIまで直線を立てると，これが求める根GIである。私はこゝで立方根やその他（の根）については何にも述べ



第二図

---

* 圖の番號は原書にはない。

ないことにする。何故ならそれらに就ては後にもつと手際よく述べるであろうから。

幾何學に於て記號を如何に用いることが出來るか　しかしこのようにこれらの線（分）を紙上に描く必要がないことがしばしば起るが，そのときにはこれらをいくつかの文字で，（しかも）各々（の線分）は唯一つ（の文字）で表わせば十分である。例えば線（分）BD を GH に加えるには，私は一つを a，他を b と名付けて $a+b$ とかき，そして b を a から引くには $a-b$，一つを他に掛けるには ab，a を b で割るには $\frac{a}{b}$，a をそれ自身に掛けるには aa 又は a^2，もう一度 a を掛けるには a^3，同様に無限につゞく，又 a^2+b^2 の平方根をかくには $\sqrt{a^2+b^2}$，a^3-b^3+abb の立方根をかくには $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$,(12) その他も同様である。

注意さるべきことは，a^2 または b^3 または（これに）類するものによつて私は一般に全く單純な線（分）のみを考える，代數学で慣用されている名を用いるために私はそれらを平方または立方等々と名付けるけれども。(13)

同様に注意さるべきことは，單位が問題に於て決定されてないときには同一の線のすべての部分は一般に互に同じ次元で表わされねばならぬということである。例えば a^3 は abb 又は b^3 と同じだけ（の次元）を含み，それらは私が $\sqrt{C.\ a^3-b^3+abb}$ と名付けた線(分）を組立てている。然し單位が決定されているときは，同じようにはいかない。何故ならば次元が非常に大きくなつたり又は非常に小さくなつたりしている處に於てもつねに單位を暗々裡に考慮に入れることが出來るからである。例えば $aabb-b$ の立方根を描くには量 aabb を單位で一度割り，他の量 b には同じ（單位）を二度掛けると考えねばならない。(14)

その上，線（分）の名稱の記憶にことかかぬためには，つねに別に控えを作つておいて，（線分に）名をつけるか又は名をつけ變えるかに從つて書込んでおかなければならない。

例えば

$AB \propto 1,$(15)　　　即ち，ABは1に等しい

GH ∞ a,

BD ∞ b,　　等々

問題を解くのに用いられる方程式を如何に導かねばならないか　それ故もしある問題を解こうと欲するならば，先づその問題が既に解かれたものと考える。[16] そしてそれの作圖に必要と思われるすべての線に名稱を與える，未知のものにも既知のものにも。[17] 次に既知の線と未知の線との間に何等の區別をも考慮することなく，これらの線が互に關係しあつている樣子を最も自然に示す順序[18]に從つて，その（問題の）難かしさを調べ，[19] 遂に同一の量を二つの方法で表わし得る手段を見出すところまで行かねばならぬ。これは方程式と名付けられる。何故なら二つの方法の一方の諸項は他方のそれに等しいからである。そして未知の線と考えられているものと同じ數の方程式を見出さなければならない。[20] 或はまた，もしその數だけ見出されないで，そうしてそれにもかかわらず問題に要求されているものを何一つ省いてないならば，[21] 問題は完全に決定されていないことを表わす。そうしてそのときは方程式が對應しないすべての未知の線の代りに既知の線を任意にもつてくればよい。[22] こうしたあとにもまだいくつかの未知の線があるならば，それと同數の殘された各方程式を順次に，全く（それだけを）單獨に考えるか又は他と比較しながら，各々の未知の線（分の値）を得るために用いなければならぬ。そしてそれら（の方程式）を整頓した結果他の既知（の線）に等しい唯一つの未知（量）だけが殘るようにする。或はまたそれ（未知線分）の平方，又は立方，又は平方の平方（四乘），又は超立體[23]（五乘），又は立方の平方（六乘）等々が二つまたはそれ以上の量に加法又は減法を施して得られるものになるようにする。（但し）それらの量の一つは既知にして，他は單位とこの（未知線分の）平方，又は立方，又は平方の平方等々との或る比例中項[24]に他の既知（の線分）を掛けたものからなつている。私はこれを次のように書く。

$Z \infty b$

又は　$Z^2 \infty -aZ+bb$,

又は　$Z^3 \infty +aZ^2+bbZ-c^3$,

又は　$Z^4 \propto aZ^3 - c^3 Z + d^4$ [25]

等々

即ち，未知量としてとつたZはbに等しい，又はZの平方はbの平方よりaをZに掛けただけ少いものに等しい，又はZの立方はZの平方にaを掛けたものにZにbの平方を掛けたものを加え（かつ）cの立方を引いたものに等しい，その他についても同様である。

かくして問題が，圓と直線又は圓錐曲線又は（それより）更に一次又は二次しか高くない他の（曲）線によつて作圖されるときには，つねにすべての未知量を唯一つ（の未知量）に導くことができる。しかし私はこれについてもつと詳細に說明するために足ぶみはしないことにする。何故ならあなた方自身でそれを修得する喜びを奪つたり．又はあなた方がそれを練習するという効用を奪うことになるからである。そしてそれから（の喜びと利益）は，私の考えによればこの学問から受けることのできる主なる（恩惠）なのである。また普通の幾何学や代數学に少しでも通じている人で，この本に述べられていること全體に注意を拂つた人が見出すことの出來るような困難は何一つ私に認められないのである。

それ故私はこゝでは次のことをあなた方に注意するだけで私自身滿足しようとするのである。即ちこれらの方程式を整頓するに際して，可能なあらゆる區分を用いるのにことかかなければ，問題が誘導され得る最も簡單な諸項を間違いなく得るであろうと。

平面的問題とは何か

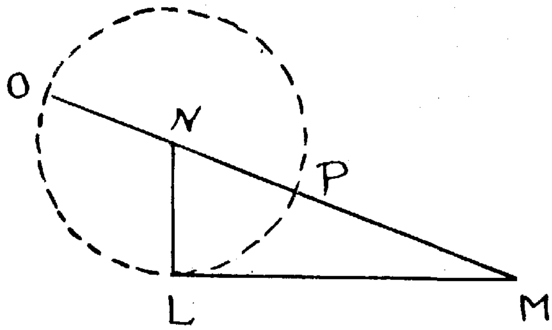
そしてもしも問題が普通の幾何学即ち平面上に描かれた直線と圓のみを用いることによつて解く[26]ことができるならば，最後の方程式を完全に整頓するとき，殘るものは精々未知量の平方がその根とある既知の量の積とある他の既知の量との和又は差に等しいということになる[27]

それらを如何に解くか

そしてこの根又は未知の線（分）は容易に求められる。何んとなれば，例えば

$$Z^2 \propto aZ + bb$$

なるとき，私は一邊LMが既知の量 b^2 の平方根なるbに等しく，他の邊LNが $\frac{1}{2}$ a——これは私が未知線（分）と假定したZに掛けられる他の既知量（a）の半分である——に等しい直角三角形NLMを作る。次にこの三角形の底邊(28) MNをOまで延長



第三図

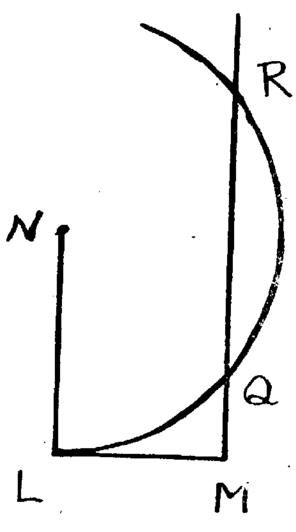
してNOがNLに等しいようにするとOMの全長が求める線Zになる。そして これは次のように表わされる。(29)

$$Z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

もしまた $yy \propto -ay+bb$ にして，yが求める量ならば，同じ直角三角形NLMを作り，底邊MNの上にNLに等しくNPをとると，殘りのPMは求める根yとなる。かくして

$$y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

が得られる。全く同様にして



第四図

$$x^4 \propto -ax^2 + b^2$$

なるときは，PMが x^2 にして

$$x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$$

となる。以下他もまた同様である。

最後に

$$Z^2 \propto aZ - bb$$

なるときは，NLを $\frac{1}{2}$a に等しく，LMを前のようにbに等しくとり，次に點MNを結ぶかわりにLNに平行にMQRを引きNを中心としてLを通る圓を描きそれがMQRを點QとRに於て切るものとすれば，求める直線ZはMQ

又は MR である。何んとなればこの場合に Z は二つの方法，即ち

$$Z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

と

$$Z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

によつて表わされるから[(30)]である。

そしてもしも點 N を中心とし點 L を通る圓が直線 MQR と交わらないならば，方程式の根はない，[(31)]それ故提出された問題の作圖は不能であると斷定することができる。

その上これらの同じ根は他の數え切れぬ方法によつて求めることができる。そして普通の幾何学のすべての問題は私が述べた四つの圖形[(32)]に含まれている僅かのこと以外は何もしなくとも作圖が可能であることを示すために，非常に簡單ではあるが私は唯これらの（上に述べた）ことを此處に述べておきたいのである。私は古代の人がこのことに氣付いていたとは思わない。何んとなれば，さもないならば（即ちもしそれだけで作圖が可能であると氣付いていたとしたら），書物に於ける彼等の命題の排列が彼等がすべて（の命題）を見出すための眞の方法をもつておらないことを知らせるような，また唯（偶然に）遭遇する命題を集めているに過ぎないことを知らせるような，あんなにも數多くの部厚な書物を骨折つて書くことはしなかつたであろうからである。

パッポスから引いた例　そしてこのことはまたパッポスが彼の第七巻[(33)]の始めに於てなしたことからも非常に明らかに認めることが出來る。彼はそこに於て彼に先んじた人々によつて幾何学について書かれたすべてのものを列擧する[(34)]のに相當の時間を費した後に，最後にユークリッドもアポロニウスもその他の人も完全には解くことの出來なかつたと彼が言うた問題[(35)]を語つている。こゝに彼の言葉がある。

私は誰にでも容易に分るようにギリシヤ語原本よりむしろラテン語譯を引照しておく

シカシ〔アポロニウス〕[*][**]ガ（彼ノ）第三番目ノ書物ニ於テ，三本又ハ四本ノ線ニ對ス

---

* 原文がラテン語のときは譯は片假名を以て表わす。

** 括弧〔……〕は原文にある括弧をしめす。

ル軌跡ハユークリッドニヨツテ完成（解決）サレナカツタ，ト言ツテイル軌跡ハ彼（アポロニウス）自身モ他ノ何人モ完成（解決）スルコトガ出來ナカツタ。又ユークリッドガ書イタモノニ僅カ（ノモノヲ）附ケ加エルコトモ，ユークリッド時代マデニ（既ニ）證明サレテイタ，單ニ圓錐（曲線ノ理論）ヲ用イテハ出來ナカツタ。云々。(36)

そして少し後に，彼はそれはこの（ような）問題であると説明している。

三本又ハ四本ノ線ニ關スル軌跡（ノ問題）ニ就テ彼〔アポロニウス〕ハ非常ニ自慢シテ，以前ニ書イタ人（ユークリッド）ニ對シテ何ニモ感謝ノ念ヲ抱カズニ自家宣傳ヲ行ツタ（ガ，ソノ問題）ハ次ノ通リデアル。若シモ三本ノ直線ノ位置ガ與エラレタトキ，同ジ一ツノ點カラ三本ノ直線ト與エラレタ角ヲナスヨウニ（三本ノ）直線ヲヒキ，二直線（分）ノナス矩形ト殘リノ（線分ノ）平方トノ比ガ與エラレタモノニナルヨウニスレバ，コノ點ハ位置ノ與エラレタ立體的軌跡(37)即チ三ツノ圓錐曲線ノ一ツノ上ニアル。ソシテ若シモ位置ガ與エラレタ四本ノ直線ト與エラレタ角ヲナス（四本ノ）直線ヲ引イタトキ，（ソノ中ノ）二本ノ線（分）ノナス矩形ノ他ノ二本ノ（線分ノ）ナス矩形ニ對スル比ガ與エラレテイルナラバ，同樣ニ與エラレタ點ハ位置ノ與エラレタ圓錐曲線ノ上ニアル。モシ二本ダケ與エラレテイルトキハ平面的軌跡(38)デアルト（既ニ）示サレテイル。若シ四本以上與エラレテイルトキハ，コノ點ハ今日知ラレテナイ軌跡ノ上ニアル。コレハ線ト呼ブ外ハナイ。ソレハ如何ナル線カ如何ナル性質ヲ有スルカハ分ツテイナイ。ソレラノ一ツ，最初（ニ表ワレル主要ナ）ノモノデ最モ明ラカト思ワレルモノ，デサエ作圖シテソノ有用ナコトヲ示スコトハシナカツタ。(39)トコロデコレラ（今述ベタ線）ニ關スル命題ハ次ノ通リデアル。

若シモ位置ガ與エラレテイル五本ノ直線ニ一點カラ與エラレタ角ヲナス（五本ノ）直線ヲ引イタトキ，引カレタ直(線分)三本カラデキル直六面體ト殘リノ二本トアル與エラレタ直線（分）トカラデキル直六面體トガ與エラレタ比ヲ有スルナラバ，ソノ點ハ位置ノ與エラレタ線（線狀的線）(40)ノ上ニアル。又モシ六本アツテ三本ノ線カラデキル立體ト殘リノ三本カラデキル立體トガ與エラレタ比ヲ有スルナラバ，ヤハリソノ點ハ位置ノ與エラレタ線ノ上ニアル。若シ六

本以上ナラバ四本ノ線カラデキルモノト殘リノ線カラデキルモノトガ與エラレタ比ヲ有スルカドウカハマダ言ウコトガ出來ナイ。何トナレバ三次ヨリ大キイ次元ノ容積ヲモツモノハナイカラデアル。

こゝに序でながら私があなた方に注意して頂きたいのは，古代の人が算術の術語を幾何学に用いるときの不安，これは兩者の關係を十分明らかに見なかつたからこそ起つたのであるが，(この不安)が彼等の說明する方法に多くの不明瞭と混亂をひき起したことである。というのはパッポスは次のように續けているからである。

シカシ少シ前ニ，カヨウナ解釋ヲシタ人々ハ以上ノコトヲ以テ滿足シテイル。シカモコレラ（三線分以上）ニヨツテ包マレルモノガ一ツトシテ何ラカノ意味デ理解デキルトハ考エテイナイ。シカシ連絡比（複比）ヲ用イテ，一般ニ前ニ述ベタ比及ビコレラノ比ニ於テ，コレラノコトヲ述ベタリ說明シタリスルコトハ許サレルデアロウ。若シモ位置ノ與エラレタ直線ト與エラレタ角ヲナス直線ヲアル點カラ引イテ，一ツノ線（分）ガ他ノ一ツニ對スル比，モウ一ツガ別ノ一ツニ對スル比，他ノ一ツガマタ別ノ一ツニ對スル比，ソシテ線（分）ガ七本ノトキハ殘リガ他ノ別ニ與エラレタ線（分）ニ對シテ有スル比，カラ得ラレル連結比ガ與エラレタトシ，又八本アルトキハ上ノ三ツノ比及ビ殘ツタモノガ（モウ一ツ）殘ツタモノニ對スル比カラ得ラレル連結比ガ與エラレタモノトスレバ，コノ點ハ位置ノ與エラレタ線ノ上ニアル。ソシテ奇數本ニセヨ偶數本ニセヨ幾本アツテモ，私ガ前ニイツタヨウニ四本ノトキノ軌跡ニ相當スルノデ同樣ニ出來ルノデアルガ，シカモ彼等ハ線（軌跡）ヲ知ラシメルヨウナ何（等ノ方法）ヲモ提出シナカツタ。云々。

さてユークリッドによつて解きはじめられ，次でアポロニウスによつて繼續されたが(遂に)何人によつても完成されなかつた問題というのは次の通りである。[41] 三本，四本又はそれ以上の直線の位置が與えられているとき，先ず一點を見出してその點から（與えられた直線と同數の）他の直線を引き與えられた

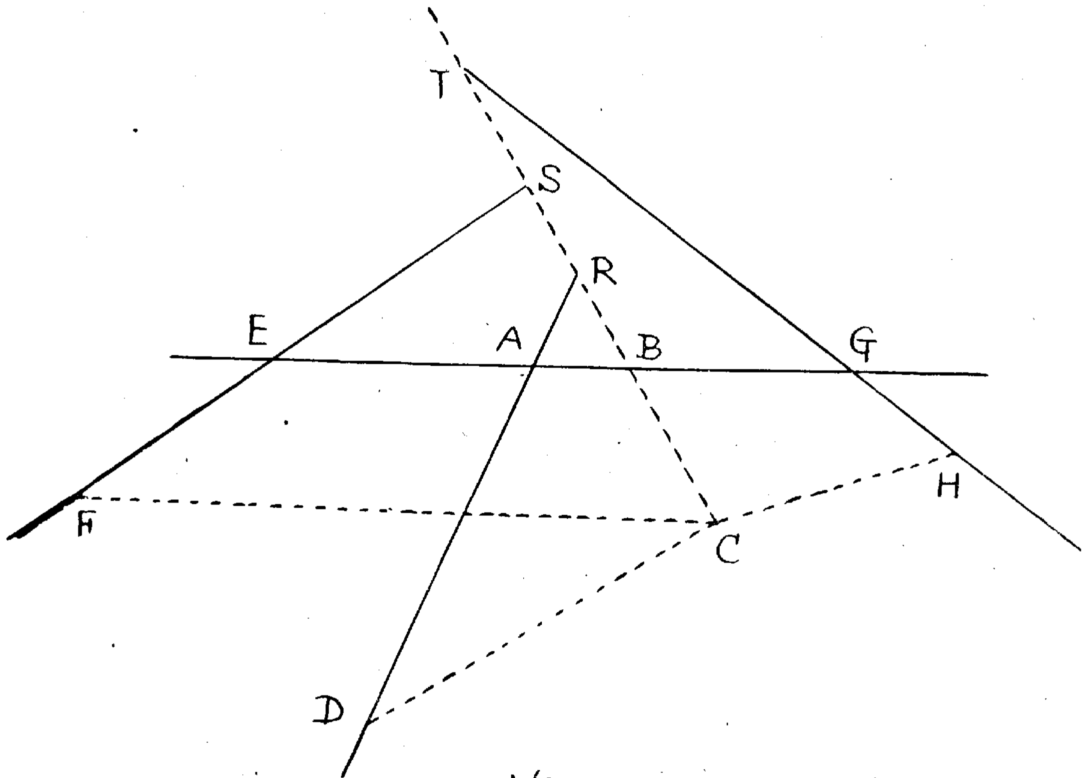
各直線と與えられた角をなすようにし，若し（直線が）三本與えられているときは，今の點から引いた二本の（線分の）なす矩形と第三の（線分の）平方とが與えられた比をなすように（始めの點を）求めよ。或はまた四本與えられているときは他の二本（の線分）のなす矩形と（の比が與えられたように），また五本與えられているときは三本で作つた直六面體と殘りの二本及び他に與えられた線（分）から作つた直六面體とが與えられた比をなすように，また六本與えられているときは三本から作つた直六面體が他の三本の直六面體と與えられた比をなすように，また七本與えられているときは四本を互に掛けた積と他の三本とまた他に與えられた線（分）とを掛けた積とが與えられた比をなすように，また八本與えられているときは四本を掛けた積が他の四本の積と與えられた比をなすようにせよ。かくてこの問題は（直）線の他のすべての（個）數に擴張することが出來る。次にこゝに要求された通りを滿足することのできる種々の點はつねに無限に存在するので，これら全部の點がのつている線を知り又これを追跡することが要求されねばならぬ。パッポスは三本又は四本の直線しか與えられていないときは，この線は三つの圓錐曲線の一つであると言うたが，問題に於てもつと多くの線が與えられているときに，求めるこの線又はすべての點を決定したり描いたり說明したりすることを彼は決して企てなかつた。たゞ彼が附加えて（言うには）古代の人はそのうちの一つ（の曲線）を考え，これが有用であることを示した，しかしそれは最も明らかなものと思われるがしかも最初の（主要な）ものではなかつたと。[42] これ（こそ）は私が自分の用意に作つた方法で，人が今まで行つたと同じ位のところまで進むことが出來るかどうかを試す機會を私に與えた（原因なのである）。[43]

パッポスの問題の答　そして最初に私は，この問題に三本又は四本又は五本の線しか提出されてないときは簡單な幾何学によつて即ち定規とコンパスのみを用いることによつて，また既に述べたこと以外のことをしないで求める點をつねに見出し得ることが分つた。但し與えられた五本の線が全部平

行であるときだけは除く。この場合には，問題に六，又は七，又は八，又は九本の線が與えられているときのように立體的幾何学即ち三つの圓錐曲線の一つを用いることによつて求める點をつねに見出すことが出來る。(但し)與えられた九本の線が全部平行であるとき丈は除く。更にこの場合とまた十，十一，十二又は十三本の線のときには圓錐曲線より一段階だけ複雜（高次）な曲線によつて求める點を見出すことが出來る。（但し）十三本が全部平行であるときは除く。この場合と十四，十五，十六の場合にはまた前に掲げた曲線より更に一段階だけ複雜な曲線を用いなければならぬ。同様に無限に續く。

次に私はまた與えられた線が三本又は四本しかないときには，求める點は單に三つの圓錐曲線の一つの上にあるのみならず，（特別の場合として）ときには圓の周圍又は直線の上にもまたあることを見出した。そして五，又は六，又は七，又は八本の（線が與えられている）ときには，すべての點は圓錐曲線より一段階だけ複雜なある一つの線の上にあり，その何れ（の曲線）でもこの問題（の一つ一つ）に利用されないものを考えることは不可能である。しかしまたそれらは更に圓錐曲線又は圓又は直線の上にあることもあり得る。そして九，又は十，又は十一，又は十二本のときには，これらの點は前のものより一段階だけ複雜な線の上にあつて，このとき（前の曲線より）一段階だけ複雜なすべての曲線を（問題のすべての場合に對應して）利用することが出來る。同様に無限につゞく。

最後に圓錐曲線に引續くすべての（曲線）のうちで最初に表われるもので最も簡單なものは，拋物線と直線とがこれから述べる方法で交わることによつて描くことの出來るものである。これによつて私はパッポスが古代の人によつて研究されたと語つたものを完全に滿足（完成）したと思う。そしてそれらに就ては僅かの言葉で證明を述べることに努めよう。というのは私はもうあまり書き過ぎて倦きているからである。



第五図

AB, AD, EF, GH 等々を位置の與えられた數本の（直）線とせよ。[44] 一點Cを見出してそれより與えられた（直）線に他の線（分）を CB, CD, CF 及び CH と引いて，角 CBA, CDA, CFE, CHG 等を與えられた（大いさ）にし，かつこれらの線（分）の一部[45]を掛けた積が他（の殘り）を掛けた積に等しくなるようにせよ。或はまたこれら（二つの積）が與えられた比[46]を有するように（としてもよい）。何んとなればそうしても問題はより難かしくはならないからである。

この例における方程式を得るために各項を如何に定めるべきか　最初にこのことが旣になされたものと考えよう。そしてすべての線（を考える）という混雜から逃れるために私は與えられた線の一つと求める線の一つ，例えば AB と CB を主（要直）線として考えそれに他のすべての線を關係させるように努める。[47] 線 AB の點 A と B との間にある部分を x，BC を y と名付ける。他の與えられたすべての線がこの二本の線（AB と BC）と平行でないとき，必要に應じてこれらと交わるまで延長する。ちようどこ（の圖）に於てそ

れらはABと點A，E，Gに於て，BCとR，S，Tに於て交わつているのをあなた方が見るように。次に三角形ARBのすべての角は與えられているので邊ABとBRとの比がまた與えられたことになるので私はそれをZ對bとおく。ABはxなるを以て，RBは$\frac{bx}{Z}$となる，そして點BがCとRの間にあるときにはCR全體は$y+\frac{bx}{Z}$となる。またもしRがCとBとの間にあるときはCRは$y-\frac{bx}{Z}$となり，CがBとRとの間にあるときはCRは$-y+\frac{bx}{z}$となる。全く同様に三角形DRCの三つの角は與えられているので從つてまたCRとCDとの比（も與えられており，この比）をZ對cとおく。CRは$y+\frac{bx}{Z}$なるを以てその結果CDは$\frac{cy}{Z}+\frac{bcx}{ZZ}$となる。それから（直）線AB，ADとEFは位置が與えられているので點AとEとの距離もまた與えられていることになる。よつてこれをkと名付ければEBは$k+x$となる，しかし點BがEとAとの間にあるならばこれは$k-x$となり，EがAとBとの間にあるならば$-k+x$となる。そうして三角形ESBの角はすべて與えられているので，BEとBSとの比もまた與えられていることになり，これをZ對dとおく，するとBSは$\frac{dk+dx}{Z}$となりCS全體は$\frac{zy+dk+dx}{Z}$となる。しかしSがBとCとの間にあるときは$\frac{zy-dk-dz}{Z}$となり，CがBとSとの間にあるときは$\frac{-zy+dk+dx}{Z}$となる。更に三角形FSCのすべての角は與えられているので，從てCS對CF（も與えられておりこれ）をZ對eとおくと，CF全體は$\frac{ezy+dek+dex}{ZZ}$となる。同様にAG，これを私はlと名付ける，は與えられているのでBGは$l-x$となり，また三角形BGTよりBG對BTはまた與えられているので（これを）Z對fとすれば，BTは$\frac{fl-fx}{Z}$となり，CT$\propto\frac{zy+fl-fx}{Z}$となる。更にTCとCHとの比は三角形TCHより與えられているのでZ對gとおけばCH$\propto\frac{+gzy+fgl-fgx}{ZZ}$となる。

かくして(今迄に)見てきたように，位置が與えられている何本の線があろうとも，問題の趣旨に從て點Cを通り（與えられた直線と）與えられた角をなすすべての線（の長さ）は各々つねに三つの項によつて表わされ得る。その一つは未知量yにある他の既知（の量）を掛けたもの又はそれで割つたものからなり，他は未知量xにまたある他の既知（の量）を掛け又は割つたものからな

り，第三はすべて既知（の量）からなつている。[48]（但し）もしそれら（與えられた線）全部が線ABに平行なるときこの場合には量xからなる項はなくなり，また（全部が）線CBに平行になるときこの場合には量yからなる項はなくなる，という（二つの場合）だけは除外する（即ちそのときは三項にはならない）。というのはこれらは餘りにも明らかなので，わざわざそれについて私が說明の勞をとるまでもないからである。[49]そうしてこれらの項を結合している符號＋と－とは，考えられるすべての方法で變化して差支えない。

次にまたあなた方が見られるように，これらの線を互に數個掛けたときその積にあらわれる量xとyとはそれぞれ，それら（xとy）が表わすために用いられかつ掛けられた線（の個數）と同じ次元しかもつことができない。從つてそれら（xとy）は二本の線の乘法によつてしか得られない積に於ては二次以上には決してならないし，三本の乘法によつてしか得られない積に於ては三次以上にはならない。かくの如く無限につゞく。

五本以上の線が與えられていないとき，問題が平面的であることを如何にして見出すか

更に，點Cを決定するためには，必要な唯一つの條件即ち或る個數の線を掛けた積が他（の殘りの線）を掛けた積に等しいか又は〔少しも難かしくはならないのであるが〕與えられた比を有する（という條件）がある。（この條件は方程式を與えるから）二つの未知量x又はyの一つを任意にとり，この方程式により他を求めることが出來る。この方程式に於て問題に五本以上の線が與えられていないときには，最初（の線CB）を表わすのに用いられなかつたxはつねに二次としてのみ（表わされる）ことは明らかである。[50]從つてyに既知量をとることによつて

$$xx \propto + \text{又は} - ax + \text{又は} - bb$$ [51]

を得る。それ故既に述べた方法により，定規とコンパスを以て量xを求めることができる。その上線（分）yに對して無限個の相異なる大いさ（の値）を逐次にとれば，線（分）xに對してもまた無限（個の値が）求められる。かくしてCと表わせるような（性質をもつ）相異なる點が無限に多く得られる。この方法により求める曲線を描く（ことができる）。

またこういうこともあり得る．問題に於て六本又はそれ以上の個數の(直)線に就て問題が提出されていて，もし與えられた(直)線のなかにBA又はBCと平行なものがあるときは二つの量x又はyの一つは方程式に於て二次[52]しか有しないから，同樣に定規とコンパスを以て點Cを求めることができる．しかし逆に線が全部平行ならば，問題に於て五本の線しかなくとも，點Cは求め得られない．何んとなれば量xは方程式に全然あらわれてこないので，yと名付けた量に既知量をとることはもはや許されず，(反て)y(の値)が求められねばならない．そして(yに關して)三次なるを以て三次方程式の根を得ることによつてのみ(yの値を)求めることができる．これは少くとも圓錐曲線の一つを用いずには一般になし得ない．更に九本までの線が與えられているときそれら全部が平行でないならば，方程式は平方の平方までしか上らないようにできるし，そ(の方程式)を用いれば圓錐曲線によつてつねに解くことができるがその方法は後に説明する．次に十三本まで與えられているときにはつねに方程式は立方の平方以上までしか上らないようにできるし，從つてこれは圓錐曲線より一次だけ複雜な曲線により解くことができるがこの方法に就てはまた後に説明する．そうしてこれが私がこゝに證明しなければならなかつた最初の部分である．しかし第二(卷)へ移るまえに，私は一般に曲線の性質について若干のことを言う必要がある．

譯者註釋

譯註に於てしばしば引照される書物のうち代表的なものを掲げておく。

1. ショーテンの書物。

Van Schooten, Geometria a Renato Des Cartes, una cum notis Florimondi de Beaune, opera atque studio Francisci à Schooten, Amsterdam, 1683.

2. ラビュエルの書物。

Claude Rabuel, Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes, Lyons, 1730.

3. パッポスの書物 (Hultsch の獨譯)。

Pappi Alexandrini Collectiones quae supersunt e libris manuscriptis edidit Latina interpellatione et commentariis instruxit Fredericus Hultsch, Berlin, 1876-1878.

4. アポロニュスの書物。

Apollonii Pergaeii Quae Graece exstant. edidit. I. L. Heiberg. Leibzig. 1891.

5. ブリオとブーケーの書物。

Briot and Bouquest, Elements of analytical geometry of two dimentions, trans. by J. H. Boyd, New York, 1896.

6. クーザン版デカルト全集。

Œuvres de Descartes, publiées par Victor Cousin, Paris. 1824.

7. アダン・タンヌリ版 (デカルト全集)。

Œuvres de Descartes, publiées par Charles Adam et Paul Tannery, t. 13. Paris, Léopold Cerf, 1896-1913.

8. シュレージィンガーの獨譯。

L. Schlesinger, Die Geometrie von René Descartes. 1894.

9. スミスの英譯。

D. E. Smith and M. L. Latham, The Geometry of René Descartes. 1925.

10. カントルの書物。

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig. 1880—1908.

11. ヒースの書物。

T. L. Heath, History of Greek Mathematics. Cambridge, I. II. 1921.

12. スミスの書物。

D. E. Smith, History of Mathematics, I. II. 1923—1925. (Iには邦譯

がある。今野武雄譯　數学史　昭和十九年　紀元社）

（1）　これはアダン・タンヌリ版デカルト全集第6巻368頁にある序言であつてスミスの英譯に轉寫されている初版の原本にはない。

（2）　方法序說の附錄である屈折光学，氣象学を平易に書いてこれに引續き幾何学を執筆したのでデカルトはかく言うたのである。

第　一　巻

（3）　問題 Problesme とあるが全巻を通じて作圖題のことを意味する。

（4）　Vincenzo Riccati e Girolamo Saladino, Institutiones Analyticae, Bologna. 1765.

Maria Gaetana Agnesi, Istituzioni Analitiche, Milan, 1748.

及びラビュエルの書物を参照のこと。

（5）　Arithmetique を算術と譯したが，これは數論という意味であつて，計算術 Logistique と混同してはならない。

（6）　l'Extraction des racines とあり巾根を求めることである。

（7）　線といつても必ずしも無限直線を意味しない。線分を意味することがあつたり，又は曲線をさすこともある。前後の文章から判斷する外はない。

（8）　ショーテンの書物165頁に次の註がある。

（コヽニイウ）單位トハ，（丁度數ノ）單位ガ種々ノ數ニ對シテ有スルト同ジョウナ關係ヲ如何ナル線ニ對シテモ有スルヨウナ一定ノ或ル線（分）ト解スルコトニスル。

（ラテン語の譯は片假名で表わすことにする。本文に於ても同様）

（9）　1とa，bが與えられたとき第四のxを見出して$\frac{x}{a}=\frac{b}{1}$ならしめること。これより $x=ab$ が得られる。

（10）　$\frac{x}{a}=\frac{1}{b}$ より $x=\frac{a}{b}$

（11）　一つの比例中項とは，$1:x=x:a$ より求めた $x=\sqrt{a}$ のことをい

う。二つの比例中項とは，$1:x=x:y$，$x:y=y:a$ より求めた $x=\sqrt[3]{a}$，$y=\sqrt[3]{a^2}$ のことをいう。以下同様。

(12)　$\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$ はいまならば $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$ とかく。

(13)　當時は a^2，b^3 といえば直に一邊が a なる正方形の面積，及び一稜が b なる立方體の體積を意味し，b^4，b^5 ……等の幾何学的意義は知られていなかつた。デカルトがこゝで言うのは，a^2 といつてもそれは正方形の面積ではなく，$1:a=a:x$を満足する（單純な）線分の長さを意味するというのである。かくa^2，b^3，……といつてもやはり線分を表わすとし代數的なものと幾何学的なものとの不調和を取拂つたのはデルカトの卓見である。

(14)　かくすることによつて各項は3次元になり，前者から後者を引いたものの立方根が1次元の線分として求まる。

(15)　∞は等號を意味する。ショーテンは「又ハ單位＝（等シイ）」とつけ加えている。デカルトがこの記號を用いた最初の人のように思われる。これに從つた少數の人のなかに Mudde（1633—1704）がいる。常識的に考えられることは aequare（等しい）の最初の二字，即ち二重母音 ae を連字したものが∞になつたということである。例えば W.W.R.Ball, Recréations Mathématiques et Problèmes des Temps Anciens et Modernes, Paris, 1909 第3部164頁に於けるM. Aubry の註を參照されたい。またカントールの書物第2巻724頁によれば文字 ae を逆に縺れ合せたものが∞であるとのことである。

(16)　この考えはよく知られているように Plato にまで溯る。Pappus の論文のなかには次の如く書かれてある，「解析に於ては，求めるものが既に得られたと假定して，その關係や既知のものを考えることによつて（假定に與えられてある）既知のもの又は數学に於ける基礎原理（公理又は公準）にまで立歸えるのである。」パッポスの書物第2巻．635頁．或はまた Commandinus, Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones, Bologna, 1588. を參照。

(17)　ラビュエルの書物20頁によれば，既知の線に對しては a, b, c,……を，未知の線に對しては x, y, z,……を用いるように注意している。

(18) ordre の譯である。これを方法と意譯した方が分りよいであろうが，デカルトに於ては方法と順序（秩序）とは各々確たる意義で用いられている。「方法序説」に於ける四つの綱領の第三に秩序の意義が述べられている。

(19) 問題の難かしさに骨折りこれを切抜けることをいう。

(20) 以上は作圖題の解法が未知數を含む連立方程式の解法に歸着することを述べている。

(21) たとえ問題に含まれている種々の條件を何一つおとさなくとも方程式の數が未知數の數より少ないときはという意味である。

(22) 連立方程式に於て方程式の數が未知數の數より少ないときには，その少ない數だけ未知數に任意の既知數を代入して方程式を解くことを意味する。これは解が不定になる場合である。

(23) 五乘をその當時の佛蘭西語では sursolide というた。

(24) $1, z, z^2, z^3, z^4$ …………とならべてみると，

1 と z^2 との間の比例中項はz,

1 と z^3 との間の比例中項は z, z^2

1 と z^3 との間の比例中項は z, z^2, z^3

となることは註（11）の示す處である。即ち「1とz^n との間の或る比例中項」とはnより低いzの巾のすべてを指していることになる。

(25) ショーテンの書物では次の如くになつている。

$$z^4 \propto + az^3 + b^2z^2 - c^3z + d^4$$

(26) コンパスと定規による作圖の可能性に關する研究に就ては

Jacob Steiner, Die geometrishen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin, 1833.

Enriques, Fragen der Elementar- Geometrie, Leipzig, 1907.

Klein, Problems in Elementary Geometry, trans. by Beman and Smith, Boston, 1897.

Weber und Wellstein, Encyklopädie der Elementaren Geometrie, Leipzig, 1907.

Mascheroni, La geometria del compasso, Pavia, 1797.

林鶴一，初等幾何学作圖不能問題（大倉書店）

柳原吉次，初等幾何学作圖問題（岩波數学講座）を參照。

(27)　式で表わせば $z^2 = az \pm b^2$

(28)　當時斜邊は底邊（base）と考えれていた。

(29)　第三圖に於て，$OM \cdot PM = LM^2$，もしも $OM = z$，$PM = z - a$ とすれば，$LM = b$ なるを以て，$z(z-a) = b^2$ 故に $z^2 = az + b^2$ にして $MN = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ より $OM = z = ON + MN = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ となる。平方根のまえの±のうち−をとると根は負となる。デカルトはこの場合を考えておらない。

(30)　第四圖に於て $MR \cdot MQ = LM^2$ なるを以て，$MR = z$ ならば $MQ = a - z$ となる。故に

$$z(a-z) = b^2, \qquad z^2 = az - b^2$$

更にOをQRの中心とすれば

$$MQ = OM - OQ = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

にして

$$MR = MO + OR = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

となる。デカルトは兩者がともに正なるを以て二つの根を與えた。

(31)　この場合虚根になるのであるがデカルトはこの場合は不能と考えた。

(32)　デカルトは二次方程式としては次の三つの型，即ち $z^2 - az - b^2 = 0$，$z^2 + az - b^2 = 0$，$z^2 - az + b^2 = 0$ しか考えなかつた。また係數を一般化して正負いずれの場合をも考えるということはせず從來の傳統にとらわれていたのである。また a が正なるときの $z^2 + az + b^2 = 0$ は正根をもたないのでデカルトは考えなかつた。四つの圖形とはいままでに揭げられた四つの圖を指す。

(33)　Alexandria の Pappus はギリシヤの數学者にして紀元300年頃に生存していた。彼の最も重要な業蹟は8卷の「數学集成」であつてその第1卷と第2卷の一部は失われている。その他の部分は Commandinus edition of Pappus, 1660 及びパッポスの書物によつて現代の学者にも理解できるようにされている。第3卷は比例，内接立體及び立方體の倍加，第4卷は螺線及び

Quadratrix の如き高等平面曲線，第5巻は極大及び等周圖形，第6巻は球，第7巻は解析とそのギリシヤ人に於ける歴史，第8巻は力学を取扱つている。

なおヒースの書物の外に次のものも簡にして要を得ている。L. Heath, A manual of greek mathematics, Oxford, 1931. pp.451−459.

（34） パッポスの書物第2巻637頁及び Commandinus, 1660，pp.240—252参照。

（35） この問題の歴史については，Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum, Copenhagen, 1886. 又はアダン・タンヌリ版デカルト全集第6巻723頁参照。

（36） パッポスの書物第2巻677頁，Commandinus, 1660，p.251.

（37） 圓錐曲線は圓錐という「立體」を平面で切つた切口であるから，立體的軌跡とよんだのである。

（38） 圓と直線のことをいう。平面的軌跡及び立體的軌跡は當時の術語である。例えば，Fermat, Isagoge ad Locus Planos et Solidis, Toulous, 1679（フェルマー，平面的及び立體的軌跡入門）参照。

（39） これらのラテン語の佛譯はアダン・タンヌリ版デカルト全集第6巻721頁にある。デカルトは引照したこれらのラテン語を紹介するに際して，この部分だけを誤譯した。後註42参照。

（40） 圓錐曲線より高次の曲線をいう。古代人は作圖題（曲線）を平面的，立體的，線狀的と分類した。作圖題が平面的であるというのは圓と直線とのみを用いて作圖できるという意味である。他も同様。

（41） 前文のラテン語（片假名の譯）は讀者に讀めないものとして以下にその大要を紹介しているのである。

（42） この部分のフランス語はデカルトがパ ポスのラテン語を誤まつて佛譯したものである。正しくは註39に於ける如く譯さなければならぬ。

（ラテン語原文） earum vnam, neque primam, E quoe manifestissima videtur, composuerunt ostendentes vtilem esse.

（デカルトの誤譯） les anciens en auoient imaginé vne qu'ils monstroient y estre vtile, mais qui sombloit la plus manifeste, & qui n'estoit pas toutefois la premiere.

（アダン・タンヌリ版の譯） on n'a fait la synthèse d'aucune de ces lignes, ni montré qu'elle servit pour ces lieux, pas même pour celle qui semblerait la première et la plus indiquée.（四つ以上の場合の）軌跡のいずれをも作圖しなかつたし，それらの軌跡に對して有用であるものを示さなかつたし，その上最初に表われる最も明らかと思われるものに對してさえそうしなかつた。）

なおアダン・タンヌリ版デカルト全集第4卷366頁を見ると，パッポスの書物にあるギリシヤ語原文は次の通りであるという。

ὧν μίαν οὐδέ τινα συμφανεστάτην εἶναι δοκοῦσαν συντεθείκασιν ἀναδείξαντες χρησίμην οὖσαν.

（それらの中で最も明白であると思われるものを何一つ，有益であることを示すことによつて，作圖しようとはしなかつた。）これをタンヌリは次の如く佛譯している。

Il n'y a pas une de ces lignes, pas même celle qui pourrait sembler la plus simple, pour laquelle on ait fait la synthèse et montré l'intérêt qu'elle peut présenter.（それらの線のうちの一つ，その最も單純であると思われるものに對してさえ，それを作圖してそれが表わすことの出來る利益を示そうとはしなかつた。） また「直線が五本與えられたとき最初に表われる最も明らかな線(軌跡)は何んであるか」の問に對してはデカルトは本書の第2卷（古代の人々の問題が五本の線に就て提出されたとき，用いられるすべての曲線のうちで最初（に表われる）最も簡單なものは何か）に於て解答を與えている。

これらの註釋に對しては吉田洋一先生並に松浪信三郎君に負う處が多大であることを特筆する。

(43) デカルトがパッポスの問題を解決したのは彼の「幾何学」出版の四年

前であり，彼はその解決の爲に五六週間かゝつたのである。これに就ては彼の書簡を見られたい。クーザン版デカルト全集6巻294頁，同巻224頁。

(44) これらの直線は位置が與えられているが長さは與えられていないことに注意しなければならない。

(45) 線分の CB, CD, CF, CH うちの二つ。

(46) proportion を比例と譯して比 (raison, rapport) と區別しなければならないが譯文に於ては全部比と譯しておいた。

(47) 他のすべての直線を BA を x軸，BC を y 軸とする座標系に關して考えようとするのである。これがデカルトの解析幾何学である。普通にデカルト座標といえば直角座標をさすが，必ずしもそうでないことは以下に見る如く斜交軸を用いていることからも明らかであろう。

Karl Fink, A Brief History of mathematics.(Beman, Smith による英譯) Chicago, 1903. 229頁に次の如くある．「デカルトの先達者を數えあげると Appolonius 以後は特に Vieta, Oresme, Cavalieri, Roberval, Fermat であるが，なかんずく Fermat は最も顯著であつた。しかし Fermat でさえも次數の異なる曲線を注目させるようなことはしなかつた。これは實は曲線の特徴を表わすものであつてデカルトが系統的に完成したところのものである。」と。

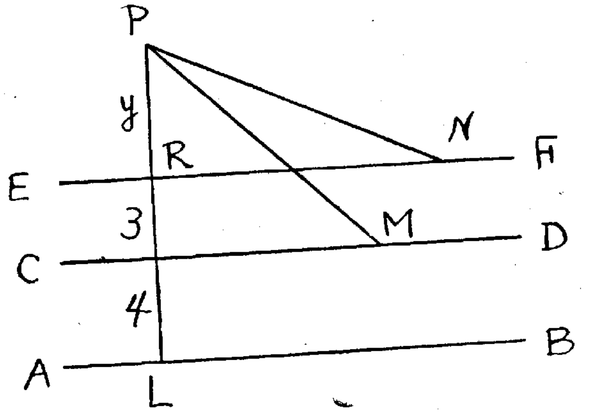
T. L. Heath (1861—1940，著名な古代數学史家) は次の事實に注意を喚起している。ギリシヤと現代の方法との間の本質的な差違はギリシヤ人は圖形に於て固定した線をできるだけ減らすように努力せずに，むしろ面積の間に存する方程式をできるだけ短かい簡単な形で表わすように努力したことであると。

以上についてはまたスミスの書物第2巻316 - 331頁參照のこと。

(48) Ax+By+C の形に書かれる。

(49) 簡單な例をあげよう。與えられた三本の平行線を AB, CD, EF とし AB, CD, EF とし AB は CD から 4, CD は EF から 3 離れているものとする。點 P を見出して，P を通る直線 PL, PM, PN をひき平行線とそれぞれ 90°, 45°, 30° の角をなさしめかつ $PM^2 = PL \cdot PN$ ならしめよ。

いま PR=y とすれば PN=2y, $PM=\sqrt{2}\,(y+3)$, PL=y+7, 故に



第A図

$PM^2 = PL \cdot PN$ より $[\sqrt{2}(y+3)]^2 = 2y(y+7)$ 故に $y=9$ となる。ラビュエルの書物79頁参照。

(50) $BC=y$ なるを以て CB はxで表わされない。いまCB, CD, CF, CH の外に CK とあるとき

$$CD = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$CF = a_2x + b_2y + c_2$$
$$CH = a_3x + b_3y + c_3,\ CK = a_4x + b_4y + c_4$$

とおけば，例えば

$$CB \cdot CD \cdot CF : l \cdot CH \cdot CK = p : q$$ （l及びp, q は一定）

なるとき，x に關して三次以上の項はあらわれず二次を越えることはない。

(51) $x^2 = \pm ax \pm b^2$

(52) ショーテンの書物では「或ハマタ1(次)」と補つている。

あとがき

学恩深い吉田洋一先生と畏友松浪信三郎君との慫慂によりデカルト幾何学全三巻を飜譯したのは昭和二十四年の春のことであつた。今こゝにそのうち第一巻だけを假に發表しておく。他日全巻を出版する機会に恵まれたならば，更に嚴密な校訂をほどこすつもりである。譯述上の誤謬と稚拙に對して大方諸賢の御示教を懇願して止まない。　(1954. 6. 10.)