素数定理における Selberg の公式

武　隈　良　一

§ 1.　序
§ 2.　有限個の和の大きさの位数に関する補題
§ 3.　Möbius の函数とそれに関連せる函数に関する補題
§ 4.　追加補題、Selberg の公式の証明
§ 5.　素数定理の初等的証明の証明
§ 6.　Selberg の証明

§ 1.　序

20世紀も半ばを過ぎると，数学も大きく変貌し転換期に立つているように思われる。それは数学の各分野における異常な発展において領かれるのであるが，ここに述べようとする素数定理の理論もその一たるを失わない。

というのは，これまでの素数定理の証明に新しく初等的方法が Selberg によつて大きく取入れられまさに一新紀元が劃されたことを意味する。一体これまでの解析的整数論においては余りにもその道具立てが大きすぎたように思われる。それはその価値をいささかも疑うものではないが，より平易に初等的に取扱うことが望まれておつたとき，Selberg の公式が輝かしく登場しその要望に答えたのである。蓋し 1950 年度 Field 賞が彼に授与されたのも当然といえよう。

以下 Erdös の論文〔4〕により Selberg の公式の由来を述べてみよう。

1948 年に先ず Selberg は次の漸近公式を証明した。

$$(1)\quad \sum_{p\leqq x}(\log p)^2+\sum_{pq\leqq x}\log p\ \log q=2x\log x+O(x)$$

ここに p 及び q は素数を動く。

この式の証明は当時未発表であり，これは勿論素数定理の直接の結果であるが，肝心なことは(1)に対するSelbergの天才的証明が全く初等的であるということである。これより解析的整数論における種々の定理の初等的証明が(1)を出発点としてなされることになり，それらは以前には到底初等的方法ではなされまいと思われたものであつた。

(1)を利用してErdösは $n\to\infty$ のとき $p_{n+1}/p_n\to 1$ なることを証明した。これをより強く述べると次のようになる。

すべての c に対して，x を十分大きくとれば

(2) $\pi[x(1+c)]-\pi(x)>\delta(c)x/\log x$

を満足する正数 $\delta(c)$ が存在する。ここに π x) は x を超えない素数の個数である。

この(2)の証明をErdösがSelbergに伝えたとき，2.日後にSelbergは(1)(2)及び(2)の証明のアイデアを用いて素数定理を次の形において証明した。

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\theta(x)}{x}=1$

ここに $\theta(x)=\sum\limits_{p\leqq x}\log p$

さらに数日の間にSelbergは(2)のErdösの証明を簡単化し，後に2人共同で素数定理の証明を簡単化した。その新しい証明は最早(2)を必要としないが(2)及び(3)の証明におけると同じアイデアを必要とした。これらの詳細は〔4〕にあるのでここには述べないが（(1)の力を借りずに誤差の項 $o(x\log x)$ を用いていることだけを注意しておこう）事実Selbergはさらに直接的な証明を得ているのである。

以上によりSelbergの公式と素数定理の証明の由来は分つたが、さてこれを如何に紹介するかが問題となる。ここでは初学者にも分り易いようにとNagellの書物〔6〕により以下に説明してみよう。§2から§5までがそれであり，最後に§6においてSelberg〔8〕自身の論文を紹介しておく。

§2. 有限個の和の大きさの位数に関する補題

x は整又は連続なる変数を表わし無限大までその値をとるものとする。いま g(x) が正なるとき，

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow o \qquad (x \longrightarrow \infty)$$

ならば $f(x)=o(g(x))$ と表わす。

例えば $x=o(x^2)$，$\sin x=o(\sqrt{x})$ と表わされ次の定理も得られる。

定理A。(S.17. T.28. p.59.)*

$$\pi(x)=o(x)$$

ここに $\pi(x)$ は x を超えない素数の個数を表わす。

定理B。(素数定理，S.16.F.(3). p.55.)

$$\pi(x)=\frac{x}{\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

次に

$$\frac{|f(x)|}{g(x)}<K \qquad (x \longrightarrow \infty)$$

ならば $f(x)=O(g(x))$ と表わす。ここにKは正の定数を表わすものとする。

例。$2x+\sqrt{x}=O(x)$，$\sin x=O(1)$，$\log x=O(\sqrt{x})$

定理C.。(S.17. F.(11). p.63.)

(1) $$\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1)$$

ここに和は x を超えない素数についてのみ行われるものとする。

この O，o なる記号は Landau が始めて使つたものである。

$f(x)=o(g(x))$ ならば勿論 $f(x)=O(g(x))$ であるが，逆は必ずしも成立しない。

以上は Landau 記号の使い方であるが，以下将来に必要な補題について述べよう。

補題 1。

---

* Nagell の原著，17節，定理28，59頁を表わす。以下同様。

(2)
$$\sum_{n\leqq y}\frac{1}{n}=\log y+\gamma+O\left(\frac{1}{y}\right)$$

なる式を満足する正の絶対定数γが存在する。ここに和は $n\leqq y$ なるすべての正整数について行われるものとする。

注意。数γは Euler の定数として知られているもので $\gamma=0.5772156\cdots\cdots$ である。

証明。y より大なる最小の整数を z とする。いま

$$\delta_n=\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

とおけば明らかに

(3)
$$\log z=\sum_{n=1}^{z-1}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{z-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{z-1}\delta_n$$

となり，対数の計算によれば

(4)
$$0<\delta_n<\frac{1}{2n^2}$$

なるを以て無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n$ は収斂しその和は正数γとなる。さらに

$$\sum_{n=z}^{\infty}\delta_n<\frac{1}{2}\sum_{n=z}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\frac{1}{2}\sum_{n=z}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2(z-1)}$$

なるを以て(3)より

$$\sum_{n=1}^{z-1}\frac{1}{n}=\log z+\gamma+\frac{\theta}{z}$$

となる。こゝにθは z の函数にして，$|\theta|$は正の定数より小である。この最後の式から(2)が導かれる。

補題 2。

(5)
$$\sum_{n\leqq y}\frac{\log n}{n}=\frac{1}{2}(\log y)^2+C+O\left(\frac{\log y}{y}\right)$$

なる式を満足する絶対定数 C が存在する。ここに和は $n\leqq y$ なるすべての正整数について行われるものとする。

証明。y より大なる最小の整数を z とする。明らかに

$$(\log z)^2=\sum_{n=1}^{z-1}\left[(\log(n+1))^2-(\log n)^2\right]$$

である。ここに〔……〕は Gauss の記号を表わす。また

$$\log(n+1)=\log n+\frac{1}{n}-\delta_n$$

なるを以て

$$\frac{1}{2}(\log z)^2=\sum_{n=1}^{z-1}\frac{\log n}{n}-\sum_{n=1}^{z-1}\left(\delta_n\log n+\frac{1}{n}\delta^n-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2}\delta_n^2\right)$$

となる。(4)により右辺の第二項は $z\to\infty$ のとき有限の C に収斂する。さらに

$$\left|\sum_{n=z}^{\infty}\left(\delta_n\log n+\frac{1}{n}\delta_n-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2}\delta_n^2\right)\right|$$

$$<\sum_{n=z}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}<\frac{\log z}{z^2}+\int_z^{\infty}\frac{\log x}{x^2}dx=\frac{\log z}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{\log z}{z}$$

なるを以て

$$\sum_{n=1}^{z-1}\frac{\log n}{n}=\frac{1}{2}(\log z)^2+C+O\left(\frac{\log z}{z}\right)$$

となる。ここに C は絶対定数にして，この式から直に(5)が得られる。

補題 3。 $\tau(n)$ を n の正約数の個数とすれば，

$$\sum_{n\leqq y}\frac{\tau(n)}{n}=\frac{1}{2}(\log y)^2+2\gamma\log y+\gamma^2-2C+O\left(\frac{\log y}{\sqrt{y}}\right)$$

となる。ここに和は $n\leqq y$ なるすべての正整数について行われる。また γ と C は補題 1 及び 2 と同じ絶対定数を表わす。

証明。 $\tau(n)$ は $ab=n$ なる如き自然数 a と b との対の個数に等しいので，

$$\sum_{n\leqq y}\frac{\tau(n)}{n}=\Sigma\frac{1}{ab}$$

となる。ここに右辺の和は $ab\leqq y$ なる如きすべての自然数 a と b について行われるものである。この和のうちで $a\leqq\sqrt{y}$ なる部分を S_1, $b\leqq\sqrt{y}$ なる部分を S_2, $a\leqq\sqrt{y}$ にして $b\leqq\sqrt{y}$ なる部分を S_3 で表わせば求める和は明らかに $S_1+S_2-S_3$ となる。いま $z=\sqrt{y}$, $t=\frac{y}{a}$ とおけば補題 1 及び 2 より，

$$S_1=\sum_{a\leqq z}\frac{1}{a}\sum_{b\leqq t}\frac{1}{b}=\sum_{a\leqq z}\frac{1}{a}\left[\log\frac{y}{a}+\gamma+O\left(\frac{a}{y}\right)\right]$$

$$=\log y\cdot\sum_{a\leqq z}\frac{1}{a}-\sum_{a\leqq z}\frac{\log a}{a}+\gamma\sum_{a\leqq z}\frac{1}{a}+O\left(\frac{1}{y}\right)\sum_{a\leqq z}1$$

$$=[\log y+\gamma]\left[\log z+\gamma+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}(\log z)^2-C+O\left(\frac{\log z}{z}\right)+O\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$=\frac{3}{8}(\log y)^2+\frac{3}{2}\gamma\log y+\gamma^2-C+O\left(\frac{\log y}{\sqrt{y}}\right)$$

となる。また明らかに $S_2=S_1$ であり，さらに補題1と2により

$$S_3=\left(\sum_{a\leqq z}\frac{1}{a}\right)^2=\left(\log z+\gamma+O\left(\frac{1}{z}\right)\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(\log y)^2+\gamma\log y+\gamma^2+O\left(\frac{\log y}{\sqrt{y}}\right)$$

なるを以て

$$\sum\frac{1}{ab}=S_1+S_2-S_3$$

$$=\frac{3}{4}(\log y)^2+3\gamma\log y+2\gamma^2-2C-\frac{1}{4}(\log y)^2$$

$$-\gamma\log y-\gamma^2+O\left(\frac{\log y}{\sqrt{y}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\log y)^2+2\gamma\log y+\gamma^2-2C+O\left(\frac{\log y}{\sqrt{y}}\right)$$

となる。

§ 3.　Möbius の函数とそれに関連せる函数に関する補題

Möbius の函数 $\mu(n)$ とは次のように定義された函数である。

$\mu(1)=1$

$\mu(n)=0$ ……………………… n が素数の平方で割切れるとき。

$\mu(p_1 p_2 \cdots\cdots p_r)=(-1)^r$ ……$p_1,p_2,\cdots\cdots p_r$ は異なる素数。

定理 1。(S.9. T.14. p.27.)

すべての自然数 $n>1$ に対して，$\sum_d \mu(d)=0$ が成立する。ここに和は n のすべての正約数について行われる。

さて Möbius の函数を用いて次の新しい函数を定義しよう。整数 $h\geqq0$ に対して

$$\varphi_h(n)=\sum_d \mu(d)\ (\log d)^h$$

ここに和は自然数 n のすべての正約数について行われる。また $(\log d)^0$ は 1 を表わす。

補題 4。 自然数 n が相異なる h 個以上の素数によつて割初れるならば

$$\varphi_h(n)=0$$

である。

証明。 h=0 のときは定理 1 により明らかに成立する。それ故 $h\geqq 1$ とする。数学的帰納法を用いよう。即ち上の式が $e\leqq h-1$ に対してまで成立していると仮定する。$n=p^\alpha m$ とおく，ここに $\alpha\geqq 1$ にして m は p によつて割れないものとする。しかるとき

$$\varphi_h(n)=\Sigma\mu(d)\ (\log d)^h$$
$$=\sum_{d_1}\sum_{d_2}\mu(d_1 d_2)\ (\log d_1+\log d_2)^h$$

最後の式における外側の和は m のすべての正約数 d_1 について行われ，内側の和は p^α のすべての正約数について行われるものである。

それ故

$$\varphi_h(n)=\sum_{s=0}^{h}\binom{h}{s}\sum_{d_1}\mu(d_1)\ (\log d_1)^s\sum_{d_2}\mu(d_2)\ (\mathrm{bog}\ d_2)^{h-s}$$
$$=\sum_{s=0}^{h}\binom{h}{s}\varphi_s(m)\ \varphi_{h-s}(p^\alpha)$$

となる。しかるに n は相異なる h 個以上の素数を有するのでmは相異なるh−1 個以上の素数を有する。それ故仮定により

$$\varphi_s(m)=0 \qquad s=0,\ 1,,\cdots\cdots,\ h-1$$

となる。従て残りの項は $\varphi_h(m)\varphi_0(p^\alpha)$ となるがこれの第二因数は 0 なるを以てやはり 0 となる。

補題 5。 x が正なるとき

$$\lambda(d)=\mu(d)\cdot\left(\log\frac{x}{d}\right)^2$$
$$f(n)=\sum_d\lambda(d)$$

とおく。ここに和は正整数 n のすべての正約数について行われる。しかるとき

$$f(1)=(\log x)^2$$

$$f(p^\alpha)=-(\log p)^2+2(\log x)(\log p)$$

となる。ここに p は素数にして $\alpha\geqq 1$ は整数である。また

$$f(p^\alpha q^\beta)=2(\log p)(\log q)$$

となる。ここに p と q とは相異なる素数にして，$\alpha\geqq 1$ 及び $\beta\geqq 1$ は整数である。

なお n が 3 つ又はそれ以上の相異なる素数によつて割切れるならば

$$f(n)=0$$

である。

証明は定義と補題 4（h=0，1，2）から直に得られる。

補題 6。すべての自然数 x に対して

$$\left|\sum_{d=1}^{x}\frac{\mu(d)}{d}\right|\leqq 1$$

が成立する。

証明。定理 1 より次の式が成立する。

$$1=\sum_{n=1}^{x}\sum_{d}\mu(d)$$

ここに内側の和は正整数 n のすべての正約数 d について行われる。しかして，$d\geqq 1$ の倍数で $\leqq x$ なるものの個数は $\left[\frac{x}{d}\right]$ なるを以て上式は次のように書きかえられる。

$$\sum_{d=1}^{x}\mu(d)\left[\frac{x}{d}\right]=1$$

となる。従て

$$\left|x\sum_{d=1}^{x}\frac{\mu(d)}{d}-1\right|=\left|\sum_{d=1}^{x}\mu(d)\left(\frac{x}{d}-\left[\frac{x}{d}\right]\right)\right|$$

$$\leqq\sum_{d=1}^{x}\left(\frac{x}{d}-\left[\frac{x}{d}\right]\right)\leqq x-1$$

故に

$$\left|x\sum_{d=1}^{x}\frac{\mu(d)}{d}\right|\leqq 1+x-1=x$$

これより補題 6 が得られる。

補題 7。すべての正数 x に対して

(1) $$\sum_{d\leqq x}\frac{\mu(d)}{d}\log\frac{x}{d}=O(1)$$

が成立する。ここに和は $d\leqq x$ なるすべての正数 d について行われる。

証明。補題 1 を応用すると左辺は

$$\sum_{d\leqq x}\frac{\mu(d)}{d}\left(\sum_{n\leqq t}\frac{1}{n}-\gamma+\theta_1\frac{d}{x}\right)$$

となる。ここに $t=\frac{x}{d}$ にして $|\theta_1|$ は正定数 C_1 よりも小である。いま $dn=m$ とおけば

$$\sum_{m\leqq x}\frac{1}{m}\sum_{\delta}\mu(\delta)-\gamma\sum_{d\leqq x}\frac{\mu(d)}{d}+\sum_{d\leqq x}\mu(d)\frac{\theta_1}{x}$$

となる。ここに δ は m のすべての正約数を動く。定理 1 により第 1 項は 1 となり，いま証明した補題 6 により第 2 項は絶対値が $\leqq\gamma$ となる。第 3 項の絶対値は高々 $\frac{c_1}{x}\sum_{d\leqq x}1=c_1$ なるを以て求める結果が得られる。

補題 8。すべての自然数 n に対して

(2) $$\sum_{d}\mu(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right)=1$$

が成立する。ここに和は n のすべての正約数 d について行われる。

証明。$\tau\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{\delta}1$ である。ここに和は $\frac{n}{d}$ のすべての正約数 δ について行われる。従て(2)の左辺は

$$\sum_{d}\mu(d)\sum_{\delta}1=\sum_{\delta}\sum_{\delta_1}\mu(\delta_1)$$

ここに右辺における内側の和は $\frac{n}{\delta}$ のすべての正約数について行われる。定理 1 により $\delta\neq n$ のときこの内側の和は 0 となり，$\delta=n$ のとき 1 に等しい。それ故右辺は 1 に等しい。　Q, E. D.

補題 9。すべての正数 x に対して

(3) $$\sum_{d\leqq x}\frac{\mu(d)}{d}\left(\log\frac{x}{d}\right)^2=2\log x+O(1)$$

が成立する。ここに和は $d\leqq x$ なるすべての正数 d について行われる。

証明。補題 3 において $y=\frac{x}{d}$ とおけば，(3)の左辺は次のようになる。

$$2\sum_{d\leqq x}\frac{\mu(d)}{d}\left[\sum_{nd\leqq x}\frac{\tau(n)}{n}-2\gamma\log\frac{x}{d}-\gamma^2+2C\right]$$

$$+\sum_{d\leqq x}\frac{\mu(d)}{d}\left(\theta\left(\frac{d}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\log\frac{x}{d}\right)$$

ここに $|\theta|$ は正定数 C_2 より小である。十分大きな x に対して最後の項の絶対値は

$$4C_2\sum_{d\leqq x}\frac{1}{d}\left(\frac{d}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{1}{4}}=x^{-\frac{1}{4}}O\left(\sum_{d\leqq x}d^{-\frac{3}{4}}\right)$$

$$=x^{-\frac{1}{4}}O\left(\int_1^x z^{-\frac{3}{4}}dz\right)=O(1)$$

より小さい。さらに $k=nd$ とおけば,

$$S=2\sum_{d\leqq x}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k\leqq x}\frac{\tau(n)}{n}=2\sum_{k\leqq x}\frac{1}{k}\sum_{d}\mu(d)\tau\left(\frac{k}{d}\right)$$

となる。ここに右辺の内側の和は k のすべての正約数について行われる。故に補題 8 と 1 により

$$S=2\log x+O(1)$$

となる。最後に補題 7 と 6 を応用すると，式(3)の左辺は

$$2\log x+O(1)$$

に等しくなる。これで補題 9 が証明された。

§ 4.　追加補題，Selberg の公式の証明

函数 $\pi(x)$ を考える代りにしばしば次の函数を考える方が便利である。

$$\theta(x)=\sum_{p\leqq x}\log p$$

ここに和は $p\leqq x$ なるすべての素数 p について行われる。この $\theta(x)$ に関しては次の Chebyshev の定理が成立している。

定理 2。（S.17 T.30. p.60.）

$$cx<\theta(x)<c_1x$$

を満足する 2 つの正定数 c，c_1 が存在する。但し $x\geqq 2$ とす。

この定理を用いて次の補題が証明される。

補題10。

(1) $$\sum_{p\leqq x}(\log p)\left(\log\frac{x}{p}\right)=o(\log x)$$

ここに和は $p\leqq x$ なるすべての素数 p について行われる。

証明。 $y=\dfrac{x}{\log x}$ とおき(1)の左辺を分けて考える。即ち

$$\sum_{p\leqq y}(\log p)\left(\log\frac{x}{p}\right)+\sum_{p>y}^{p\leqq x}(\log p)\left(\log\frac{x}{p}\right)$$
$$<(\log x)\sum_{p\leqq y}\log p+(\log\log x)\sum_{p\leqq x}\log p$$
$$=(\log x)\,\theta\left(\frac{x}{\log x}\right)+(\log\log x)\,\theta(x)$$

これに定理2を用いるとこの函数は大きさの位数として $O(x\log\log x)$ を有することになる。これは(1)より幾分良い結果である。

補題11。 α を自然数とするとき，和を $p^{\alpha}\leqq x$ なるすべての素数 p^{α} について行えば

(2) $$\Sigma'\log p=O(x)$$

が成立する。

証明。 左辺の和は明らかに

$$\theta(x)+\theta(\sqrt{x})+\theta(\sqrt[3]{x})+\cdots\cdots+\theta(\sqrt[k]{x})$$

に等しい。ここに k は $2^{k}\leqq x$ を満足する最大の整数である。それ故 $k\leqq\dfrac{\log x}{\log 2}$ である。和は高々

$$\theta(x)+k\theta(\sqrt{x})$$

に等しい。それ故定理2から大きさの位数は

$$O(x)+\frac{\log x}{\log 2}O(\sqrt{x})=O(x)$$

となる。

補題12。 $f(n)$ を補題5において定義した函数とすればそれについて次の等式が成立する。

$$\sum_{n\leqq x}f(n)=(\log x)\theta(x)+2\sum_{p\leqq y}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p+o(x\log x)$$

ここに左辺における和は $n\leqq x$ なるすべての整数 n について行われる。また右辺における和は $p\leqq y=\sqrt{x}$ なるすべての素数 p について行われる。

証明。補題 5 より次式が導かれる。

(3)
$$\sum_{n\leqq x} f(n)=(\log x)^2+\Sigma\Bigl(2(\log x)(\log p)-(\log p)^2\Bigr)$$
$$+2\Sigma(\log p)(\log q)$$

右辺における第 2 項の和は $p^\alpha\leqq x$ なるすべての素数巾 p^α について行われ，αは自然数である。第 3 項の和は $p^\alpha q^\beta\leqq x$ にして $p<q$ なるすべての素数巾p^αと q^β について行われ，α，βは自然数である。

第 2 項の和においてまず $\alpha\geqq 2$ なるもののみを考えよう。いま $p^\alpha\leqq x$, $\alpha\leqq 2$ なる素数巾の個数を $g(x)$ で表わせばそれらに関する和は高々に次のようになる。

$$2(\log x)^2 g(x)\leqq 2(\log x)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\cdots\cdots+\sqrt[k]{x}\right)$$

ここに k は $2^k\leqq x$ なる最大の整数である。それ故和は

$$2(\log x)^2 k\sqrt{x}\leqq 2(\log x)^2\frac{\log x}{\log 2}\sqrt{x}=o(x\log x)$$

を超えない。

次に $\alpha=1$ の場合を考えると補題10により

$$\sum_{p\leqq x}(21\log x)(\log p)-(\log p)^2)$$
$$=(\log x)\sum_{p\leqq x}\log p+\sum_{p\leqq x}(\log p)\left(\log\frac{x}{p}\right)$$
$$=(\log x)\theta(x)+o(x\log x)$$

となる。故に両者を合計して第 2 項の和は

(4)　$$(\log x)\theta(x)+o(x\log x)$$

となる。

第 3 項の和を求めるために補題11において x の代りに $\frac{x}{q^\beta}$ とおけば，$\beta\geqq 2$, $\alpha\geqq 1$ なる和は大きさの位数として

$$\Sigma\log q\cdot O\left(\frac{x}{q^\beta}\right)=O(x)\,\Sigma\frac{\log q}{q^\beta}=O(x)$$

を有する。ここにすべての素数 q に関する無限級数 $\sum_{2}^{\infty}\frac{\log q}{q^{\beta}}$ は明らかに収斂する，それは $\beta\geqq 2$ であるから。それ故第3項の和は

(5)　$2\Sigma(\log p)(\log q)+O(x)$

となる。ここに和は $pq\leqq x$，$p<q$ なるすべての素数 p,q について行われる。いま $y=\sqrt{x}$ とおけばこの和は

$$\sum_{pq\leqq x}(\log p)(\log q)-\sum_{p\leqq y}(\log p)^2$$
$$=\sum_{\substack{p\leqq y\\ pq\leqq x}}(\log p)(\log q)+\sum_{\substack{q\leqq y\\ pq\leqq x}}(\mathrm{loy}\, p)(\log q)$$
$$-\sum_{\substack{p\leqq y\\ q\leqq y}}(\log p)(\log q)-\sum_{p\leqq y}(\log p)^2$$

となる。定理2によれば最後の2項は大きさの位数として高々

$$(\theta(\sqrt{x}))^2=O(x)$$
$$(\log\sqrt{x})\theta(\sqrt{x})=O(\sqrt{x}\log x)$$

を有するので(5)は次のようになる。

$$\sum_{p\leqq y}(\log p)\theta\left(\frac{x}{p}\right)+\sum_{q\leqq y}(\log q)\theta\left(\frac{x}{q}\right)+O(x)$$
$$=2\sum_{p\leqq y}(\log p)\theta\left(\frac{x}{p}\right)+O(x)$$

この式と(4)を(3)に代入することによつて補題12が得られる。

さていよいよ Selberg の基本公式を述べよう。

Selberg の定理。 $y=\sqrt{x}$ とおけば

$$\theta(x)\log x+2\sum_{p\leqq y}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p-2x\log x=o(x\log x)$$

となる。

証明。 補題12を用いると左辺は

$$\sum_{n\leqq x}f(n)-2x\log x+o(x\log x)$$

に等しい。補題5の $f(n)$ の定義によれば

$$S=\sum_{n\leqq x}f(n)=\sum_{n\leqq x}\sum_{d}\lambda(d)$$

にして，ここに内部の和は n のすべての正約数 d について行われる。故に

$$S=\sum_{d\leqq x}\lambda(d)\left[\frac{x}{d}\right]=\sum_{d\leqq x}\lambda(d)\left(\frac{x}{d}-\varepsilon_d\right)$$

ここに $o\leqq\varepsilon_d<1$。いま $z=\dfrac{x}{(\log x)^2}$ とおけば

$$\sum_{d\leqq x}\left|\lambda(d)\right|\leqq\sum_{d\leqq x}\left(\log\frac{x}{d}\right)^2=\sum_{d\leqq z}\left(\log\frac{x}{d}\right)^2+\sum_{d>z}\left(\log\frac{x}{d}\right)^2$$

$$\leqq z(\log x)^2+4x(\log\log x)^2=O(x)+O(x(\log\log x)^2)=o(x\log x)$$

故に　$S=\sum_{d\leqq x}\lambda(d)\dfrac{x}{d}+o(x\log x)$

$$=\sum_{d\leqq x}x\frac{\mu(d)}{d}\left(\log\frac{x}{d}\right)^2+o(x\log x)$$

となり，補題9により

$$S=2x\ \log x+o(x\log x)$$

となる。

これで Selberg の定理が証明されたことになる。

§ 5. 素数定理の初等的証明

以上ですべての準備は完了したのであるが，素数定理が次の命題

(1)　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\theta(x)}{x}=1$

と同値であることは周知の事実である。(S.17. F.(13). p.63)

定理2により $\dfrac{\theta(x)}{x}$ は x の増加につれて下限 a と上限 A を有し，$o<a\leqq A$ なるを以て(1)を証明する代りに

(2)　$a=A=1$

を証明しよう。以下の証明は Selberg の公式を基礎においているのであるが，この公式を次のように変形しておく。

(3)　$\dfrac{\theta(x)}{x}+\dfrac{2}{x\log x}\sum\limits_{p\leqq y}\theta\left(\dfrac{x}{p}\right)\log p-2=o(1)$

ここに和は $p\leqq y=\sqrt{x}$ なるすべての素数について行われる。なお定理 C の公

式も必要とするので再掲しておく。

(4) $$\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1)$$

ここに和は $p\leqq x$ なるすべての素数について行われる。

先ず補題から片付けていこう。

補題13。 $\limsup_{x\to\infty}\frac{\theta(x)}{x}=A$ にしてかつ $\liminf_{x\to\infty}\frac{\theta(x)}{x}=a$ ならば

(5) $$A+a=2$$

である。

証明 $\frac{\theta(x)}{x}$ が A に収斂するように x を無限大に近づけることは可能である。また ε を与えられた正数とすれば，十分大きなすべての x とすべての素数 $p\leqq y=\sqrt{x}$ に対して

$$\theta\left(\frac{x}{p}\right)>(a-\varepsilon)\frac{x}{p}$$

が成立する。従て

$$\frac{2}{x\log x}\sum_{p\leqq y}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p\geqq\frac{2(a-\varepsilon)}{\log x}\sum_{p\leqq y}\frac{\log p}{p}$$

となる。(4)によりこの不等式の右辺は $x\to\infty$ のとき $a-\varepsilon$ に収斂する。それ故(3)を用いると，$2-A\geqq a-\varepsilon$ となる。これはすべての正数 ε に対して成立するので

(6) $$A+a\leqq 2$$

が得られる。

一方 $\frac{\theta(x)}{x}$ が a に収斂するように x 無限大に近づけることが可能である。また ε を与えられた数とすれば，十分大きなすべての x とすべての素数 $p\leqq y=\sqrt{x}$ に対して

$$\frac{\theta(x)}{x}<(A+\varepsilon)\frac{x}{p}$$

が成立する。従て

$$\frac{2}{x\log x}\sum_{p\leqq y}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p\leqq\frac{2(A+\varepsilon)}{\log x}\sum_{p\leqq y}\frac{\log p}{p}$$

となる。(4)によりこの不等式の右辺は $x\to\infty$ のとき $A+\varepsilon$ に収斂する。それ故(3)を用いると，$2-a\leqq A+\varepsilon$ となる。これはすべての正数 ε に対して成立するので

$$A+a\geqq 2$$

が得られる。この不等式と(6)により(5)が導かれる。

以下においてはつねに $\dfrac{\theta(x)}{x}$ がAに収斂するように変数 x が無限大に近づくものとする。

補題14。λはaより大なる与えられた数とし，次の和

$$S(x)=\Sigma'\frac{\log p}{p}$$

が $p\leqq x$ と $\theta\left(\dfrac{x}{p}\right)\geqq\dfrac{\lambda x}{p}$ を満足するすべての素数 p について行われるものとする。しかるとき商 $\dfrac{S(x)}{\log x}$ は $x\to\infty$ のとき o に収斂する。

証明。$y=\sqrt{x}$ とおくことによつて

$$\sum_{p\leqq x}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p=\sum_{p\leqq x}\log p\sum_{pq\leqq x}\log q$$

$$=\sum_{p\leqq y}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p+\sum_{q\leqq y}\theta\left(\frac{x}{q}\right)\log q-\left(\sum_{p\leqq y}\log p\right)^2$$

$$=2\sum_{p\leqq y}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p-(\theta(\sqrt{x}))^2$$

となる。定理2によつて最後の項は位数 O(x) を有する。この式を用いて Selberg の公式(3)を次のようにかきかえる。

(7)　$$\frac{\theta(x)}{x}+\frac{1}{x\log x}\sum_{p\leqq x}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p-2=o\ (1)$$

ε を正の数とすれば，ε に従属する或数 u を超えるすべての $\dfrac{x}{p}$ に対して

$$\theta\left(\frac{x}{p}\right)>(a-\varepsilon)\frac{x}{p}$$

となる。従て $\dfrac{x}{p}\leqq u$ なるすべての素数 p に対して

(8)　$$\theta\left(\frac{x}{p}\right)>(a-\varepsilon)\frac{x}{p}-b$$

が成立するような正数 b が存在する。ここに b は u に従てまた ε に従属している。この不等式はすべての $p\leqq x$ に対して成立している。

いま $\theta\left(\frac{x}{p}\right)\geqq\frac{\lambda x}{p}$ なる如きすべての素数 $p\leqq x$ に対して和 Σ' を考えれば

$$(9)\qquad \Sigma'\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p\geqq\lambda x\Sigma'\frac{\log p}{p}$$
$$>(\lambda-a)x\,\Sigma'\frac{\log p}{p}+(a-\varepsilon)x\,\Sigma'\frac{\log p}{p}$$

となる。また $\theta\left(\frac{x}{p}\right)<\frac{\lambda x}{p}$ なる如きすべての素数 $p\leqq x$ に対して和 Σ'' を考えれば(8)により

$$(10)\qquad \Sigma''\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p>(a-\varepsilon)x\Sigma''\frac{\log p}{p}-b\theta(x)$$

となる。(9)と(10)により

$$\sum_{p\leqq x}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p=\Sigma'\theta(x)\log p+\Sigma''\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p$$
$$>(a-\varepsilon)x\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p}+(\lambda-a)x\,\Sigma'\frac{\log p}{p}-b\theta(x)$$

これを(7)に代入すると，$\frac{\theta(x)}{x}$ が A に収斂するように無限大に近づく x の値に対して，次の式が成立する。それには(4)を用いる。

$$A+(a-\varepsilon)+(\lambda-a)\limsup_{x\to\infty}\frac{\Sigma'\frac{\log p}{p}}{\log x}\leqq 2$$

ここで $a+A=2$ を用いると

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\Sigma'\frac{\log p}{p}}{\log x}\leqq\frac{\varepsilon}{\lambda-a}$$

しかるに $\lambda-a>0$ にして，ε は任意に小さく選ぶことが出来るので補題は成立する。

補題15。 $\mu<A$ が与えられた正数で，

$$p\leqq\sqrt{x},\quad q\leqq\sqrt{\frac{x}{p}},\quad \bar{\theta}\left(\frac{x}{pq}\right)\leqq\frac{\mu x}{pq}$$

を満足するすべての素数pとqに対して次の和を考える。

$$R(x)=\Sigma'\left(\frac{\log p}{p}\right)\left(\frac{\log q}{q}\right)$$

しかるとき商 $\dfrac{R(x)}{(\log x)^2}$

は $x\to\infty$ のときoに収斂する。

証明。 Selberg の公式においてxの代りに $\dfrac{x}{p}$ とおけば，$\tau=\sqrt{\dfrac{x}{p}}$ とおくことによつて

$$\theta\left(\frac{x}{p}\right)=\frac{2x}{p}+o\left(\frac{x}{p}\right)-\frac{2}{\log\frac{x}{p}}\sum_{q\leqq\tau}\theta\left(\frac{x}{pq}\right)\log q$$

が成立する。この式を Selberg 公式における $\theta\left(\dfrac{x}{p}\right)$ に代入すると $y=\sqrt{x}$ とおくことによつて次式が得られる。

$$\theta(x)=2x+o(x)-\frac{2x}{\log x}\sum_{p\leqq y}\frac{\log p}{p}(2+o(1))+\frac{4V}{\log x}$$

ここに

$$V=\sum_{p,\ q}\theta\left(\frac{x}{pq}\right)\frac{(\log p)(\log q)}{\log\frac{x}{p}}$$

にして，この和は $p\leqq\sqrt{x}$，$q\leqq\sqrt{\dfrac{x}{p}}$ なるようなすべての素数pとqについて行われるものとする。しかるに(4)により

$$\sum_{p\leqq y}\frac{\log p}{p}=\frac{1}{2}\log x+O(1)$$

なるを以て，これを上式に代入すれば

$$\theta(x)=\frac{4V}{\log x}+o(x)$$

となる。和Vの各項において $p\leqq\sqrt{x}$，$q\leqq\sqrt{\dfrac{x}{p}}$ なるを以て $pq=p^{\frac{1}{2}}(pq^2)^{\frac{1}{2}}\leqq x^{\frac{3}{4}}$ となる。それ故 δ を正数とすれば

$$\theta\left(\frac{x}{pq}\right)<(A+\delta)\frac{x}{pq}$$

が十分大きいxに対して成立する。

いま　　$V=\Sigma'+\Sigma''$

とかき，第1項は $p\leqq\sqrt{x}$，$q\leqq\sqrt{\dfrac{x}{p}}$，$\theta\left(\dfrac{x}{pq}\right)\leqq\dfrac{\mu x}{pq}$ なるすべての素数

p，q についての和とし，第2項は $p\leqq\sqrt{x}$，$q\leqq\sqrt{\frac{x}{p}}$，$\theta\left(\frac{x}{pq}\right)>\frac{\mu x}{pq}$ なるすべての素数 p，q についての和とする。しかるとき

$$V\leqq\mu x\Sigma'\frac{1}{\log\frac{x}{p}}\cdot\frac{\log p}{p}\cdot\frac{\log q}{q}$$
$$+(A+\delta)x\Sigma''\frac{1}{\log\frac{y}{p}}\frac{\log p}{p}\cdot\frac{\log q}{q}$$

となる。ここに和は上に述べたようにとる。

これより次式が得られる。

$$V\leqq(A+\delta)xW-(A+\delta-\mu)x\Sigma'\frac{1}{\log\frac{x}{p}}\frac{\log p}{p}\cdot\frac{\log q}{q}$$

ここに

$$W=\sum_{p,q}\frac{1}{\log\frac{x}{p}}\frac{\log p}{p}\frac{\log q}{q}=\sum_{p\leqq y}\frac{1}{\log\frac{x}{p}}\frac{\log p}{p}\sum_{q\leqq\tau}\frac{\log q}{q}$$

にして和は $p\leqq y=\sqrt{x}$ なるすべての素数 p と $q\leqq\tau=\sqrt{\frac{x}{p}}$ なるすべての素数について行われる。(4)を用いると

$$W=\sum_{p\leqq y}\frac{\log p}{p}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)=\frac{1}{4}\log x+o(\log x)$$

なるを以て

$$\theta(x)\leqq(A+\delta)x-\frac{4}{\log x}(A+\delta-\mu)x$$
$$\times\Sigma'\frac{1}{\log\frac{x}{p}}\frac{\log p}{p}\frac{\log q}{q}+\eta x$$

ここに η は $x\to\infty$ のとき o に収斂する。これより

$$\frac{4}{(\log x)^2}(A+\delta-\mu)\Sigma'\frac{\log p}{p}\cdot\frac{\log q}{q}$$
$$\leqq A+\delta-\frac{\theta(x)}{x}+\eta$$

となる。ここに和は補題 15 におけるものである。故に $\frac{\theta(x)}{x}$ が A に収斂する

ように無限大に近づく x に対して

$$\lim_{x\to\infty}\sup \frac{1}{(\log x)^2}\Sigma' \frac{\log p}{p}\frac{\log q}{q} \leqq \frac{\delta}{4(A-\mu)}$$

となる。$A-\mu>0$ にして δ は任意の正数なるを以て補題は証明されたことになる。

さて補題13, 14, 15 により次の式

(11)　$a=A=1$

を証明することが容易になつた。

いま $A>a$ としよう。σ を $\sigma a<A$ を満足する正数>1とする。そして δ を

(12)　$A-a\sigma\geqq\delta\sigma+2\delta$

を満足する小さい正数とする。また N を自然数として次の和を考えよう。

$$S=\Sigma_2 \frac{\log p}{p}\cdot\frac{\log q}{q}\Sigma_3\frac{\log r}{r}$$

ここに Σ_2 は

$$p\leqq\sqrt{x},\ q\leqq\sqrt{\frac{x}{p}},\ pq\geqq N,\ \theta\left(\frac{x}{pq}\right)\geqq(A-\delta)\frac{x}{pq}$$

を満足するすべての素数 p, q について行われ Σ_3 は

$$\frac{pq}{\sigma}<r\leqq\sigma pq$$

を満足するすべての素数 r について行われる。もしかかる素数 r が存在しなければ和 $\Sigma_3=0$ である。

和 Σ_3 における各項に対して，x が十分大なるとき

$$r\leqq\sigma pq=\sigma p^{\frac{1}{2}}(pq^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqq\sigma x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}}=\sigma x^{\frac{3}{4}}\leqq x$$

を得る。また同じ各項に対して x が十分大なるとき次の不等式

(13)　$\theta\left(\frac{x}{r}\right)>(a+\delta)\frac{x}{r}$

の成立することを証明しよう。この不等式は，(12)により

$$\theta\left(\frac{x}{r}\right) \geqq \theta\left(\frac{x}{pq}\right) \geqq (A-\delta)\frac{x}{pq} > (A-\delta)\frac{x}{\sigma r} \geqq (a+\delta)\frac{x}{r}$$

が成立するので，まず $r \leqq pq$ なるすべての r に対して成立する。

次に $r > pq$ なる項について考えよう。

$\dfrac{x}{r}=u$, $\dfrac{x}{pq}=v$ とおくと $u < v \leqq \sigma u$ となる。

そこで Selberg の公式

$$(\log x)\theta(x)+2\sum_{p\leqq y}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\log p$$

$=2x\log x+o(x\log x)$　但し$y=\sqrt{x}$，において $x=v$ とおいた式から $x=u$ とおいた式を引くと

$$(\log v)\theta(v)-(\log u)\theta(u)$$
$$\leqq 2v\log v-2u\log u+o(u\log u)$$

即ち

$$\theta(u) \geqq \frac{\log v}{\log u}\theta(v)-2(v-u)-2v\frac{\log v-\log u}{\log u}+o(u)$$

が得られる。故に

$$\theta(u) > (A-\delta)v-2(v-u)+o(u)$$
$$=2u-(2-A+\delta)v+o(u)$$

となり，$a+A=2$, $A-a\sigma \geqq \delta\sigma+2\delta$ を代入すると

$$\theta(u) > (a+2\delta)u+o(u)$$

となる。それ故 x が十分大ならば

$\theta\left(\dfrac{x}{r}\right)=\theta(u) > (a+\delta)u=(a+\delta)\dfrac{x}{r}$ となり，すべての r に対して不等式(13)が証明されたことになる。

従て　$S \leqq \sum\limits_{r}\dfrac{\log r}{r}\Sigma_4\dfrac{\log p}{p}\dfrac{\log q}{q}$

となり，ここに和は $r \leqq x$ にして $\theta\left(\dfrac{x}{r}\right) \geqq (a+\delta)\dfrac{x}{r}$ なるすべての素数 r について行われる。また Σ_4 は $p \leqq \sqrt{x}$，$q \leqq \sqrt{\dfrac{x}{p}}$，$\dfrac{r}{\sigma} \leqq pq < \sigma r$ なるすべての素数 p 及び q について行われる。それ故 $y=\sqrt{x}$，$t=\dfrac{\sigma r}{p}$ とおくことによ

つて

$$\Sigma_4 \frac{\log p}{p} \frac{\log q}{q} \leqq \frac{\sigma}{r} \sum_{p \leqq y} \log p \sum_{q \leqq t} \log q$$

$$= \frac{\sigma}{r} \sum_{p \leqq y} (\log p)\, \theta\left(\frac{\sigma r}{p}\right) < c_1 \sum_{p \leqq y} \frac{\log p}{p} < c_2 \log x$$

が成立する。ここに c_1 と c_2 は正の定数である。従て

$$S \leqq c_2 \log x \Sigma \frac{\log r}{r}$$

となる。ここに和は $r \leqq x$ にして $\theta\left(\frac{x}{r}\right) \geqq (a+\delta)\frac{x}{r}$ なるすべての素数 r

について行われる。補題14により

(14) $S = \eta_1 (\log x)^2$

が得られ，ここに η_1 は $x \to \infty$ のとき o に収斂する。

さて次の和を考えよう

$$T = \Sigma \frac{\log p}{p} \frac{\log q}{p}$$

ここに和は

$$p \leqq \sqrt{x},\ q \leqq \sqrt{\frac{x}{p}},\ pq \geqq N$$

なるすべての素数 p, q について行われる。

$y = \sqrt{x}$，$z = \sqrt[4]{x}$，$n = \sqrt{N}$ とおくと

$$T \geqq \left(\sum_{p \geqq n}^{p \leqq y} \frac{\log p}{p}\right)\left(\sum_{q \geqq n}^{q \leqq z} \frac{\log q}{q}\right)$$

なるを以て(4)により

(15) $T > c_3 (\log x)^2$

となる。ここに c_3 は正定数である。

$$T = \Sigma_2 \frac{\log p}{p} \frac{\log q}{q} + \Sigma'_2 \frac{\log p}{p} \frac{\log q}{q}$$

とおき，ここに後者の和は

$$p \leqq \sqrt{x},\ q \leqq \sqrt{\frac{x}{q}},\ \theta\left(\frac{x}{pq}\right) < (A-\delta)\frac{x}{pq}$$

を満足するすべての素数p，qについて行われるものとする。この後者の和は補題15により $\eta_2(\log x)^2$ に等しく，η_2 は $x\to\infty$ のとき o に収斂する。故に

$$\Sigma_2 \frac{\log p}{p}\frac{\log q}{q} = T - \eta_2(\log x)^2$$

となり(15)の不等式を用いると

$$\Sigma_2 \frac{\log p}{p}\frac{\log q}{q} > \frac{1}{2}c_3(\log x)^2 \tag{16}$$

が x の十分大きな値に対して成立する。

和 Σ_2 においていまxの値を固定し，和 $\Sigma_3 \frac{\log r}{r}$ がその極小値 μ，μ は x にのみ従属している，をとるような素数p，qについて考えることにする。

しかるとき(16)によつて

$$S \geqq \mu\Sigma_2 \frac{\log p}{p}\frac{\log q}{q} > \frac{1}{2}\mu c_3(\log x)^2$$

となる。この結果を不等式(14)と比較するならば $x\to\infty$ に対して

$$\mu = \Sigma_3 \frac{\log r}{r} \longrightarrow o$$

となる。従てすべての正数 ε とすべての自然N数に対して

$$\sum_{r\sigma>t}^{r\leqq\sigma t} \frac{\log r}{r} < \varepsilon$$

を満足する数 $t=pq\geqq N$ が対応する。ここに和は $>\frac{t}{\sigma}$ にして $\leqq\sigma t$ なるすべての素数 r について行われる。故にこれより

$$\sum_{r\sigma>t}^{r\leqq\sigma t} \log r < \varepsilon\sigma t$$

にして

$$\theta(\sigma t) - \theta\left(\frac{t}{\sigma}\right) < \varepsilon\sigma t \tag{17}$$

となる。もしN従てtが十分大ならば，

$$\theta(\sigma t) > (a-\varepsilon)\sigma t$$

にして　$\theta\left(\frac{t}{\sigma}\right) < (A+\varepsilon)\frac{t}{\sigma}$

なるを以て(17)より

$$(a-\varepsilon)\sigma-\frac{A+\varepsilon}{\sigma}<\varepsilon\sigma$$

となる。この不等式はすべての正数 ε に対して成立する。故に $a\sigma^2-A\leqq 0$ となる。一方 $a\sigma<A$ にして $a>0$ である。

故にすべての数 $\sigma<\frac{A}{a}$ は $\sigma^2<\frac{A}{a}$ なる性質をもつ。もし σ が $\frac{A}{a}$ に収斂すれば，$\left(\frac{A}{a}\right)^2\leqq\frac{A}{a}$ 即ち $\frac{A}{a}\leqq 1$ となる。しかるに $a\leqq A$，$a+A=2$ なるを以て明らかに $a=A=1$ となる。　　　Q.E.D

上の証明における新しい基礎事項は漸近公式(3)（Selbergの定理)である。この公式から素数定理を導く方法は幾通りもある(例えば〔2〕を見よ)。Selberg の最初の証明は1948年に得られた。本節で述べた証明はそれに関連するものであつて，van der Corput による説明と1948年における Erdös の講演〔5〕のノートに基礎をおいている。Selberg が1949年に出版した論文〔8〕においては基礎公式(3)から素数定理を導くのに他の方法を用いている。

上に述べられた証明においては解析学における概念と結論の応用を完全に避けるように修正されている。

Selberg のアイデアにより，素数の理論はまさに新時代を迎えているといえよう。

§ 6.　Selberg の証明

Selberg の論文〔8〕における彼自身の証明と最初の証明を述べてみよう。

証明が初等的であるというのは解析学を用いないでただ対数の性質を用いるだけという意味である。素数定理を次の形

(1)　$$\lim_{x\to\infty}\frac{\theta(x)}{x}=1 \qquad (x>0)$$

(2)　$$\theta(x)=\sum_{p\leqq x}\log p$$

で証明しようとするのである。証明における新しい基礎事項は次の漸近公式である。

(3)　$$\theta(x)\log x+\sum_{p\leqq x}\log p\,\theta\left(\frac{x}{p}\right)=2x\log x+O(x)$$

この公式から素数定理を導く方法は幾通りもあるが，後に述べようとする **Selberg** の方法は現在最も直接的であり最も初等的なものである。というのは上限下限の概念を避けておるからである。しかしその方法は **Selberg** が最初に得た証明ではない。

Selberg の始めの証明はこれとは異なり，**P. Erdös** の結果を用いたものである。ここに **Erdös** の結果とは次のものである。

任意の正の定められた数 δ に対して，x と $x+\delta x$ との間にある素数の個数が $K(\delta)x/\log x$ 以上になるような，$K(\delta)>0$ と $x_0=x_0(\delta)$，$x>x_0$ とが存在する。

Selberg の最初の証明は以下次の通りである。

先ず

$$\underline{\lim}\frac{\theta(x)}{x}=a,\qquad \overline{\lim}\frac{\theta(x)}{x}=A$$

なる記号を導入し，良く知られた結果

(4)　$$\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1)$$

を用いて(3)から容易に

(5)　$a+A=2$

を導く。次に x を十分大きくとり

$$\theta(x)=ax+o(x)$$

を用いることにより(3)を変形して

(6)　$$(\theta(x)-ax)\log x+\sum_{p\leqq x}\log p\left(\theta\left(\frac{x}{p}\right)-A\frac{x}{p}\right)=O(x)$$

が得られる。次に

$$\Sigma\ \frac{\log p}{p}=o(\log x)$$

になるような素数 $\leqq x$ の除かれた集合以外については，定められた正数 δ に対して

(7) $$\theta\left(\frac{x}{p}\right)>(A-p)\frac{x}{p}$$

が成立する。また

$$\theta(x')=Ax'+o(x')$$

を満足し　$\sqrt{x}<x'<x$

なる x' が存在する。(6)において a と A とをいれかえ x' を x と置きかえれば

(8) $$\theta\left(\frac{x'}{p}\right)<(a+\delta)\frac{x'}{p}$$

が　$$\Sigma\frac{\log p}{p}=o(\log x)$$

になるような素数 $\leqq x$ の除かれた集合以外に対して成立する。

Erdös の結論から

$$\frac{x}{p}<\frac{x'}{p'}<(1+\delta)\frac{x}{p}$$

なる除外集合のいずれにも属さない素数 p と p' を選ぶことが出来る。それ故(7)と(8)とから

$$(A-\delta)\frac{x}{p}<\theta\left(\frac{x}{p}\right)\leqq\theta\left(\frac{x'}{p'}\right)$$
$$<(a+\delta)\frac{x'}{p'}<(a+\delta)(1+\delta)\frac{x}{p}$$

それ故

$$A-\delta<(a+\delta)(1+\delta)$$

δ を o に近づけると $A\leqq a$。

しかるに $A\geqq a$ にして $a+A=2$ なるを以て $a=A=1$ となる。これで定理が証明されたことになる。

Erdös の結果は Selberg の最初の考えとは無関係であるが Selberg の公式に基礎をおくものである。Selberg は上の証明の後半の部分を考えておつたのであるがそれが丁度 Erdös のアイデアに合致した訳である。つまり両者は独立に考えておつたのである。

彼等の方法はもつと一般の問題に応用することが出来る。例えば Beurling

による解析的方法で証明された若干の問題を証明することが出来る。しかし **Beurling**〔1〕程結果は鋭くない。また算術級数における素数定理も証明できる，それには **Dirichlet** の定理に関する **Selberg** の論文〔7〕におけるアイデアと結果を用いなければならない。

さて **Selberg**〔8〕の証明を以下に述べよう。その際(4)とともに次の結果が必要である。

(9)　$\theta(x)=O(x)$

まず x を正数，d を正整数とするとき

(10)　$$\lambda_d=\lambda_{d,x}=\mu(d)\log^2\frac{x}{d}$$

とおき，n が正整数ならば

(11)　$$\theta_n=\theta_{n,x}=\Sigma_{d/n}\lambda_d$$

とおく。しかるとき

(12)　$$\theta_n=\begin{cases}\log^2 x & n=1\\ \log p\ \log\dfrac{x^2}{p} & n=p^\alpha,\ \alpha\geqq 1\\ 2\log p\ \log q & n=p^\alpha q^\beta,\ \alpha\geqq 1,\ \beta\geqq 1\\ 0 & \text{他の } n\end{cases}$$

が成立する。これより次の **Selberg** の公式が導かれる。

(13)　$$\sum_{p\leqq x}\log^2 p+\sum_{pq\leqq x}\log p\ \log q=2x\log x+O(x)$$

この公式を次のように変形しておく。

(14)　$$\theta(x)\log x+\sum_{p\leqq x}\log p\,\theta\left(\frac{x}{p}\right)=2x\log x+O(x)$$

そのためには次の式を用いなければならない。

$$\sum_{p\leqq x}\log^2 p=\theta(x)\log x+O(x)$$

いま(13)の部分和をとると

(15) $$\sum_{p\leqq x}\log p+\sum_{pq\leqq x}\frac{\log p\ \log q}{\log pq}=2x+O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

となる。これより

$$\sum_{pq\leqq x}\log p\ \log q$$

$$=2x\ \log x-\sum_{qr\leqq x}\frac{\log q\ \log r}{\log qr}\theta\left(\frac{x}{qr}\right)+O(x\log\ \log x)$$

が得られるのでこれを(13)の第2項に代入することによつて

(16) $$\theta(x)\log x=\sum_{pq\leqq x}\frac{\log p\ \log q}{\log pq}\theta\left(\frac{x}{pq}\right)+O(x\log\ \log x)$$

となる。さて

$$\theta(x)=x+R(x)$$

とおけば(14)より容易に

(17) $$R(x)\log x=-\sum_{p\leqq x}\log p\ R\left(\frac{x}{p}\right)+O(x)$$

となりまた(16)より同じく

(18) $$R(x)\log x=\sum_{pq\leqq x}\frac{\log p\ \log q}{\log pq}R\left(\frac{x}{pq}\right)+O(x\log\ \log x)$$

が得られる。この(17)と(18)とより

(19) $$\left|R(x)\right|\leqq\frac{1}{\log x}\sum_{n\leqq x}\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right|+O\left(x\frac{\log\ \log x}{\log x}\right)$$

が得られるが，$R(x)$ の若干の性質を調べてみよう。

まず(4)より部分和をとることによつて

$$\sum_{n\leqq x}\frac{\theta(n)}{n^2}=\log x+O(1)$$

即ち　$$\sum_{n\leqq x}\frac{R(n)}{n^2}=O(1)$$

となる。これは $x>4$ なるすべての x と $x'>x$ に対して

(20) $$\left|\sum_{x\leqq n\leqq x'}\frac{R(n)}{n^2}\right|<K_1$$

を満足する絶対定数 K_1 の存在することを意味する。従て $R(n)$ が x と x' との

間でその符号を変えないならば，

(21)　$$\left|\frac{R(y)}{y}\right| < \frac{K_2}{\log\frac{x'}{x}} \qquad K_2 \geqq 1$$

を満足する y が区間 $x \leqq y \leqq x'$ において存在する。これは $R(n)$ がその符号を変える場合にも成立することが容易に分る。

かくして任意に定められた正数 $\delta<1$ と $x>4$ に対して

(22)　$$|R(y)| < \delta y$$

を満足する y が区間 $x \leqq y < e^{K_2/\delta}x$ に存在することになる。(15)より $y<y'$ に対して

$$o \leqq \sum_{y<p\leqq y'} \log p \leqq 2\ y'-y)+O\left(\frac{y'}{\log y'}\right)$$

が得られ，これより

$$|R(y')-R(y)| \leqq y'-y+O\left(\frac{y'}{\log y'}\right)$$

となる。故に $\frac{y}{2} \leqq y' \leqq 2y$，$y>4$ ならば

$$|R(y')-R(y)| \leqq y'-y+O\left(\frac{y'}{\log y'}\right)$$

即ち

$$|R(y')| \leqq |R(y)| + |y'-y| + O\left(\frac{y'}{\log y'}\right)$$

となる。さて区間 $(x,\ e^{k_2/\delta}x)$ を考えると，(22)により

$$|R(y)| < \delta y$$

を満足する y が区間内に存在する。それ故区間 $\frac{y}{2} \leqq y' \leqq 2y$ の或る y' に対して

$$|R(y')| \leqq \delta y + |y'-y| + \frac{K_3 y'}{\log x}$$

即ち

$$\left|\frac{R(y')}{y'}\right| < 2\delta + \left|1-\frac{y'}{y}\right| + \frac{K_3}{\log x}$$

が成立する。故に $x>e^{K_2/\delta}$ と $e^{-(\delta/2)} \leqq \frac{y'}{y} \leqq e^{\delta/2}$ ならば

$$\left|\frac{R(y')}{y'}\right| < 2\delta + (e^{\frac{\delta}{2}} - 1) + \delta < 4\delta$$

となる。それ故 $x>e^{K_3/\delta}$ に対して区間 $(x, e^{k_2/\delta}x)$ ははつねに，z を部分区間の点とするとき $|R(z)|<4\delta z$ を満足する部分区間 $(y_1, e^{\delta/2}y_1)$ を含むことになる。

さていよいよ $\lim_{x\to\infty}\frac{\theta(x)}{x}=1$ を証明することになるが，これと明らかに同値な式

(23)　$$\lim_{x\to\infty}\frac{R(x)}{x}=0$$

を証明しよう。$x>1$ に対して

(24)　$$|R(x)| < K_4 x$$

が成立する。いま或正数 $\alpha<8$ に対して

(25)　$$|R(x)| < \alpha x$$

がすべての $x>x_0$ に対して成立すると仮定しよう。$\delta=\frac{\alpha}{8}$ とおけば $x_0 > e^{K_3/\delta}$ と仮定して差支えないから $(x, e^{K_2/\delta}x)$　$x>x_0$ なる型のすべての区間は，$y \leqq z \leqq e^{\delta/2}y$ に対して

(26)　$$|R(z)| < \alpha z/2$$

を満足する区間 $(y, e^{\delta/2}y)$ を含む。

それ故(24)を用いると(19)から

$$|R(x)| \leqq \frac{1}{\log x}\sum_{n\leqq x}\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| + O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right)$$

$$< K_4\frac{x}{\log x}\sum_{(x/x_0)<n\leqq x}\frac{1}{n} + \frac{x}{\log x}$$

$$\times \sum_{n\leqq(x/x_0)}\frac{1}{n}\left|\frac{n}{x}R\left(\frac{x}{n}\right)\right| + O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right)$$

が得られる。いま $\rho=e^{K_2/\delta}$ とおけば(25)と(26)を用いることによつて

$$|R(x)| < \alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{300K_2}\right)x$$

が $x>x_1$ に対して成立する。これより反復過程

$$\alpha_{n+1}=\alpha_n\left(1-\frac{\alpha_n^2}{300K_2}\right)$$

は 0 に収斂する。それは例えば $\alpha_1=4$（そのとき $\alpha_n<K_5/\sqrt{n}$）を以て始めてみれば明らかである。故に(23)が証明され素数定理が成立したことになる。

上の証明においては実際に Selberg の公式(13)の威力を用いておらない。また剰余項 $O(x)$ の代りに $o(x\log x)$ を用いている。また剰余項が $o(\log x)$ と分かれば $x>1$ と或正数 K に対して $\theta(x)>Kx$ なることを知ることによつて(4)の威力を用いる必要なしに定理を証明することが出来る。しかしそのためには $R(x)$ の性質に関する議論に若干の変更を施さなければならない。

文　献

[1] Beurling, A. Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés. Acta Math. tome 68 (1937) 255—291.

[2] Breusch, R. Another proof of the prime number theorem. Duke math. J. vol. 21 (1954)

[3] Erdös, P. The difference of consecutive primes. Duke Math. J. vol. 6 (1940) 438—441.

[4] Erdös, P. On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. P.N.A.S. 35 (1949) 374—384.

[5] Erdös, P. Démonstration élémentaire du théorème sur la distribution des nombres premiers. Scriptum 1, Centre Mathématique. Amsterdam. 1949.

[6] Nagell. T. Introduction to Number Theory. 1951.

[7] Selberg, A. An elementauy proof of Dirichlet's theorem about primes in an arithmetic progression. Ann. of Math. 50 (1949) 297—304.

[8] Selberg, A. An elewentauy proof of the prime number theorem. Ann. of Math. 50 (1949) 305—313.

[9] Selberg, A. An elementary proof of the prime number theorem for arithmetic progressions. Canadian J. Math. 2 (1950)

[10] Shapiro, H.N. On a theorem of Selberg and generalizations. Ann. of Math. 51 (1950) 485—497.

[11] 田中穰，素数定理の初等的証明。数学。第3巻第3号 (1951年10月) 136—143。