鞍點問題の微分方程式解法

古瀬大六

序

筆者は一昨年の本誌上[1]において、數學的計畫法の微分方程式による解き方を述べた。然し、それが果して、一般的に收束するものかどうか、については、何も言うことができなかつた。

其後、一ケ年半の間、研究を續けた結果、その收束性を證明できるようになり、また、方程式の形そのものについても、種々の改善を加えることができた。昨年の末には、この方程式を利用して、線型計畫法を瞬間的に解くことのできるアナログ型計算機の試作に成功した。

以下、これらの點を取りまとめて、數學的計畫法・ゲーム理論・一般均衡論を研究されておられる方々の御參考に供したいと思う。

註

1 「計畫法と分權的決定」、商學討究、第四卷第一號（昭和廿八年七月）、一—五二頁。

1

第一章 數學的解析

第一節　鞍點問題を微分方程式であらわすこと

まず、クーン及びタッカーの、鞍點問題についての次の定理[1]から出發する。

〔クーン及びタッカーの定理〕 l個の非負變數よりなるヴェクトルxと、m個の非負變數よりなるヴェクトルuとの微分可能函數 $\phi(x,\ u)$ が、

$$\phi(x,u^0)\leqq\phi(x^0,u^0)\leqq\phi(x^0,u)\quad \text{for all } x\geqq 0,\ u\geqq 0$$

なる關係式を成立せしめるところの或る非負値x^0、u^0（鞍點）を持つためには、次の(1)から(4)までの關係の成立つことが充分である。

(1) $\phi_x^0\leqq 0,\qquad \phi_x^{0\prime}x^0=0\quad,\qquad x^0\geqq 0$

(2) $\phi_u^0\geqq 0,\qquad \phi_u^{0\prime}u^0=0\quad,\qquad u^0\geqq 0$

(3) $\phi(x,u^0)\leqq\phi(x^0,u^0)+\phi_x^{0\prime}(x-x^0)\quad \text{for all } x\geqq 0$

(4) $\phi(x^0,u)\geqq\phi(x^0,u^0)+\phi_u^{0\prime}(u-u^0)\quad \text{for all } u\geqq 0$

但し $\phi_x^0=\begin{pmatrix}\phi_{x_1}(x^0,\ u^0)\\ \cdots\cdots\\ \phi_{x_l}(x^0,\ u^0)\end{pmatrix}$, $\phi_u^0=\begin{pmatrix}\phi_{u_1}(x^0,\ u^0)\\ \cdots\cdots\\ \phi_{u_m}(x^0,\ u^0)\end{pmatrix}$, $(x-x^0)=\begin{pmatrix}x_1-x_1^0\\ \cdots\cdots\\ x_l-x_l^0\end{pmatrix}$, $(u-u^0)=\begin{pmatrix}u_1-u_1^0\\ \cdots\cdots\\ u_m-u_m^0\end{pmatrix}$

これを使つて、次の定理を證明しよう。

〔定理〕 $\phi(x,u)$ がuの任意の非負所與値に對し、xの總ての非負値について concave であり（則ち、任意の$u^0\geqq 0$ に對して(3)が成立ち）、また、xの任意の非負所與値に對し、uの總ての非負値について convex である（則ち、任意の $x^0\geqq 0$ に對して(4)が成立つ）ならば、次に示す聯立微分方程式の解は、總ての非負初期値に對し、ϕの

鞍點に收束する。但し(3)と(4)とが何れも等號をとるときは、收束性をもたない。

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \delta(x_i,\ \phi x_i)\ \phi x_i\ , & x_i(0) \geqq 0 \qquad i=1,\cdots\cdots,\ l \\ \dot{u}_j = -\ \delta(u_j, -\ \phi u_j)\ \phi u_j\ , & u_j(0) \geqq 0 \qquad j=1,\cdots\cdots,\ m \end{cases} \tag{5}$$

$$\delta(a,\ b) = \begin{cases} 0 & \text{if } a=0 \text{ and } b<0 \\ 1 & \text{in all other cases} \end{cases}$$

鞍點問題を解くことのできる微分方程式としては、右の(5)の他にも、次のようなものを考えることができる。

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \phi x_i \{\varphi(x,u)\} \\ \dot{u}_j = -\ \phi u_j \{\varphi(x,u)\} \\ \varphi(x,u) = \max\{(0,0),\ (x,u)\}\ \text{（則ち、}\varphi\text{ は負の要素を 0 と置き換える操作を意味する）} \\ \lim_{t\to\infty} \varphi(x,u) = (x^0,u^0) \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_j = \phi x_j \{\varphi_i(x,u)\} \\ \dot{u}_j = -\ \phi u_j \{\varphi_j(x,u)\} \\ \varphi_i(x,u)\ \text{は}\ x_i\ \text{以外の要素のうち、負なるものを 0 と置くことを示す。} \\ \varphi_j(x,u)\ \text{は}\ u_j\ \text{以外の要素のうち、負なるものを 0 と置くことを示す。} \\ \lim_{t\to\infty} \varphi(x,u) = (x^0,u^0) \end{cases} \tag{7}$$

これらが收束するならば、その收束値はϕの鞍點になることは、容易に證明できる。然しながら、その收束性についての證明は(5)式のように簡單には行かない。以下(5)式についてのみ證明を行い、(6)、(7)については、その應用を論ずる際に、併せて論ずることとする。

註

1　H. W. Kuhn and A. W. Tucker : Nonlinear Programming, Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, ed. by J. Neyman, 1951, p.483, Lemma 2.

第二節　收束値が鞍點に一致することの證明

方程式(5)の初期値は非負であるから、xのうちの何れか一つの變數x_jが或る有限期間中引續き負になるためには、それが減少して$x_i=0$軸を切る瞬間において、$\phi_{x_i}<0$が成立たなくてはならない。ところが、$\delta(x_i, \phi_{x_i})$という項が存在するために、その瞬間に$\dot{x}_i=0$となつて、x_iは0のまま動けなくなつてしまう、従つて、xは、初期値が非負である限り、決して負値をとることはない。uについてもまた同様である。この方程式(5)に従つて動く限り、x、uの非負値條件は自動的に確保されることになる。

(5)式の解が$(x^{\square}, u^{\square})$に收束するものと仮定すれば、$(x^{\square}, u^{\square})$は(5)式の特異點となり、次の式を滿足する。

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \delta\{x_i^{\square}, \phi_{x_i}(x^{\square}, u^{\square})\}\phi_{x_i}(x^{\square}, u^{\square}) = 0 & i=1, \cdots\cdots, l \\ \dot{u}_j = -\delta\{u_j^{\square}, -\phi_{u_j}(x^{\square}, u^{\square})\}\phi_{u_j}(x^{\square}, u^{\square}) = 0 & j=1, \cdots\cdots, m \end{cases} \quad (8)$$

$x^{\square}$、$u^{\square}$の要素のうち、0でない（則ち、正の）要素$x_i^{\square}$、$u_j^{\square}$については、$\phi^{\square}_{x_i}$、$\phi^{\square}_{u_j}$の値が何であつてもδの値は必ず1であるから、

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \phi^{\square}_{x_i} = 0 \\ \dot{u}_j = -\phi^{\square}_{u_j} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

が成立つ。其他の、則ち0の値を取る要素$x_i^{\square}$、$u_j^{\square}$については、(8)が成立つための必要十分條件は、

$$\left\{\begin{array}{l}\phi^{\square}_{x_i} \leqq 0 \\ \phi^{\square}_{u_j} \leqq 0\end{array}\right. \qquad (10)$$

となる。

(9)と(10)とを併せて考えれば、(5)式の収束値$x^{\square}$、$u^{\square}$は、(1)と(2)の條件を悉く滿足する。同時にまた、前提によりϕは(3)、(4)の條件を旣に滿していているから、クーン及びタッカーの定理により、(5)の收束値$(x^{\square}, u^{\square})$は、$\phi$の非負變域における鞍點に外ならない。

ここで、この收束點$(x^{\square}, u^{\square})$が唯一點しか存在しないことを確かめておく必要がある。そこで、$(x^{\square}, u^{\square})$の外にもう一つの別の(1)、(2)、(3)、(4)の條件をみたす點$(x^{\bullet}, u^{\bullet})$が存在するとすれば、クーン及びタッカーの定理により何れも鞍點であるから、

$$\phi(x^{\bullet}, u^{0}) \leqq \phi(x^{0}, u^{0}) \leqq \phi(x^{0}, u^{\bullet})$$

$$\phi(x^{0}, u^{\bullet}) \leqq \phi(x^{\bullet}, u^{\bullet}) \leqq \phi(x^{\bullet}, u^{0})$$

となる。これが矛盾なしに成立つためには

$$\phi(x^{\bullet}, u^{0}) = \phi(x^{0}, u^{0}) = \phi(x^{\bullet}, u^{\bullet}) = \phi(x^{0}, u^{\bullet})$$

でなくてはならない。從つて、(x^{0}, u^{0}), $(x^{0}, u^{\bullet})$, $(x^{\bullet}, u^{0})$, $(x^{\bullet} u^{\bullet})$の四點を結ぶ四邊形の等$\phi$平面が存在し、その平面上の總ての點が(1)から(4)までの條件をみたす。故に(5)の收束點が二つ以上存在するとすれば、それは必らず同じ等ϕ平面上に存在しなければならない。通常そうであるように、ϕがx、uについて連續な二次導函數を持つ場合には、この平面は一點に收縮するから、二つの收束點は、同一點になつてしまう。從つて、ϕが鞍點ではなしに、

鞍線鞍面等をもつ極めて特殊な場合を除き、(5)の解は必らず、唯一つの點に向つて收束する。換言すれば、小域的ではなしに、必らず大域的收束性を持つことが保證される。

第三節　收束性の證明

一般に微分方程式の解の收束性を證明するには、線型方程式であれば、特性根の實部が負となることを立證すればよい。然し、(5)式のような非線型の場合には、それは不可能である。收束點の近傍でマクローリン展開を施して線型化すれば、その特性根を検討することができるけれども、その結論は、あくまでも收束點の近傍における小域的收束性についてのみ當てはまるにすぎない。

非線型微分方程式の大域的收束性を検討する方法として、最近、位相面による方法が盛んに使われるようになつてきた。しかし、この方法が有效に使えるのは、せいぜい三階（一階なら三變數）までであつて、筆者の場合のような一般的な多變數函數では適用不可能である。

そこで、本論文においては、點列の收束性を定める場合に屢々用いられるところの、收束點との間の距離の時間的變化を見ることによつて、この難點を回避しようと試みた。收束が時間的收束として表わされるならば、それはまた、同時に、收束點の安定性をも證明することになるであろう。

或る時點における(5)式の解の、鞍點（x^0, u^0）からの距離rは、左の式で表わされる。

$$r^2 = \sum_1^l (x_i - x_i^0)^2 + \sum_1^m (u_j - u_j^0)^2$$

この距離の時間的變動傾向を見るために、兩邊をtについて微分すれば、

$$r\dot{r} = \sum_1^l (x_i - x_i^0)\dot{x}_i + \sum_1^m (u_j - u_j^0)\dot{u}_j$$

更に、(5)式から$\dot{x}$、$\dot{u}$の値を代入することにより、

$$\dot{r}r=\sum_{1}^{l}\delta(x_i,\ \phi x_i)\cdot(x_i-x_i^0)\phi x_i-\sum_{1}^{m}\delta(u_j,-\phi u_j)(u_j-u_j^0)\phi u_j \qquad (11)$$

となる。

解 (x,u) の運動過程において、或る有限期間中、引續き0の値を保つ若干の變數x^*、u^*があるならば、その期間中は、

$$\begin{cases}\phi_{x_i}^*<0\ , & x_i^*=0\\ -\phi_{u_j}^*<0\ , & u_j^*=0\end{cases} \qquad (12)$$

が成立たなければならない。從つてまた、

$$\begin{cases}\delta(x_i^*,\ \phi x_i^*)=0\\ -\delta(u_j^*,\ \phi_{u_j}^*)=0\end{cases}$$

なる關係が保たれること、言うまでもない。それ故、その期間中のrの變動については、

$$\dot{r}r=\sum_{1}^{l^*}(x_i-x_i^0)\phi x_i-\sum_{1}^{m^*}(u_j-u_j^0)\phi u_j \qquad (13)$$

(但し$\sum_{1}^{l^*}\sum_{1}^{m^*}$は、$x_i=0$, $u_j=0$ なる i,j を除いて加算することを示す)

と書くことができる。

他方、前提によりϕは、任意の非負なるuに對し、xの總ての非負値について concave であり、また、任意の非

負なるxに對し、uの總ての非負値について convex であるから、

$$\begin{cases} \phi(x,u^{\triangle}) \geqq \phi(x^{\triangle},u^{\triangle}) + \phi_x^{\triangle\prime}(x-x^{\triangle}) & \text{for all } x,x^{\triangle},u^{\triangle} \geqq 0 \\ \phi(x^{\triangle},u) \leqq \phi(x^{\triangle},u^{\triangle}) + \phi_u^{\triangle\prime}(u-u^{\triangle}) & \text{for all } x^{\triangle},u,u^{\triangle} \geqq 0 \end{cases}$$

右の第一式については

$$x \to x^{\triangle},\ x^{\triangle} \to x,\ u^{\triangle} \to u$$

第二式については

$$x^{\triangle} \to x,\ u \to u^{\triangle},\ u^{\triangle} \to u$$

と、符號を書き換えても差支ないから、

$$\begin{cases} \phi_x{}'(x-x^{\triangle}) \leqq \phi(x,u) - \phi(x^{\triangle},u) & \text{for all } x,x^{\triangle},u \geqq 0 \\ -\phi_u{}'(u-u^{\triangle}) \leqq \phi(x,u^{\triangle}) - \phi(x,u) & \text{for all } x,u,u^{\triangle} \geqq 0 \end{cases}$$

これを邊々相加えて、

$$\phi_x{}'(x-x^{\triangle}) - \phi_u{}'(u-u^{\triangle}) \leqq \phi(x,u^{\triangle}) - \phi(x^{\triangle},u) \qquad \text{for all } x,u,x^{\triangle},u^{\triangle} \geqq 0$$

が得られる。この $(x^{\triangle},u^{\triangle})$ は、非負値でありさえすれば、右の關係式を成立させるから、それを(5)式の收束點 (x^0,u^0) にとれば

$$\sum_1^l (x_i - x_i^0)\phi x_i - \sum_1^m (u_j - u_j^0)\phi u_j \leqq \phi(x,u^0) - \phi(x^0,u) \qquad \text{for all } x,u \geqq 0 \qquad (14)$$

となる。ところで、(5)の收束點 (x^0,u^0) は、(x,u) の非負變域における函數 ϕ の鞍點であること、既に前節において證明ずみであるから、

$$\phi(x,u^0)\leqq\phi(x^0,u^0)\leqq\phi(x^0,u) \qquad \text{for all } x,u\geqq0$$

$$\therefore \quad \phi(x,u^0)-\phi(x^0,u)\leqq0 \qquad \text{for all } x,u\geqq0$$

が成立ち、この關係を⒁式に代入すれば、

$$\sum_1^{l}(x_i-x_i^0)\phi x_i-\sum_1^{m}(u_j-u_j^0)\phi u_j\leqq0 \qquad \text{for all } x,u\geqq0 \tag{15}$$

に到達する。

この⒂式の變數が⒀式のそれに一致する場合を考えるならば、

$$\sum_1^{l^*}(x_i-x_i^0)\phi x_i-\sum_1^{m^*}(u_j-u_j^0)\phi u_j\leqq\sum_1^{l^☆}x_i^0\phi x_i-\sum_1^{m^☆}u_j^0\phi u_j$$

（但し$\sum_1^{l^*}$, $\sum_1^{m^☆}$は、$x_i=0$, $u_j=0$ なる i,j についてのみ加算することを示す）

然るに、⑿式より

$$\begin{cases} \sum_1^{l^☆}x_i^0\phi x_i\leqq0 & \therefore\ x_j^0\geqq0 \\ -\sum_1^{m^☆}u_j^0\phi u_j\leqq0 & \therefore\ u_j^0\geqq0 \end{cases}$$

でなければならないから、結局

$$\sum_1^{l^*}(x_i-x_j^0)\phi x_i-\sum_1^{m^*}(u_j-u_j^0)\phi u_i\leqq0 \tag{16}$$

が成立つことになる。

ところで、⑿式を使つて、⑾式を書きなおすと、

$$\dot{r}r=\sum_{1}^{l^*}(x_i-x_i^0)\phi x_i-\sum_{1}^{m^*}(u_j-u_j^0)\phi u_j$$

となる。これを⒃式に代入すれば、

$$\dot{r}r\leqq 0$$

が得られる。右の式で等號が成立つのは、解（x, u）が、

$$\phi(x,u^0)=\phi(x^0,u^0)=\phi(x,u^0)$$

なる區域内にある場合、則ち、鞍點（x^0、u^0）を含む等φ空間（點、面、立體、等）上にある場合である。この場合には、この等φ空間内の總ての點は、鞍點になる。この空間内では、ϕ_x、ϕ_uは悉く0となり、解は全く動かず、單一鞍點の場合を除いて、中立的安定狀態にある。更にまた、φがx、uの双一次形式の場合にも、x、uの總ての非負値について

$$\phi(x,u^0)=\phi(x^0,u^0)=\phi(x^0,u)$$

が成立ち、從つて$\dot{r}$は0となる。但し、この場合には、解が鞍點を原點と見做したときの座標軸のうちの一つを横切る瞬間に、その座標軸方向への運動分力、則ちφの導函數が零となるだけで、他の分力は正又は負の値をとるから、解は停止せずに、運動を續ける。運動を續けながら、而も$\dot{r}$が0であるということは、初期における鞍點からの距離をそのまま保ちながら、（l＋m）次元超球面上を永久に振動し續けることに外ならない。

右の二つの場合を除けば、必ず

$\dot{r} < 0$

の成立つことが證明されたわけである。

則ち、最初から鞍點上にある場合を除けば、任意の非負なる初期値から出發する(5)式の解は、そのまま鞍點と一定距離を保ちつつ非減衰振動を續けるか、または、唯一つの鞍點に向つて單調に收束するか、何れかであつて、決して發散することはない。從つて、複合鞍點の場合を除き、鞍點は完全に安定である。

解が非減衰な場合には、(5)式を次のように修正することによつて、收束性を賦與することができる。

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{x}_i = \delta(x_i,\ \phi x_i + \phi\dot{x}_i)\cdot(\phi x_i + \phi\dot{x}_i) & ,\ x_i(0) \geqq 0 & i=1,\cdots\cdots,l \\ \dot{u}_j = -\delta(u_j,\ -\phi u_j - \phi\dot{u}_j)\cdot(\phi u_j + \phi\dot{u}_j) & ,\ u_j(0) \geqq 0 & j=1,\cdots\cdots,m \end{array}\right. \tag{5$'$}$$

その一般的證明は別の機會に讓ることとし、線型の場合についてのみ、第五節で證明を與えておく。

第四節　反應係數について

(5)式の右邊に、如何なる正の常數を掛けても、解の收束性は保存される。永久振動の場合について右のような操作を加えても、やはり永久振動の解が得られるだけである。

このような修正は、l＋m次元空間内の總ての點における解の運動方向を決定するヴェクトル$(\dot{x}, \dot{u})$の各要素を方向を變えることなしに單に常數倍するだけであるから、それは單に、積分曲線の圖型を、鞍點を中心としてそれぞれの座標方向に一定割合で引きのばし、又は縮めるだけである。從つて、特異點、則ち鞍點の位置は變らず、鞍點への收束性も依然として保持される。

直觀的には、反應係數が大きいほど、收束速度が速くなるように思われる。全變數の反應係數が同一値pであれば、$\dot{r}r$ の値はp倍になり、速度は$\sqrt{p}$倍になる。或る一個の變數の反應速度が增した場合、及び種々の變數の反應速

度が種々の割合で增した場合に、必ず・rが大となるかどうか、については、別の機會に檢討してみたい。

(5)′式の場合には、同一變數に對するϕ_x又はϕ_uについての反應係數と、その時間微分についての反應係數とが異なる場合をも、考えてみなければならない。元の式が收束すれば、ϕ_xについては全變數に對して同一値pを、その時間導函數については全變數に對して同一値qを與えても、收束性は保存されるであろう。然し、そのpとqとの比率が各變數ごとにばらばらであると、發散する可能性がある。その證明は、線型の場合について第六節に示しておくが、一般的證明は次回に讓る。

(5)式において、各變數ごとに異なる正の反應係數を掛けた場合、收束性は保存されるけれども、單調收束性は必ずしも保存されない。何となれば、(13)の右邊の諸項のうち、或る時點に於て正値をとるものが少くとも一つ存在するから、それに對する反應係數を充分大きくとることにより、右邊全體の値を或る期間內において負から正へ轉ぜしめることが可能だからである。各變數は、何等かの非線型振動を續けながら、次第に鞍點に向つて收束して行くであろう。

第五節　二次形式の鞍點

$\phi(x,u)$が、x、uについての二次形式であれば、(5)の聯立微分方程式は線型になるので、われわれの使い慣れた解析的手續を十分に利用することができる。

Bを任意の$n\times n$の實常數行列として、

$$\phi(x,u)=\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}' B\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}+d'y+e \qquad (16)$$

(16)とおけば、これに對する(5)式は、

$$
\begin{cases}
\dot{x}_i = \delta(x_i\,,\ \phi x_i)\,\phi x_i\ , & \phi x_i = \left[\dfrac{b_{ij}+b_{ji}}{2}\right]'\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + d_i\ , \quad i=1,\cdots\cdots,\ l \\
\dot{u}_j = -\delta(u_j,\ -\phi u_j)\,\phi u_j\ , & \phi u_j = \left[\dfrac{b_{ij}+b_{ji}}{2}\right]'\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + d_j\ , \quad j=1,\cdots\cdots,\ m
\end{cases}
\tag{17}
$$

となる。ここで簡單のために、

$$
\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \equiv y\ , \quad \frac{b_{ij}+b_{ji}}{2} = a_{ij}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
a_{11} & \cdots & a_{1l} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{l1} & \cdots & a_{ll} & a_{l,l+1} & \cdots & a_{l,n} \\
\hdashline
-a_{l+1,1} & \cdots & -a_{l+1,l} & -a_{l+1,l+1} & \cdots & -a_{l+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-a_{n,1} & \cdots & -a_{n,l} & -a_{n,l+1} & \cdots & -a_{nn}
\end{array}\right) \equiv A, \quad
\left(\begin{array}{c}
d_1 \\ \vdots \\ d_l \\ -d_{l+1} \\ \vdots \\ -d_n
\end{array}\right) \equiv C\ , \quad n=l+m
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
a_{11} & \cdots & a_{1l} & & & \\
\vdots & & \vdots & & 0 & \\
a_{l1} & \cdots & a_{ll} & & & \\
\hdashline
& & & -a_{l+1,l+1} & \cdots & a_{l+1,n} \\
& 0 & & \vdots & & \\
& & & -a_{n,l+1} & \cdots & -a_{n,n}
\end{array}\right) \equiv H, \quad
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
& & & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\
& 0 & & \vdots & & \vdots \\
& & & a_{l,l+1} & \cdots & a_{l,n} \\
\hdashline
-a_{l+1,1} & \cdots & -a_{l+1,l} & & & \\
\vdots & & \vdots & & 0 & \\
-a_{n,1} & \cdots & -a_{n,l} & & &
\end{array}\right) \equiv K
$$

$$
\begin{pmatrix}
\delta(x_1, \phi x_1) \\
\cdots\cdots \\
\delta(x_1, \phi x_1) \\
\delta(u_1, -\phi u_1) \\
\cdots\cdots \\
\delta(u_m, -\phi u_m)
\end{pmatrix} \equiv \delta
$$

とおけば、(17)は

$$
\dot{y} = \delta'(Ay+c) = \delta'[(H+K)y+c] \tag{18}
$$

と記すことができる。定義により、

$$
a_{ij} = \frac{b_{ij}+b_{ji}}{2}, \quad a_{ji} = \frac{b_{ji}+b_{ij}}{2}
$$

$$
\therefore \quad a_{ij} = a_{ji} \qquad (i, j = 1, \cdots\cdots, n)
$$

となるから、Bの形が何であつても、Hは必らず對稱行列に、Kは必らず逆對稱行列になる。δが若干の變數についての0となつている場合でも、この關係は變らない。

ところで二次形式が concave であることと、[1] それが負半定型であることとは恒等であり、また、それが convex であることと正半定型であることとは恒等であるから、前提により、

$$
\begin{pmatrix} x \\ u^0 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ u^0 \end{pmatrix} \leqq 0, \quad \text{for all } x, u^0 \geqq 0
$$

$$
\begin{pmatrix} x^0 \\ u \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x^0 \\ u \end{pmatrix} \geqq 0, \quad \text{for all } x^0, u \geqq 0 \tag{19}
$$

ここで、$x^0=0$, $u^0=0$ とおいても差迎えないから、

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}\leqq 0 \\ -&\begin{bmatrix}0\\u\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}0\\u\end{bmatrix}\leqq 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{for all } x,u\geqq 0 \tag{20}$$

$$\therefore\quad \begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\u\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}0\\u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}H\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\u\end{bmatrix}H\begin{bmatrix}0\\u\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}H\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}\leqq 0 \qquad \text{for all } x,u\geqq 0 \tag{21}$$

則ち、Hは必然的に負半定型となる。x、uのうち若干が0となつてもこの性質は變らない。従つて、Hの若干の行と、それと同じ順番の列とを除いた小行列もまた、負半定型である。

問題は、従つて、Hが負半定型なる場合の、Aの特性根如何、ということになる。ここでベンディクソン[2]の定理を使う。

〔ベンディクソンの定理〕 n次の實行列Aの特性根の實部を $\alpha+\beta i$ とし、$\frac{1}{2}(A+A')$ なる對稱行列の特性根の最大値をM、最小値をmとすれば

(a) $|\beta|\leqq g\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}$, $g=\max\limits_{s,t}\dfrac{|a_{st}-a_{ts}|}{2}$

(b) $M\geqq\alpha\geqq m$

が成立つ。

ところで、今の場合、

$$H=\tfrac{1}{2}(A+A')$$

であるから、Aの特性根の實部は、右の定理により、Hのそれの最大値と最小値との外に出ることはありえない。他方、右の(a)より明かなごとく、對稱行列の特性根は必ず實數であり、且つまた、負半定型對稱行列の特性根は必ず非正である[3]から、Mもmも、正とはなり得ない。従つて、Aの特性根もまた、正の實部を持ち得ない。右の性質は、若干の變數に對してδが働いている場合にも成立つから、(18)式の解はその特異點に向つて收束する。逆對稱部分Kが0であれば、右の定理の(a)により、$\beta=0$となり、Aの特性根は純然たる非正實數になるから、收束性は單調的である。然しながら、Kが0でないときは、虚數部分を伴い、従つて、(18)の解は減衰振動になる。

註

1 Kuhn and Tucker, Nonlinear Programming, Second Berkeley Symposium on Mathematial Statistics and Probability, p.486, Lemma 4.

2 井關清志「行列の特有根の限界」高數研究、第七巻第五號、昭和十八年二月號、十七頁。

3 遠山啓「行列論」共立全書、一五五頁。

第六節　双一次形式の鞍點

前節の(19)式が何れも等號をとる場合には、

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{for all } x, u \geqq 0$$

となる。これが成立つためには $H=0$ でなくてはならない。従つてBもまた、

$$B = \left[\begin{array}{ccc:ccc} & & & b_{1,l+1} & \cdots\cdots & b_{1,n} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{l,l+1} & \cdots\cdots & b_{l,n} \\ \hdashline b_{l+1,1} & \cdots\cdots & b_{l+1,l} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ b_{n,1} & \cdots\cdots & b_{n,l} & & & \end{array}\right]$$

なる形を持たなくてはならない。これを⑯式に戻せば、

$$\phi(x,u) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} \frac{b_{j,l+j} + b_{l+j,i}}{2} x_i u_j + d'y + c$$

という双一次形式になり、その微分方程式は

$$\dot{y} = \delta'(Ky + c)$$

となる。Kは逆對稱であるから、右の方程式の特性根は純虚數となり、従つて非減衰振動解のみをもつ。δの作用によりKの次數が減少してもやはり同様に非減衰振動である。これを鞍點 (x^0, u^0) に収束させるには、第三節の末尾に述べておいたように、$\dot{\phi}_x$、$\dot{\phi}_u$項を追加してやればよい。則ち、次のような形になる。

$$\dot{y} = \delta'\{K(y + \dot{y}) + c\} \tag{17}$$

$$\text{但し}\ \delta = \left[\begin{array}{l} \delta(x_1,\ \phi x_1 + \dot{\phi} x_1) \\ \quad\vdots \\ \delta(x_l,\ \phi x_l + \dot{\phi} x_l) \\ \delta(u_1,\ -\phi u_1 - \dot{\phi} u_1) \\ \quad\vdots \\ \delta(u_m, -\phi u_m - \dot{\phi} u_m) \end{array}\right]$$

その特性根をλ^0とすれば、

$$\left| K-\frac{\lambda^0}{1+\lambda^0}E \right| = 0 \tag{18}$$

然るに、Kは逆對稱であるから、その特性根は純虚數である。それを ai とおけば

$$\frac{\lambda^0}{1+\lambda^0} = ai$$

$$\therefore\ \lambda^0 = \frac{-a^2}{1+a^2} + \frac{a}{1+a^2}i$$

$$\therefore\ R(\lambda^0) = \frac{-a^2}{1+a^2} < 0$$

從つて、方程式(17)の特性根λ^0は複素數であり、その實部は必ず負である。則ち、$\dot{y}$の追加によつて、解に收束性を與えることができる。

次に、(17)式の左邊に、それぞれ異つた反應係數$1/p_1$、……、$1/p_n$を乘ずれば、(18)式は

$$\left| K-\frac{\lambda^0}{1+\lambda^0}B \right| = 0$$

$$\text{但し}B = \begin{vmatrix} 1/p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/p_n \end{vmatrix}, \quad p_i > 0$$

となる。Kは逆對稱實行列、Bは對稱實行列であるから、[1] $\lambda^0/(1+\lambda^0)$はやはり純虚數であり、從つて、λ^0の實部は必らず負である。それ故、反應係數は正値でありさえすれば、收束性を失わせる心配は全くない。

然し、$\dot{y}$に對して、各變數ごとに異なる係數q_1、……、q_nを乘ずる場合は、そう簡單にはいかない。但し、$q_1 = q_2 = \cdots\cdots = q_n$であれば、pの方は各變數毎に異つても、收束性を失わしめることはない。何となれば

$$\frac{\dot{y}}{p} = \delta'\{K(y+q\dot{y})+c\}$$

但し $$\frac{1}{p} = \begin{pmatrix} 1/p_1 \\ \vdots \\ 1/p_n \end{pmatrix}, \quad q = \text{scalar const.}$$

であるから、特性根をλ^0とすれば

$$\left| K - \frac{\lambda^0}{1+q\lambda^0} B \right| = 0$$

但し $$B = \begin{vmatrix} 1/p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/p_n \end{vmatrix}$$

となる。前と同じ理由により、$\lambda^0/(1+q\lambda^0)$は純虛數となるから、

$$\frac{\lambda^0}{1+q\lambda^0} = ai$$

$$\therefore \quad \lambda^0 = \frac{-qa^2}{1+q^2a^2} + \frac{a}{1+q^2a^2}i, \quad q>0$$

$$\therefore \quad R(\lambda^0) > 0$$

依然として特性根λ^0の實部は負であり、收束性は保存される。

1　註

この定理は、今迄に記載した人はないようであるが、その證明は容易である。

$$|K-\lambda B|=0$$

を満足するλをλ^0とすれば、

$$Kx=\lambda^0 Bx$$

を満足する零ならざるヴェクトルxが必ず存在する。Kは逆對稱であるから

$$(Kx,x)=-(x,Kx)$$

これに $Kx=\lambda^0 Bx$ を代入すれば

$$\lambda^0(Bx,x)=-\bar{\lambda}^0(x,Bx)$$

然るにBは對稱行列であるから

$$(Bx,x)=(x,Bx)$$

$$\therefore\ \lambda^0=-\bar{\lambda}^0$$

$$\therefore\ R(\lambda^0)=0$$

第二章　若干の應用例

第一節　線型計畫法

線型計畫を具體的に解く計算手續としては、既に Dantzig の Simplex Method[(1)(2)] が存在する。慣れさえすれば、簡單な卓上型手動計算機を使つて、充分實用的な速さで答を出すことができる。然し、變數の數が數十以上になると、二、三日ではむづかしいであろうし、また、係數の値を色々に變えてその影響を見るということも、益々長時間を要して、困難となるであろう。

現在工學方面で盛んに使われている、電子管式アナログ型計算機[3](アナコム)を使うことができれば、答えは、繰返し型なら千分の一秒、低速度型でも二、三分で求めることができる。そのためには、先ず、問題を聯立微分方程式の形に書きかえなければならない。

零和二人ゲームを解くための聯立微分方程式が、ブラウン及びノイマンによつて、既に與えられている。[4] また、零和二人ゲームが、簡單な變數變換によつて、線型計畫法に轉化されることも、クーン及びタッカーにより證明ずみである。[5] 筆者は既に、ブラウン及びノイマンの聯立微分方程式を線型計畫の形に書き改めた式を示した。[6] その際にものべておいたように、この式は烈しい振動を伴い、收束が遲いように思われる。これは、二、三の簡單な計算例からの推論であつて、何も嚴密な數學的立證をしたわけではないけれども、其の外にもなお、變數間の乘算を含むために、技術的にアナログ化がむづかしいこと、經濟的意味が不明確なこと、等の理由で、理用的立場からすると、種々の缺陷を持つている。

所でクーン及びタッカーは、種々の拘束條件附き極値問題が、結局、鞍點問題に歸着することを證明している。線型計畫法もまた、彼等によれば、非負變域における鞍點問題に外ならない。筆者の示した、鞍點解を求めるための聯立微分方程式(5)は、從つてまた、線型計畫法の解法としても有效である。

線型計畫法とは、周知のごとく、

$$\max\ c'x$$

under the cenditions $Ax \leqq b$, $x \geqq 0$

なるヴェクトル x^0 を求める問題であり、それはまた、

$$\phi(x,u) = c'x + u'(b - Ax)$$

$$x,\ u \geqq 0$$

なる函數ϕの鞍點(x^0, u^0)を求める問題に外ならない。これに對應する(5)式を求めれば、

$$\dot{y} = \delta'\left\{Ky + \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}\right\}$$

$$K = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -A' \\ \hline A & 0 \end{array}\right)$$

となる。然し、Kは、Aの形の如何を問わず、逆對稱であるから、右の聯立微分方程式の特性根は純虚數となり、收束性を缺く。

そこで、前章第六節の方法によつて收束性を與えれば、

$$\dot{y} = \delta'\left\{K(y+\dot{y}) + \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}\right\} \tag{19}$$

が得られるであろう。これは、變數間の乗算を含まない點では、アナログ化に有利であるが、δの操作を電氣回路化することが困難である。電子管式アナコムでは、微分操作は誤差が多いので、これを積分方程式化するのが通例となつている。そこで、(19)式を積分方程式化とすれば、

$$y = \delta'\int\left\{K(y+\dot{y}) + \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}\right\}dt \tag{20}$$

となる。これは、加算、常數倍、積分の三種類の計算しか含まないので、アナログ化は容易のように見えるが、難物はδの回路化である。

δ回路は、その積分機によつて決定される變數y_iが、正から減少して0となつた瞬間にインピーダンスが0から無限大になり、積分機の入力電壓ヴェクトル

$$Ky+\begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}$$

のi要素が負から0に恢復する瞬間においてインピーダンスが無限大から0に戻る、という、複雜な働きを要求される。電子管スウィッチ(7)を利用すれば不可能ではないと考えられるけれども、詳細な技術的檢討は、專門家に御願するより外はない。これを、積分コンデンサーの入力回路に入れておけば、出力電壓は(19)式の通りに變化するであろう。

この技術的難點を回避するために筆者のとつた方法は、(5)の代りに(6)の形の聯立微分方程式を利用するやり方である。全變數が正域にある場合には兩方程式は全く同じものになる。然し、(5)の方程式で若干の變數がδの働きにより座標軸上を横這いする期間中、(6)式では、その變數が負側に轉じ、(5)においてそれが再び正となる時點から若干遅れて、正側に戻る、從つて、多少收束性が惡くなる、という點で相違している。(7)式ならば、この正位恢復の遅れが多少減じはするが、やはり(5)よりは遅くなることを免れない。但し、今問題としている線型計畫法については、(6)と(7)とは全く同型であるから、(6)式を採用することは、同時にまた、(7)を採用することにもなる。

(19)式に對應する(6)式を求めれば、

$$\dot{y}=K\{\varphi(y)+d\varphi(y)/dt\}+\begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\therefore y=\int K\varphi(y)dt+\varphi(y)+\int\begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}dt$$

$$\varphi(y)=\max(0,y)$$

則ち、各積分機の入力には、他の積分機の出力を整流したものを入れてやればよい。

筆者が實驗に使用した問題は、

Maximize $x_1 + 2x_2$

under the conditions　$3x_1 + 4x_2 \leqq 10$

$$5x_1 + 2x_2 \leqq 10$$

$$x_1,\ x_2 \geqq 0$$

という極めて簡單なものである。これに對應する(21)式のK、c、−bは、

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

であり、更に、積分機への入力と出力との間の關係を見やすくするために、微分演算子Pを使えば

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1+P}{P}\left\{-3\varphi(u_1) - 5\varphi(u_2) + 1\right\} \\ x_2 = \dfrac{1+P}{P}\left\{-4\varphi(u_1) - 2\varphi(u_2) + 2\right\} \\ u_1 = \dfrac{1+P}{P}\left\{3\varphi(x_1) + 4\varphi(x_2) - 10\right\} \\ u_2 = \dfrac{1+P}{P}\left\{5\varphi(x_1) + 2\varphi(x_2) - 10\right\} \end{cases} \qquad (22)$$

となる。積分機は一臺で（1+P）/Pなる演算を行うことができるから、各積分機の入力に㉒の右邊、則ち、他の積分機の出力を整流したものを入れてやれば、出力として一個の變數を取り出すことができる。末尾の第一圖はそのCRTオッシロの寫眞である。アナコムの技術的問題については、別に最終章に記しておいた。

以上のように、單に迅速に解を求めたいという目的のためには、(5)式よりも(6)式の方が技術的に優れている。然し、それを一つの經濟均衡過程と考え、その解の收束値だけでなく、その過渡現象の總てについても經濟的意味を見出していこうとする立場からは、(5)式の方が現實的であるといわなければならない。則ちcを製品價格、bを資源の供給限界、Aを技術マトリックス、xを生産量とすれば、uは資源の價格に外ならない。而てまた、ϕ_xはxの單位生産量に對する利潤、$-\phi_u$は資源の需要超過量を意味する。

この場合、各方程式はそれぞれ、各種製品の生産量が現在の利潤と豫想利潤とに比例して増減されること、また、各種資源の價格が自由競爭市場を通じて超過需要量とその豫想に應じて増減されること、を示している。問題をこのような分權的決定過程として把握するならば、負利潤のために生産を中止する際の計算が、單にその瞬間に於ける損益ではなしに、その僅か前の時點における計算上の負利潤の高によつて影響を受ける、というのは、非現實的と言わなければならない。その結果、次第に市況が恢復して、利潤の實現が可能になつた瞬間から若干時間を經過して初めて生産が再開される、という具合の悪い現象を伴う。從つて、このような缺陥のない(5)式の方が、經濟モデルとしては優れている、と言うことができる。

但し、㉑式の$d\varphi(y)/dt$項に充分大きな反應係數が乘ぜられていれば、一旦負となつた變數が再び正域に戻る可能性は殆ど存在しない。それ故、(6)式の解$\varphi(x,u)$は、(5)式の解(x,u)と全く一致する。

註

1 Dantzig, G. B., "Maximization of a Linear Function of Variables Subiect to Linelar Inequalities," Chap. XXI of Activity Analysis of Production and Allocation, ed. by T.C. Koopmans, 1951, pp. 339—347.
2 Charnes, A., "Optimality and Degeneracy in Linear Programming," Econometrica, April, 1952, pp. 160—170.
3 Korn, G.A. and Korn, T.M., Electronic Analog Computers, 1952, McG-H., pp. 378.
4 Brown, G.W. and Neumann, J. von, "Solutions of Games by Differential Equations," Contributions to the Theory of Games, ed. by Kuhn, H.W. and Tucker, A.W.; Annals of Mathematics, No. 24, Princetion, 1950, pp.73—79.
5 Kuhn, G. D. and Tucker, A.W., "Linear Programming and Theory of Games", Activity Analysis of Production and Allocation, ed. by T.C. Koopmans, 1951, Chap. XIX, pp. 327—328.
6 古瀨大六「線形計畫法の逐次解法」、商學討究、第三卷第三號、昭和二十七年十一月、第四節、四十一—四十五頁。
7 Soller, T., Starr, M.A. and Valley, G. E., ed., Cathode Ray Tube Displays, Radiation Laboratory Series, No. 22, 1948, McG-H, pp. 128—132.

第二節　直交ゲーム

直交ゲーム[1]の微分方程式解法として、既にブラウン及びノイマンの方程式のあること、前節において觸れた通りである。その際、それが變數間の乘算を含むため、アナコム化が技術的に複雜になること、を指摘しておいた。ゲームの解は、結局、pay-off function の鞍點に外ならないから、筆者の方程式によつて、乘算を含まずに解くことができる。

Maximizer の mixed strategy を $(x_1, \cdots\cdots, x_l)$、Minimizer のそれを $(u_1, \cdots\cdots, u_m)$、$l \times m$ payoff matrix をAとすれば、直交ゲームは、

$$\max_{x} \min_{u} x'Au \quad , \quad x, u \geqq 0$$
$$\Sigma x = 1, \ \Sigma u = 1$$

を満足するヴェクトルx^0、u^0を求めることに外ならない。右において、$\Sigma x=1$, $\Sigma u=1$ なる關係式を使つて pay-off function x/Au の中から、x、u のうちの各一要素變數を消去しておけば、直交ゲームは、單純な非負鞍點問題に轉化され、從つて、(6)又は(7)の微分方程式を使つてアナコムで計算することができる。

選擇が有限個の組合の中からなされる場合には、如何なる複雑なゲームであつても、これを直交ゲームで表わすことができる。それ故、この解法の利用できる範圍は非常に廣いであろう。

註

1 Mc Kinsey, J.C.C., Introduction to the Theory of Games, 1952, McG-H, p.6.

第三節 ノイマンの經濟モデル

經濟均衡の過程を一つの極値問題又は鞍點問題として把握しようとする試みは、舊くはノイマンにより、最近はまた、サミュエルソン、アロウ、デブリウ等によつて進められている。

此所では、簡單な一例として、ノイマンの發展經濟モデル(1)を取上げて、その微分方程式解法が如何なる經濟的意味を持つか、を考えてみよう。

m種の（$m>n$）生産過程P_1、……、P_mによつて、n種の商品G_1、……G_nが生産消費される經濟社會を考える。簡單化のための仮定として、利潤は生産高に比例し、勞働・土地等の資源は無限に供給され、勞働者を維持するに必要な以上の所得は悉く再投資されるものとする。このような事情のもとで、各種生産過程の操業度x、經濟活動の發展速度α、價格y、及び利子率βがどの點に定まるか、を考えるのが彼のモデルの狙いである。

P_jの一單位操業度によつて消費されるj商品の投入量をa_{ij}、同じくj商品の產出量をb_{ij}とすれば、社會全體としてのi商品の投入量は

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i$$

産出量は

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i$$

となる。經濟が年々一定率αで生長し續けるためには、各財の年々の生産量は、投入量のα倍以上でなくてはならず、また、各生産過程が完全競爭の下で生産を續ける、則ち、利潤は正とはなり得ない、とすればP_iの總原價

$$\beta \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

は、その總賣上

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j$$

より少額ではあり得ない。從つて、

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \leqq \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \ , \quad j=1,\cdots\cdots,n \\ \beta \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geqq \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \ , \quad i=1,\cdots\cdots,m \\ \quad x \geqq 0, \ y \geqq 0 \\ \quad \Sigma x > 0, \quad \Sigma y > 0 \\ a_{ij} + b_{ij} > 0 \end{array}\right.$$

(23)

を満足しなければならない。

ノイマンは、右の解 (x^0, y^0) が

$$\phi(x, y)=\frac{x'By}{x'Ay} \tag{24}$$

なる函數の非負鞍點解に外ならないことを證明した。これに聯立微分方程式解法を適用するには、先ず、ϕ の concavity, convexity を檢討しなければならないが、これが鞍點を持つことが彼によつて證明ずみである以上、それは當然 concave and convex であることもまた證明濟みと考えてよい。

そこで、これに對應する聯立微分方程式(5)を求めれば

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_i &= \delta\,\frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\,y_j - (x'By/x'Ay)\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,y_j}{x'Ay} \\ \dot{y}_j &= \delta\,\frac{(x'By/x'Ay)\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,x_i - \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\,x_i}{x'Ay} \end{aligned}\right. \tag{25}$$

が得られる。その經濟的意味を追求しようとする場合、$(x'By/x'Ay)$、則ち $\phi(y, y)$ が右邊に含まれているのをどのように解釋するか、が問題になる。ノイマンの證明によれば、それは結局、均衡的生長過程における生長率 α に等しくなり、同時にまた、利子率 β に一致するようになる。現實には、利子率 β もまた、複雜な市場機構を通じて或る時間的經過を經て初めて、生長率 α に一致するようになるものであり、從つて函數 ϕ の中に陽表的に含まれていなければならない。そのような函數 $\phi(x, y, \beta)$ を具體的に求めることは別の機會に讓るとして、此所では、ノイマンの與えたままの形でその意味を考えてみる。

そこで(25)の第二式の（x'By/x'Ay）は、各時點に於ける現實の全産業の生長率$\rho(t)$であるからこれをρとおき、第一式の（x'By/x'Ay）は、利子市場が瞬間的に資金需給を一致せしめ、各時點の生長率$\rho(t)$に等しい利子率$r(t)$を成立せしめるものと假定すれば、それを$r(t)$とおいて差迦えないであろう。然るときは(25)式は、

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \delta \dfrac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, y_i - r \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j}{x'Ay} \\ \dot{y}_j = \delta \dfrac{\rho \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i - \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, x_i}{x'Ay} \end{cases} \qquad (26)$$

∴

$$\begin{cases} \dot{x}_i = P_i\text{の操業度增加} = \delta \dfrac{(P_i\text{の單位操業度當り賣上高}) - r \times (P_i\text{の單位操業度當り支拂高})}{\text{全國總生産額}} \\ \qquad = \delta \dfrac{P_i\text{の單位操業度當り利潤}}{\text{全國總生産高}} \\ \dot{y}_j = G_j\text{の價格騰貴} = \delta \dfrac{\rho \times (G_j\text{の全國投入量}) - (G_j\text{の全國産出量})}{\text{全國總生産高}} \\ \qquad = \delta \dfrac{G_j\text{の需要超過量}}{\text{全國總生産高}} \end{cases}$$

となつて、その經濟的意味が明かになつてくる。分母の全國總生産高x'Ayは、各式に共通であるから、單なるスケール・ファクターと見ればよいであろう。

任意の非負初期値から出發する(25)式の解は、必らずその鞍點、則ちコンスタントな生長率α、それに等しい利子率β、に到達するであろう。

註

1 Balderston, J., "Models of General Economic Equilibrium," Economic Activity Analysis, ed. by O. Morgenstern, 1954, Wiley, pp. 33—38. (三四頁の(18)式の右邊 $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} G_j$ は $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} G_j$ の誤りであろう)。

第四節　非線形計畫法[1]

微分方程式(5)による解法が實用的に最も大きな偉力を發揮するのは、非線形計畫法の場合である。Simplex Method は線型の場合には有力な方法であつても、非線型の場合にも適用しようとすると、その convex cone はもはや polyhedral ではなくなり、その Eckpunkt 以外の點が鞍點となる可能性を生ずる。そのため、線型の場合に比べて計算が益々複雑となつて、その繁に耐えなくなるであろう。

従つて、非線型計畫法の問題を現實に解こうとするならば、適當なアナログ化と高速自動化とが必要になつてくる。(5)の方程式、又は(6)、(7)の方程式は、この要求に最も適したものと言つてよい。電子管式アナコムにおける變數間の乘算も、若干の精度低下を我慢しさえすれば、可能である。[1] 加減、常數倍、微積分の外に、函數發生器を使えば任意の近似函數を生ぜしめることができ、またタイム・ラグを入れることも可能である。現實にわれわれが直面する種類の問題であれば、どんなものでもアナログ化できないものはない、と言つて差支えないであろう。

註

1 Korn, G.A. and Korn, T.M., Electronic Analog Compnters, 1952, pp.211—245.

第五節　其他の用途

クーン・タッカーの定理が、等式拘束條件の場合、變數の非負條件を除いた場合、拘束條件のない場合、にも成立つことは明かである。從つて、われわれの聯立微分方程式もまた、これら種々の場合の解法として利用することがで

きる。

(1) concave function $\phi(x)$ の非負變域又は、全實數變域における極大點を求めること。

解析函數であれば筆算で簡單に求められるが、非解析的な函數であれば、やはり電氣的に解く方が有利であろう。

(2) 聯立代數方程式を解くこと。

殊に聯立多元一次方程式を解くことは、物理學、工學ばかりでなく、經濟學方面でも、レオンチェフ體系の計算に必要である。體來から使われている方法としては、種々のディジタル型計算機による消去法又は逐次近似法の外に、手動ポテンシオメーターによるアナログ法がある。[1] 更にこれを自動的に高速度で計算する方法として、DC増幅器の出力の一部をフィードバックしてやる方法[2]があるが、これは發振の懼れが多い。ここでは(5)又は(6)、(7)の方程式から非負値條件を除いたものを使うのが便利であろう。先ず

$$Ax=b$$

なる方程式を解くには、

$$\dot{x}=A(x+q\dot{x})-b$$

とおいて、アナコムにかけてみる。收束しないときは、qを充分大きくして（電氣的には、積分回路に直列に入つている抵抗の値を大きくする）ダンピングを効かせれば大ていは收束するであろう。それでも收束しなければ、變數の數を二倍にして

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c}0 & -A' \\ \hline A & 0\end{array}\right)\begin{pmatrix}x+q\dot{x}\\ y+q\dot{y}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b\\ -b\end{pmatrix}$$

とすれば、Aがどんな形であつても、前章の第六節で證明した通り、必ず安定に收束する。そのときは、

$$-A'y+b=0$$

$$Ax-b=0$$

となるから、xの收束値は最初の多元一次聯立方程式の解であること、勿論である。

最近、ゴールドベルグ及びブラウン(3)によつて、上記の方程式の兩邊にAの逆行列A'を乘ずることにより、解を必ず收束させる方法が提案された。則ち

$$A'Ax = A'b$$

とおけば、周知の定理(4)により、Aは任意であつてもA'Aは必ず非負となる。從つて、

$$\dot{x} = -A'Ax + A'b$$

としておけば、右邊にxその時間微分を加えなくても、必ず收束させることができる。この方法は、筆者の場合よりも變數の數が少くてすむ點は良いが、豫め手廻し計算機でA'AとA'bとを計算しておかなければならないのが缺點である。

註

1 Soroka, W. W., Analog Mathods in Computation and Simulation, McG-H., 1954, pp. 108—116.

2 Ibid. pp., 116—117.

3 Ibid. pp., 118—119.

4 遠山啓「行列論」共立全書、一五六頁、定理3。

第三章　線型計畫のアナコムによる解法の実例

第一節　直流増幅器の選定

線型計畫の聯立微分方程式による解法の數學的解析については、既に前章で論じてあるので、ここでは主として、技術的問題を扱うことにする。但し、電子管式アナコムの一般的問題について、は別の專門書を參照して頂きたい。

筆者の場合は、方程式の種々の常數の値の變化が、解に及ぼす影響を同時に見たい、という要求があるため、計算機としては、高速度の繰返し型を採用することに決めた。精度も、出來るだけ高いことが望ましいけれども、そのためには增幅率の高いものを使わねばならず、繰返し型では使用周波數が高くなつて發振の危險も多くなつてくるので、最も簡單なフィルブリックの回路を借用することとした。

一個の增幅器は二本の高增幅率双三極管12AX7二本を使用し、一本を differential amplifier input stage に、他の一本を電壓增幅と cathode follower output stage に當てている。これの二組を一箱に組込んで、その一組を sign-changer として使うことにより、同一入力に對して正負何れの出力をも同時に取り出せるようになつている。線型計畫を解くには、變數の數の二倍の增幅器が必要である。

この種の增幅器の回路には種々のものが關係書藉に記載されているが、抵抗値など、そのまま信用して作つても、中々直流バランスのとれないことが多いので、注意が肝心である。直流增幅器の場合には、部品の選定にも、細心の注意を拂わなければならない。最近日本でも、優秀なポリスチレン・コンデンサーや、五〇〇Kオーム程度の實線可變抵抗器ができるようになつたので、全部國產品でも間に合うのは有難い。但し、眞空管の12AX7は、國產品はGEのものに比べてI_pの變域が狹く、±50V以内でカット・オフ狀態になるものがあるので、安心できない。

第二節　計算回路の設計

第二章第一節の末尾に示した問題を解くための回路の設計を行う。先ず、それを聯立微分方程式化して、(22)式を求める。アナコムは、實數を電壓に變換するのであるから(22)式の數値と電壓との間の關係を決めなければならない。

(22)式の値をそのままヴォルト値とすると、増幅器の出力の正負五〇Vの變域の極く一部しか使用しないこととなり、誤差が増加なる。殊に、途中に整流回路を入れることを計算に入れると、五〇Vの變域をフルに利用することが望ましい。そこで、次のような變數變換を行う。

$$x_1 = \frac{X_1}{12} \quad , \quad x_2 = \frac{X_2}{12}$$

$$u_1 = \frac{U_1}{80} \quad , \quad u_2 = \frac{U_2}{80}$$

その結果、(22)式の右邊の係數及び常數のマトリックスは

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3/80 & -5/80 & 1 \\ 0 & 0 & -4/80 & -2/80 & 2 \\ 3/12 & 4/12 & 0 & 0 & -10 \\ 5/12 & 2/12 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

更にx、uの反應係數をそれぞれ

$$\frac{20}{12} \ , \ \frac{20}{12} \ , \ \frac{30}{80} \ , \ \frac{30}{80}$$

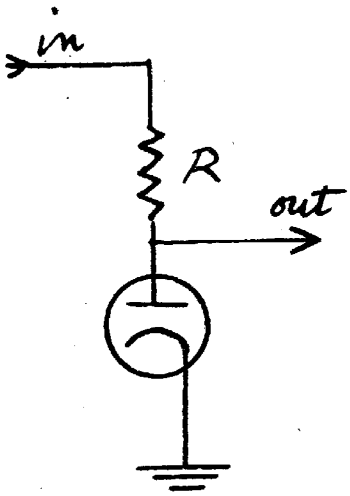
とすれば、右のマトリックスは、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.75 & -1.25 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & -0.5 & 40 \\ 0.75 & 1 & 0 & 0 & -30 \\ 1.25 & 0.5 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$$

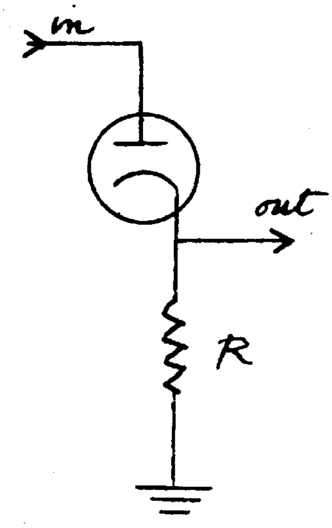
となり、五〇Vの變域をフルに利用し得る。右の手續きに際しての指針としては、第一に、常數項の値は出來るだけ大きくすること、第二に、各變數の係數の値は出來るだけ1に近附けること、に注意すればよい。後者の要求は、計算用抵抗の値の過大又は過小になることを防止するにある。右の修正された係數及び常數によって(22)式を書き直せば

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1+P}{P}\left\{-0.75\varphi(u_1)-1.25\varphi(u_2)+20\right\}\\
x_2 &= \frac{1+P}{P}\left\{-\varphi(u_1)-0.5\varphi(u_2)+40\right\}\\
u_1 &= \frac{1+P}{P}\left\{0.75\varphi(x_1)+\varphi(x_2)-30\right\}\\
u_2 &= \frac{1+P}{P}\left\{1.25\varphi(x_1)+0.5\varphi(x_2)-30\right\}
\end{aligned}\right\}\qquad(27)$$

となる。右の式におけるφは、二極管整流裝置を用いればよい。實驗には6AL5を使用した。整流回路には直列回路と併列回路とがあるが、併列にすると增幅器の出方側に五〇K程度の抵抗が直列に入るために、一一二Vの電壓降



（併列回路）

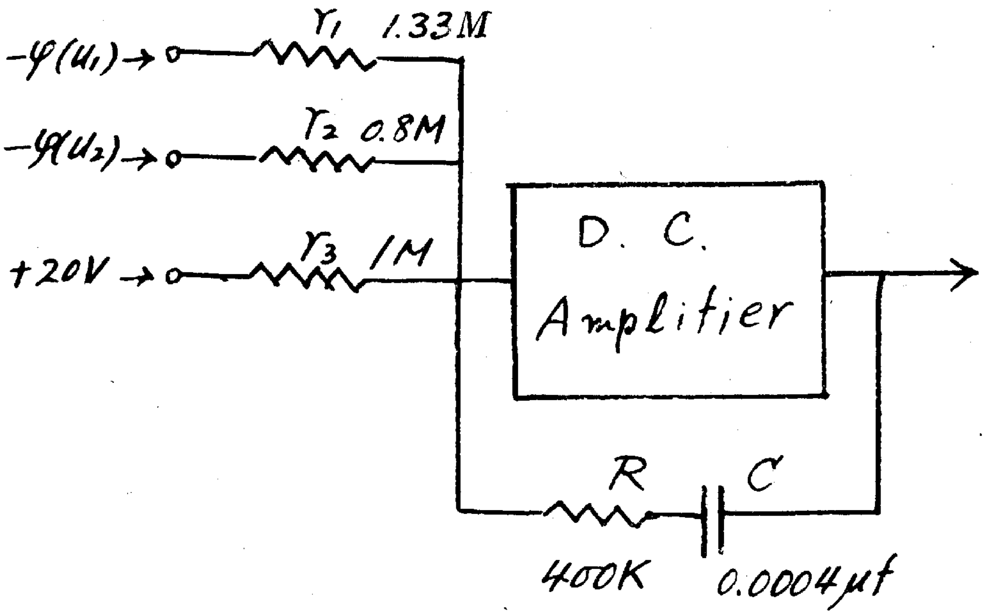


（直列回路）

下を生じるので面白くない。直列の場合には、出力はL5のカソードから取り出すので、増幅器の出力端子との間の抵抗はL5の内部抵抗（數オーム）だけとなるので、整流回路の介在による誤差が少くなる。

Rの値は、少いほど入力電壓零の場合における出力電壓が減少するが、低すぎると、増幅器の負荷が大となり、電壓降下を生ずる。12AX7のカソード・フォロワーの出力回路では、電壓降下なしに取出せる電流はせいぜい二、三MAまでであるから、Rは二五K位が最低であろう。その外に、L5のフィラメント電壓を二・五Vまで下げることによつても入力零の際の出力電壓を零に近附けることができる。以上のような注意を拂つても、零電位附近の整流特性を高めることは困難であるので、精度が要求されるならば、低電位の入力を増幅した上で整流し、更に減壓する、という方法をとらなければならないであろう。ゲルマニウム・ダイオードは、二極管に比べて特性が悪いので、使用できない。

次に、これらの整流された變數 $\varphi(x,u)$ に常數を掛けて加え、更に $(1+P)/P$ なる演算を行わなければならないが、次の



ような計算回路を使えば、一臺の増幅器でこれら總ての計算を一度に處理できるので、誠に好都合である。

この回路の傳達函數は、

$$x_1=\left[\frac{-\varphi(u_1)}{r_1}+\frac{-\varphi(u_2)}{r_2}+\frac{20}{r_3}\right]\frac{RCP+1}{CP}$$

抵抗、コンデンサーの値を代入すれば

$$x_1=\frac{160P+1}{0.0004P}\left[-0.75\varphi(u_1)-1.25\varphi(u_2)+20\right]$$

となつて、(27)式に一致する。右の式で明らかなように、時間微分の反應係數を大きくしてダンピングを強くするには、積分コンデンサに併列に入つているRの抵抗値を大きくすればよい。筆者の實驗では四〇〇Kが適當であり、一M以上になると周波數の高い部分に發振を伴う。

B電源の電壓安定については、特に注意を拂わなければならない。直流增幅器による高精度の自動電壓安定裝置が必要である。クランプ用の電源としては、正式の短型波發生裝置を使うのが常道であるが、計算用の直流增幅器に交流を入れ、出力側から近似的短型波を取出して使うこともできる。觀測用CRTオッシロは、直流分をリニヤーに表示できるものが望ましいが、ブラウン管の機構上、螢光面での上下の振幅に二―三%の喰違いの生ずることは避けられない。

第三節　實驗結果

最初は右邊の時間導函數に對する反應係數を0とおいて（則ち、Rを0として）解いてみた。第二章第一節で述べたように、その場合の係數行列は逆對稱になり、その特性根は純虛數となるので、解は非減衰の永久振動を續ける

（第一圖）。全部の寫眞が、u_1、u_2は上が負、下が正であり、xの場合と逆になつている

　次に、積分コンデンサーに直列に一〇〇Kの抵抗を入れて、解を収束させたのが、第二圖である。一目盛五Vであるから、解の値

$$\begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 30V, \\ u_1 = 40V, & u_2 = 0 \end{cases}$$

を螢光面から、可成り正確に讀み取ることができる。第二圖の二は、クランプの周期を短くして、第二圖の最初の部分を擴大したものである。前圖では不明瞭であつた非線型性が、非常によく出ている。第二圖の三は、同じ場合における$\varphi(x_1)$を横軸（一目盛一〇V）、$\varphi(x_2)$を縦軸（一目盛五V）にとつた積分曲線である。解が$x_1 = 0$の壁にぶつかつて、その上を振動しながら鞍點に収束する有様がはつきりと現れている。

　更Rにを四〇〇Kにして、充分に減衰させたのが第三圖である。

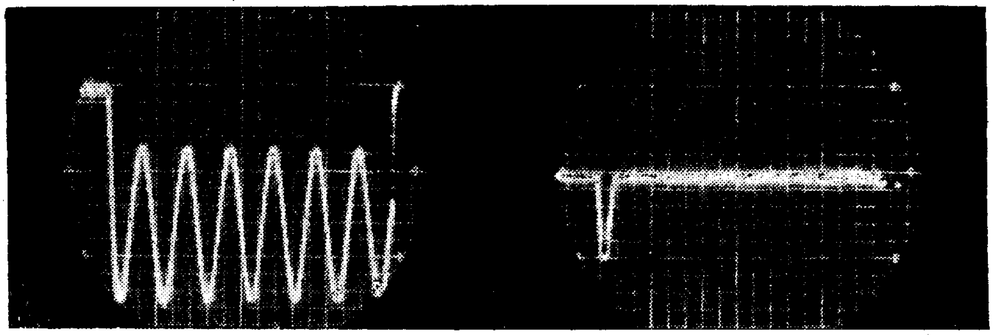
　繰返し型アナコムの最大の利點は、係數又は常數の値の變化が解に及ぼす影響を、ダイヤルを廻すことによつて瞬間的に且つ連續的に觀測できる、という點である。今度の實驗では、x_2を決定する方程式の常數四〇Vを連續的に減少させてみた。これは、最初の計畫法問題において最大にさるべき函數（$x_1 + 2x_2$）の係數2を減少させることに外ならない。それにつれて supporting plane（等賣上線）の傾斜は急になり、不等式によつて圍まれる多面錐の上を、鞍點が不連續的に移動してゆく。その有様をブラウン管の螢光面上で觀察することは、中々面白い見物である。supposting plane が次第に傾いて、多面錐の稜との間の角度が減つてくると、減衰が急に惡くなるので、Rをふやすか、クランプの周期を長くするかしないと、収束點がはつきり出なくなる。更に傾いて新しい鞍點が現れると、再

び急速に收束性が恢復する。その狀況は、映畫にでもとらないと、はつきり印象づけることはむづかしい。

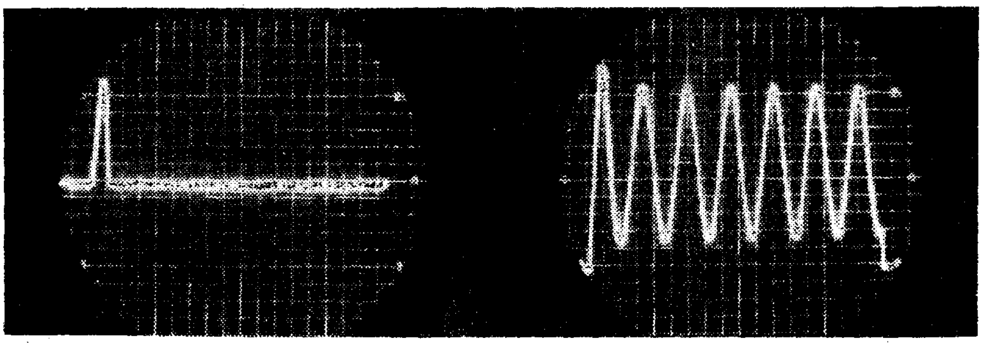
最後に、本回の實驗に當つては、工業技術院電氣試驗所の野田克彦技官、大町齊技官、鈴木昭三技官、其他多數の方々に長期間に亙つて非常な御世話を頂き、これらの方々の御援助がなければ右のような好結果を得ることはむつかしかつたであろうことを附記して、感謝の意を表わしておきたい。

（昭和卅年二月八日）

第一圖　(R = 0)

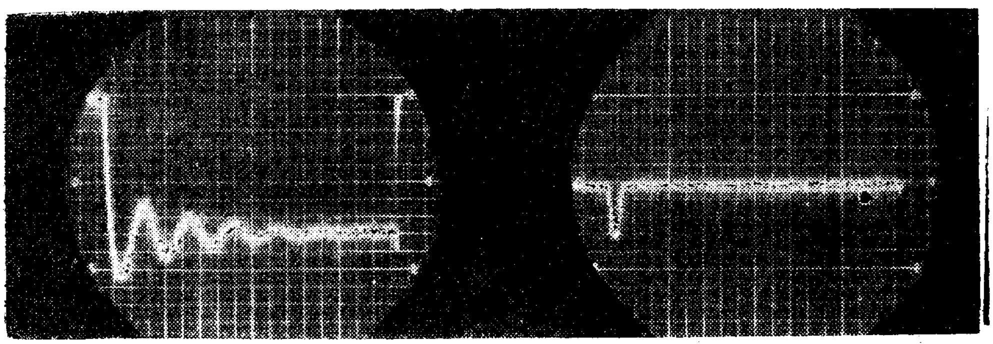


$-\varphi(u_1)$　　$-\varphi(u_2)$

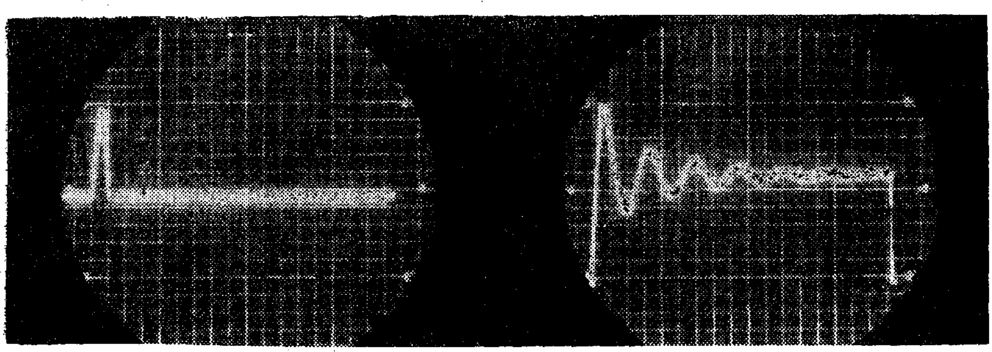


$\varphi(x_1)$　　$\varphi\, x_2)$

第二圖　(R = 100K)

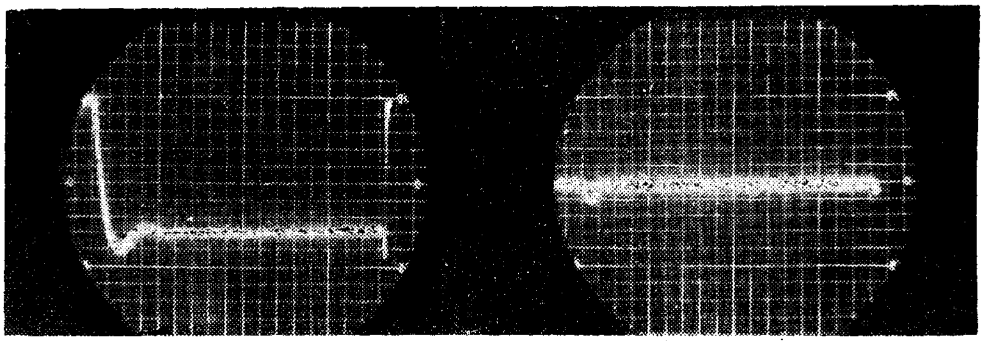


$-\varphi(u_1)$　　$-\varphi(u_2)$

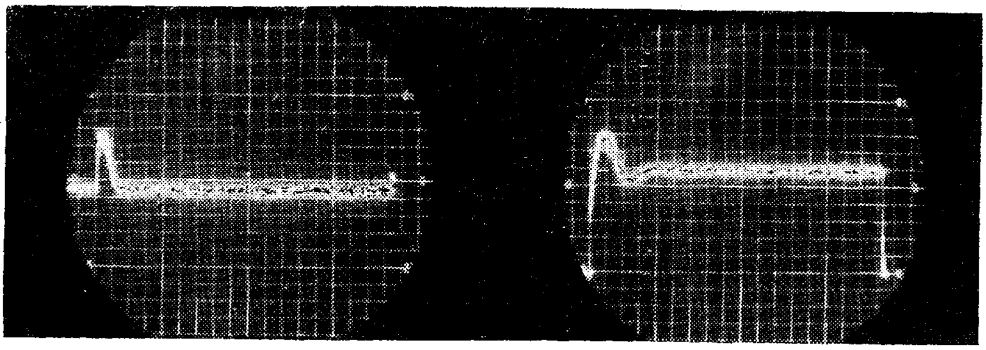


$\varphi(x_1)$　　$\varphi(x_2)$

第 三 圖　(R = 400K)

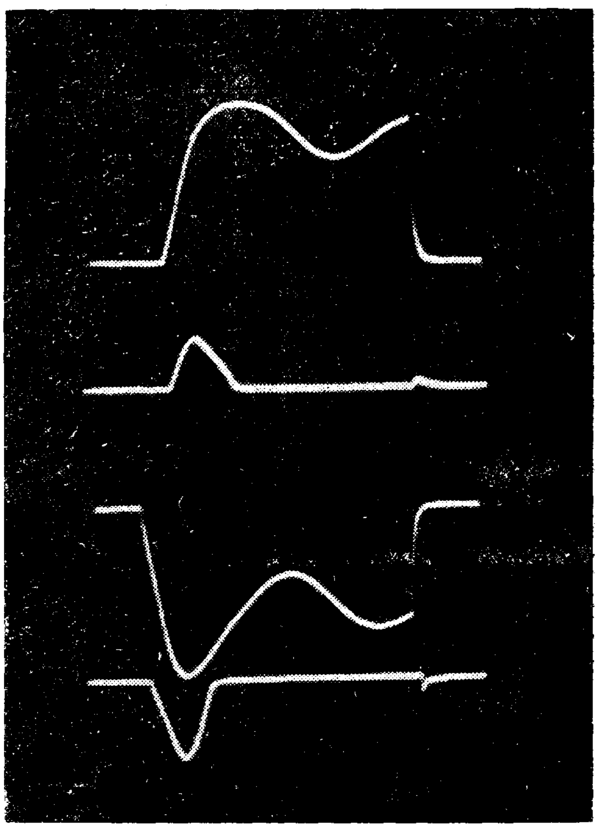


$-\varphi(u_1)$　　　$-\varphi(u_1)$



$\varphi(x_1)$　　　$\varphi\,x({}_2)$

第二圖の二

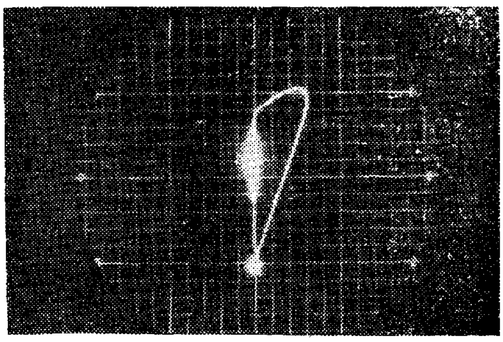


$\varphi u({}_1)$

$\varphi u({}_2)$

$-\varphi(x_2)$

$-\varphi(x_1)$



第三圖の三