線型計画問題の新しい解き方（I）

——フリッシュの対数ポテンシャル法——

古　瀬　大　六

Ragnar Frisch : Principles of Linear Programming, with particular reference to the double gradient form of the logarithmic potential method. (Memorandum fra Universitetes Socialϕkonomiske Institutt, Oslo, 18 October 1954) pp. 219.

本稿は、上の論文の出来るだけ忠実な紹介を試みたもので、筆者の意見を全く含まない。内容についての批判は、実際に幾つかの計算を試みた上でなくては、下し難いので、別の機会に譲ることとする。

目　次

1 序

オスロ大学経済学研究所における線型計画研究の結果の第一報は、1954年6—7月にイタリーのコモで開かれた「投入産出分析に関するヴァレナ会議」に提出され、"Methods of Solving Linear Programming Problems, first draft", Mimeographed Memorandum of June 1954, the Oslo Institute, pp. 90 の表題を附して発表された。

吾々の目的は、巨視的経済計画の問題を、古典的な単体法 (simplex method) のように大規模な電子管式ディジタル型計算装置を使うことなしに、簡単な手廻し計算機だけで能率的に解く方法を探すことであつた。

巨視的経済計画を立てるに当つては、今迄のような単純な投入産出分析では不充分である。則ち、(1)資源・固定設備の限界を示す不等式関係が無視されており、(2)種々の資源・生産手段の間の代替関係、新しい技術導入の可能性が考慮されておらず、(3)製品組合せの割合も固定されており、(4)社会的・人道的又は政治的な諸目的についての極大化が考えられていない。

これらの点を計算に入れるには、種々の線型不等式拘束を追加し、極大化計算を取入れることによつて、投入産出分析の線型聯立方程式を線型計画法の形に改めなければならない。

2 線型計画問題の数学的定式化

巨視的経済現象の内容を構成するところの純国民生産物、国民消費、純国民投資、種々の財の消費と投資並にその各部門間の授受量、種々の商品の輸出入量、種々の租税及び政府支出等々、を表わす変数 x_1、x_2、……x_N を、構造変数と呼ぶ。これらの構造変数の間には、種々の定義的関係又は経済主体の行動様式を表わす M 個の構造方程式が与えられている。

$$(2.1)\qquad a_{i0} + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{iN}x_N = 0 \qquad (i=1,\cdots, M)$$

投入産出分析の場合とは異り、変数の数 N と式の数 M とは一致せず、一般に変数の数 N の方が式の数 M よりも多い。その差 $(N-M)$ を構造的自由度と呼ぶ。

資源・生産設備の有限性、輸入量の制限、政治的考慮に基く制限（最低雇傭量等）などは、右の構造変数についての N^* 個の線型不等式で表わされる。

$$(2.2)\qquad a_{i0}+a_{i1}x_1+\cdots+a_{iN}x_n\geqq 0\qquad (i=N+1,\cdots,N+N^*)$$

これを（2・1）の等式と同等に扱えるようにするために、N^* 個の非負なるスラック変数 $x_{N+1},\cdots,x_{N+N^*}$ を導入して、

$$(2\cdot 4)\qquad a_{j0}+a_{j1}x_1+\cdots+a_{jN}x_N-x_j=0\qquad (j=N+1,\cdots,N+N^*)$$

と、書き改める。これを（2・1）と一括して考えれば、$(N+N^*)$ 個の変数についての $(M+N^*)$ 個の線型聯立方程式が得られる。

その外にまた、個々の構造変数が、その変域の上限又は下限を持つことが多い。下限が a であれば、x の代りに $(x-a)$ とおけば、$x\geqq 0$ なる単純な非負条件でこれを表わすことができる。下限ならば、$(b-x)$ でおきかえることによつて、同様に、x の非負条件に転化させることができる。両方に限界のある場合には、下限の方は非負条件で、上限の方はスラック変数で処理することにより、必らず等式化することが可能である。

以上のような等式化を施した結果、$(n+m)$ 個の変数についての n 個の式よりなる線型聯立方程式と、$(n+m-N)$ 乃至 $(n+m)$ 個の変数についての非負条件とが得られ、それらによつて自由度 n（則ち n 次元の）なる許容域（admissible region)、則ち x の存在可能領域が規定される。計画法とは、この領域内で、或る選好函数（preferencc function)

$$f=\pi_0+\pi_1x_1+\cdots+\pi_{n+m}x_{n+m}$$

を最大ならしめるところの変数 x の値を求める問題に外ならない。

3 全変数を基底変数で表わすこと

前述の如く、線型計画問題は、

$$a_{i0}+a_{i1}x_1+\cdots+a_{i,m+n}x_{m+n}=0\qquad (i=1,\cdots,m)$$

$$x\geqq 0$$

なる条件の下で

$$f=\pi_0+\pi_1x_1+\cdots+\pi_{m+n}x_{m+n}$$

を最大にするところの解を求めることである。それは n の自由度を持つから、

$m+n$ 個の変数のうちの任意の n 個を常数と見て、残りの m 個の変数について解けば、これらの m 変数を n 変数の函数として求めることができる。この選ばれた n 個の変数を基底変数（basis variables)、それらによつて表現される m 個の変数を従属変数（dependent variables）と呼ぶ。この基底変数を $(x_u, x_v, \cdots, x_w)$、従属変数を（$x_p, x_q, \cdots, x_r$）とすれば、右の聯立方程式は

$$(3\cdot 1)\qquad x_j = b_{j0} + b_{ju}\,x_u + b_{jv}\,x_v + \cdots + b_{jw}\,x_w \qquad (j=p, q, \cdots r)$$

となる。これに $x_i = x_i$ $(j=u, v, \cdots, w)$ なる n 個の恒等式を添加すれば、右の式は $j=1, \cdots, m+n$ についての $(m+n)$ 個の聯立方程式と見ることができる。

或る一組の変数 $(x_u, x_v, \cdots, x_w)$ が底基変数として使えるためには、残りの m 変数の係数より構成される $m\times m$ 行列が non-singular（則ち、その行列式の値が 0 ではない）でなければならない。然し、実際の計算に際しては、一々その行列式の値を計算していては手数がかかるので、簡単な基底方程式の求め方が必要となる。

(1) 三角行列法……(2.1), (2.4) 式における従属変数の係数を要素とする $m\times m$ 行列の行・列を適当に入れ替えることによつて、それを三角行列（対角要素は悉く非零、其他の要素は零でも差支ない）に改めることができるならば、順次に代入することによつて、手廻し計算機だけで（3. 1）式の各係数を求めることができる。

(2) 三角行列法と聯立方程式解法との兼用……大部分の従属変数が三角行列条件を充たすならば、三角行列法で出来るだけやつて、出来なくなつたときには通常の消去法其他の聯立線型方程式解法で解き、更に三角行列法を続ける、という具合に、交互に二つの方法を繰返えす。

(3) 入為変数（artificial variables）法……$m\times m$ 行列に属する従属変数のうち、若干（ν 個）の変数を除いて、これを主変数の中に加えることによつて、$(m-\nu)\times(m-\nu)$ 行列が三角化されるならば、これによつて過剰となつた ν 個の方程式を右の ν 個の変数について解き、その解を残りの（$m-\nu$）個の聯立方程式に代入することによつて、問題を、主変数 n 個、従属変数（$m-\nu$）個の三角行列法に転化させることができる。

⑷ 主変数の選び方…… 以上の何れの便法も使えないような場合には、m変数についての聯立方程式をまともに解かなければならないので、どの変数を基底にとつても大した違はない。然し、以降の計算を簡単にするためには、問題についての具体的知識、又は、目の子算による近似解、が与えられているならば、これに基いてどの不等式が最適解において作用するか或はしないかの見当をつけて、なるべく零となることが確実な変数を基底変数にとることが望ましい。

斯くして全変数・全方程式が基底型 (basis form) に改められたならば、変数の番号附けを改めて、主変数 (basis variables) の番号を $x_1, \cdots\cdots, x_n$、従属変数の番号を $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$ とするのが便利である。則ち、

$$(3.6) \qquad x_j = b_{j0} + \sum_{1}^{n} b_{jk} x_k \qquad (j=1, \cdots, n+m)$$

（但し左辺の x_1 から x_n までは $x_j = x_j$）

これらの方程式を作り上げるに当つては、一部の変数についてはその変域を非負変域に限定してきたが、残りの変数については何等そのような条件はつけずに進んできた。然し、若し或る一変数がその変域の限定をうけないとするならば、その値を無限大又は無限小ならしめることによつて選好函数の値を無限大にすることができるので、計画法としての実質的意味がなくなつてしまう。また、若しその非限定変数の選好函数における係数が零であるならば、それを含む総ての方程式は $\infty=\infty$ となつて、方程式としての意義を失つてしまうので、これらの変数及び方程式は、悉くこれを問題から除いて考えなければならない。そのような操作を行つた結果として得られたものが右の (3.6) 式であるとするならば、(3.6) 式の総ての変数は一つ残らず非負変数である、と規定しなければならない。則ち、

$$(3.8) \qquad x_j \geqq 0 \qquad (i=1, \cdots, n+m)$$

という制約が加えられることになる。

4 若干の基底変数の入れ替え

シンプレックス法では、底基変数の入れ替えは、必らず一回一変数に限られ

るため、その計算は比較的簡単ですんだ。然し、筆者の方法によるときは、多数の変数を同時に入れ替えなければならないので、その計算を簡単にする方法を考えることの意義が非常に大きくなつてくる。

基底変数 $x_u, x_v, \cdots, x_w$ の中から除きたいと思う変数を $x_A, x_B, \cdots, x_C$ 、従属変数 $x_p, x_q, \cdots, x_r$ の中から、$x_A, x_B, \cdots, x_C$ と入れ替えに、新たに基底変数のうちに加えたいと思う変数を、$x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\gamma$ とする。

元の基底方程式が非常に簡単なものであれば、単純な消去法によつて、変数入替えを行うことができる。則ち、基底方程式のうち、新たに採用すべき変数 $x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\gamma$ を左辺に持つ方程式だけを取出して聯立させ、それを、除去すべき変数 $x_A, x_B, \cdots, x_C$ について解いて、得られた答を元の基底方程式に代入•整頓すればよい。

右の計算が非常な手数を要するときは、次に述べる遷移行列 (shift matrix) と逆遷移行列 (inverse shift matrix) とを使つて解く方が簡単になるであろう。

先ず、基底方程式のうち、左辺が $x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\gamma$ の式だけを抜出し、更にその右辺の $x_A, x_B, \cdots x_C$ についての係数だけを取出した行列〔b_{jk}〕($i=\alpha, \beta, \cdots, \gamma; k=A, B, \cdots, C$) を作り、これを遷移行列と名附ける。

$$
\text{遷移行列}\begin{pmatrix} b_{\alpha A} & b_{\alpha B} \cdots\cdots b_{\alpha C} \\ b_{\beta A} & b_{\beta B} \cdots\cdots b_{\beta C} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{\gamma A} & b_{\gamma B} \cdots\cdots b_{\gamma C} \end{pmatrix}
$$

この行列が non-singular ($|b_{jk}| \neq 0$) であると仮定するならば、その逆行列〔b^{-1}_{kj}〕もまた計算可能である。具体的計算手続としては、15〜18章のうちの適当なものを利用すればよい。

この逆遷移行列を使つて、元の基底方程式中、左辺に $x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\gamma$ を持つ式だけを聯立させて $x_A, x_B, \cdots, x_C$ について解いた値を求めれば、

$$
x_k = \sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} b^{-1}_{kj} \Big(x_j - b_{jo} - \sum_{h=u,v,\cdots)A,B,\cdots,C(\cdots,w} b_{jh}\, x_h \Big) \qquad (k=A, B, \cdots, C)
$$

$$
= - \sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} b^{-1}_{kj}\, b_{jo} - \sum_{h=u,v\cdots(A,B,\cdots,C)\cdots,w} \Big(\sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} b^{-1}_{kj}\, b_{jh} \Big) x_h
$$

$$+\sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} b^{-1}_{kj}\,x_j$$

ここで、

$$b'_{ko}=-\sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} b^{-1}_{kj}\,b_{jo} \qquad (k=A,B,\cdots,C)$$

$$b'_{kh}=-\sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} b^{-1}_{kj}\,b_{jh} \qquad \begin{pmatrix} k=A,B,\cdots,C \\ h=u,v,\cdots)A,B,\cdots,C(\cdots w \end{pmatrix}$$

$$b'_{kj}=b^{-1}_{kj} \qquad \begin{pmatrix} k=A,B,\cdots,C \\ j=\alpha,\ \beta,\cdots,\gamma \end{pmatrix}$$

とおけば、右の式は、

$$(4.8) \qquad x_k=b'_{ko}+\sum_{h=u,v,\cdots)A,B\cdots,C(\cdots w} b'_{kh}\,x_h+\sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} b'_{kj}\,x_j \qquad (k=A,B,\cdots,C)$$

の如く見易くなる。

この x_k を、元の基底方程式のうちの、左辺に $x_\alpha, x_\beta,\cdots,x_\gamma$ 以外の変数を有する方程式に代入すれば、

$$x_g=b_{go}+\sum_{h=u,v,\cdots)A,B,\cdots,C(\cdots w} b_{gh}\,x_h$$

$$+\sum_{k=A,B,\cdots,C} b_{gk}\Big(b'_{ko}+\sum_{h=u,v,\cdots)A,B,\cdots,C(\cdots w} b'_{kh}\,x_h+\sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} b'_{kj}\,x_j\Big)$$

となる。ここでまた、

$$b'_{go}=b_{go}+\sum_{k=A,B,\cdots,C} b_{gk}\,b'_{ko} \qquad \{g=p,q,\cdots)\alpha,\beta,\cdots,\gamma(\cdots,r\}$$

$$b'_{gh}=b_{gh}+\sum_{k=A,B,\cdots,C} b_{gk}\,b'_{kh}=b_{gh}-\sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} b'_{gj}\,b_{jh}$$

$$\begin{Bmatrix} g=p,q,\cdots)\alpha,\beta,\cdots,\gamma(\cdots,r \\ h=u,v,\cdots)A,B,\cdots,C(\cdots,w \end{Bmatrix}$$

$$b'_{gj}=\sum_{k=A,B,\cdots,C} b_{gk}\,b'_{kj}=\sum_{k=A,B,\cdots,C} b_{gk}\,b^{-1}_{kj}$$

$$\begin{Bmatrix} g=p,q,\cdots)\alpha,\beta,\cdots,\gamma(\cdots,r \\ j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma \end{Bmatrix}$$

とおけば、更に簡単化されて、

$$(4.13) \qquad x_g=b'_{go}+\sum_{h=u,v,\cdots)A,B,\cdots,C(\cdots,w} b'_{gh}\,x_h+\sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} b'_{gj}\,x_j \qquad \{g=p,q,\cdots)\alpha,\beta,\cdots,\gamma(\cdots,r\}$$

となる。

則ち、計算手続きとしては、先ず *15〜18* 章の方法で逆遷移行列を求め、次にそれを使つて新しい係数 $b'_{ko}, b'_{kh}, b'_{kj}; b'_{\varepsilon o}, b'_{\varepsilon h}, b'_{\varepsilon j}$ を求めて、これらを (*4.8*),(*4.13*) 式に代入すれば、新らしい基底変数 $x_u, x_v, \cdots, x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\gamma, \cdots, x_r$ についての基底方程式が得られる。

最後に、このような変数の遷移に伴つて生ずる、選好函数の変化を求めておかなければならない。最初の基底変数に対応する選好函数を

$$f = p_o + p_u x_u + p_v x_v + \cdots + p_w x_w$$

とする。これに (*4.8*) を代入すれば、

$$f = p_o + \sum_{h=u,v,\cdots)A,B,\cdots,C(\cdots w} p_h x_h + \sum_{k=A,B,\cdots,C} p_k x_k$$

$$= p_o + \sum_{h=u,v,\cdots)A,B,\cdots,C(\cdots w} p_h x_h$$

$$+ \sum_{k=A,B,\cdots,C} p_k \Big(b'_{ko} + \sum_{h=u,v,\cdots)A,B,\cdots,C(\cdots w} b'_{kh} x_h$$

$$+ \sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} b'_{kj} x_j \Big)$$

の如く、新しい基底変数についての選好函数が得られる。ここで、

$$p'_o = p_o + \sum_{k=A,B,\cdots,C} p_k b'_{ko}$$

$$p'_j = \sum_{k=A,B,\cdots,C} p_k b'_{kj} = \sum_{k=A,B,\cdots,C} p_k b^{-1}_{kj} \qquad (j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma)$$

$$p'_h = p_h + \sum_{k=A,B,\cdots,C} p_k b'_{kh} = p_h - \sum_{j=\alpha,\beta,\cdots\gamma} p'_j b_{jh}$$

$$= p_h - \sum_{k=A,B,\cdots,C} p_k \sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} b^{-1}_{kj} b_{jh}$$

とおけば、

$$f = p'_o + \sum_{h=u,v,)AB\cdots C(\cdots,\gamma} p'_h x_h + \sum_{j=\alpha,\beta,\cdots,\gamma} p'_j x_j$$

が求める選好函数である。

5 余 分 な 拘 束 の 除 去

N^*個の不等式拘束条件のうちには、それらのうちの幾つかが成立つならば、それに伴つて必然的に成立つような不等式が含まれている場合が考えられる。後者の不等式を、余分な拘束 (redundant bounds) と名附ける。このような redundant bounds は、あつてもなくても、計画法の答えには何の影響をも与

えず、単に計算手続を複雑にするだけであるから、予めこれを除いておくことが望ましい。最初から完成に除さ去ることはむづかしいけれども、簡単な手続だけでそのうちのかなりの部分を予め除去することができる。

（第一命題） 問題を基底型（basis form）に直した結果、或る従属変数x_iを左辺に持つ式の右辺の総ての係数（b_{i0}, b_{i1}, b_{i2},…,b_{in}）が非負であれば、右辺の主変数は（*3.8*）により同じく非負であるので、x_iは必然的に非負となる。従つて、元の不等式

$$b_{i0}+\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\,x_k \geqq 0$$

は、余分な拘束であり、最初から除去することができる。

（第二命題） 二つの従属変数 x_i 、x_j を左辺にもつ式の右辺の各係数（b_{i0}, b_{i1},…, b_{in}),（b_{j0}, b_{j1},‥,b_{jn}）を比較を比較した結果、$b_{ik}\geqq b_{jk}$($k=1,\cdots,n$)、則ち、x_i を左辺にもつ式の係数の方が x_j のそれよりも悉く大きい（uniform dominant）ならば、x_i についての方程式を除去して、x_j についての方程式だけを残しておけばよい。

（第三命題） x_i が直接には第二命題を満足しない場合でも、基底型（basis form）からの論理的に必然的な変換によつて得られたところの或る式 $x_j=f$（x_1,…,x_n）と比較して uniform dominant であるならば、その x_i を除くことができる。

6　許容域内の一点の決定（線型不等式の解法）

6a　序

対数ポテンシャル法（logarithmic potential method、その詳細については第*12*・*13*章を参照のこと）を利用する際には、予め、総ての不等式拘条件を満足するところの x の一つの値（則ち、initial feasible solution）がわかつていなければならない。単に、与えられた式の形をながめるだけで、この initial feasible solution を求めることのできる場合も少くない。然しながら、与えられた式が複雑であると、もつと組織的な求め方が必要となつてくる。

この許容域内の一点を見出す組織的方法（則ち、線型聯立不等式を解く方

法）として、種々様々な逐次計算法（iterative method）が考え出されている。オスローの経済研究所では、これらの方法を使つて実際に計算してみた結果、次の（$6e-6g$）の方法が最も有效であることがわかつた。

許容域内の一点が求められれば、爾後の線型計画問題を解くに必要な手続きは、次の二つに分けて考えることができる。その一つは、許容域内の出発点からの運動方向を決定することがあり、他の一つは、その方向に沿つての運動の長さを決めることである。則ち、出発点（initial feasible solntion）の $n+m$ ヴェクトルを x、運動の方向ヴェクトルを d、運動の長さを λ とすれば、その運動の終点 x' の値は、

$$(6a.4) \qquad x' = x + \lambda d$$

で表わされる。この二つの点 x、x' は何れも許容域内になければならないから、何れも basis foxm（3.6）を滿足する筈である。

則ち、

$$(6a.5) \quad \begin{cases} x_j = b_{jo} + \sum_1^n b_{ik} x_k & (j=1,\cdots,n+m) \\ x'_j = b_{jo} + \sum_1^n b_{jk} x'_k & (j=1,\cdots,n+m) \end{cases}$$

$$\therefore \quad x'_j - x_j = \lambda d_j = \sum_1^n b_{jk}(x'_k - x_k) = \sum_1^n b_{jk}(\lambda d_k)$$

$$(6a.5) \therefore \quad d_j = \sum_1^n b_{jk} d_k \qquad (j=1,\cdots,n+m)$$

が成立たなければならない。但し（$6a.5$）は、（$j=1,\cdots,n$）の場合には $d_j = d_j$ なる恒等式にすぎない。この（$d_1,\cdots,d_n$）を、変数の場合と同様に、基底方向（basis direction）と名附けるならば、この n 個の方向要素の決まりさえすれば、残りの m 個の方向要素（$d_{n+1},\cdots,d_{n+m}$）は（$6a.5$）式を通じて一義的・従属的に決定される。

この d の値は、それが出発点の近傍に於て許容域内にある限り、無限に多くの値をとることができるが、それに伴う選好函数の増加を最大にするところの方向が必らず存在する筈である。このような d の値、則ち d の最適値を求めようとすれば、それには、与えられた線型計画問題を完全に解かねばならぬこととなり、逐次計算法としての意味が全く失われてしまう。それ故、最適値で

なくてもよいから、それに近い値を、簡単な計算手続で、求められるように工夫しなければならない。以下（$6b$—$6e$）において、このような簡易決定法について考えてみよう。

$6b$　聯立方程式を解かずに d を決める妥協的方法

以下、証明の便宜上、測定単位の影響を除くために、全変数を予め normalize しておく。則ち

$$(6b.1)\qquad \xi_j=\frac{x_j}{B_j}\qquad (j=1,\cdots,n+m)$$

但し

$$(6b.2)\qquad B_j=\sqrt{b_{j1}^2+\cdots+b_{jn}^2}\ ,\quad \beta_{ik}=\frac{b_{ik}}{B_j}$$

と変数変換を施した上で、（3.6）の basis form を

$$(6b.3)\qquad \xi_j=\beta_{j0}+\sum_1^n\beta_{jk}\xi_k\qquad (j=1,\cdots,n+m)$$

のように書き換えておく。normalize されているから、$\beta_{j1}^2+\cdots+\beta_{jn}^2=1$ であること勿論である。

先ず、絶対座標の値が（$x_1,\cdots,x_n$）である一点 x から、$x_j=0$ なる平面へ下した垂線の脚の一点（則ち x の $x_j=0$ 平面への projection）の座標を（$x_{1j},\cdots,x_{nj}$）とすれば、

$$(6b.6)\qquad x_{kj}=x_k-\frac{x_j\,b_{jk}}{b_{j1}^2+\cdots+b_{jn}^2}\qquad (k=1,\cdots,n)$$

となる。これを normalize して、ξ を使つて表すならば、簡単に、

$$(6b.7)\qquad \xi_{kj}=\xi_k-\xi_j\,\beta_{jk}\qquad \begin{pmatrix}k=1,\cdots,n\\ j=1,\cdots,n+m\end{pmatrix}$$

となるであろう。

この出発点 ξ（$\xi_1,\cdots,\xi_n$）から、（$-\beta_{j1},\cdots,-\beta_{jn}$）の方向に（則ち $\xi_j=0$ 平面に向つて垂直に）L_j の長さだけ進んだ先の点を $\xi'\equiv(\xi'_1,\cdots,\xi'_n)$ とすれば、

$$(6b.8)\qquad \xi'_k=\xi_k+L_j\,\beta_{jk}\qquad \begin{pmatrix}k=1,\cdots,n\\ j=1,\cdots,n+m\end{pmatrix}$$

となること、云うまでもない。この ξ' 点が丁度 $\xi_j=0$ 平面上に達する（則ち、$\xi'_j=0$ となる）ための必要十分条件は、

(6b.9) $L_j = -\xi_j$

であること、(6b.7) 式を一目見れば明かであろう。ここで、$\xi_j = 0$ 平面に垂直に進んで丁度 $\xi_j = 0$ 平面に達した瞬間の、ヴェクトル要素の増分に注目し、これを $\varDelta_{kj} = \xi'_k - \xi_k$ $(k=1,\cdots,n)$ で表わせば、

$$\varDelta_{kj} = (\xi_k + L_j \beta_{jk}) - \xi_k = L_j \beta_{jk} = -\xi_j \beta_{jk}$$

(6b.10) $\therefore \quad \varDelta_{kj} = -\xi_j \beta_{jk} \qquad (k=1,\cdots,n)$

の如く簡単に表わされるであろう。

以上は、$\xi_j = 0$ という唯一つの平面に向つて垂直に進む場合の座標の動きを考えてきたのであるが、更に、幾つかの平面に対して同時に近似的に垂直になるように進もうと試みる場合について考えてみよう。このような妥協的方法には種々のやり方が考えられる。各平面について計算された $\varDelta_{kj}$ の合計値を以て決定するのも一つの方法であろう。則ち、この場合の妥協的基底方向 (compromise basic direction) を $(\varDelta_1,\cdots,\varDelta_n)$ とすれば、それは、

(6b.11) $\varDelta_k = \sum_{sel.j} \varDelta_{kj} = \sum_{sel.j} (-\xi_j \beta_{jk}) \qquad (k=1,\cdots,n)$

で表わされる。総和記号に添えられた $sel.j$ なる符号は、その方向へ進もうと計画している平面についてのみ合計することを意味する。これに伴う従属変数の変化 $(\varDelta_{n+1},\cdots,\varDelta_{n+m})$ は、(6b.3) 式より、

(6b.12) $\varDelta_j = \sum_{1}^{n} \beta_{jk} \varDelta_k \qquad (j=n+1,\cdots,n+m)$

となり、この右辺に (6b.11) を代入すれば、$\varDelta_1,\cdots,\varDelta_n$ の場合と同様に $sel\xi_j$ の線型函数となる。以上二つの場合を一括すれば、向うべき平面が決まりさえすれば、全変数についての方向 $\varDelta_1,\cdots,\varDelta_{n+m}$ が決まり、従つて、この方向に λ の長さだけ進んだ先の座標 ξ' の値は、

(6b.13) $\xi'_j = \xi_j + \lambda \varDelta_j \qquad (j=1,\cdots,n+m)$

となるであろう。

ここで、$sel\,\xi_j$ の選び方について一言しておかなければならない。ξ_j は何れも非負でなければならないから、出発点において負であるところの総ての変数を、$sel\,\xi_j$ に選ぶのが極めて自然である。丁度 0 に等しい変数は、$sel\,\xi_j$ の中に加えても加えなくても $\varDelta_j$ の値には変りはない (6b.11)。それ故、

$$(6b.14) \quad \Delta_k = \Sigma_j(-\xi_j\beta_{jk})\,[\xi_j > 0] \qquad (k=1,\cdots,n)$$

によつて compromise basis direction を求め、それを（6b.12）に代入して残りの方向 $\Delta_{n+1},\cdots,\Delta_{n+m}$ を決定すればよい。

以上は、normalize された ξ 座標・β 係数について論じてきたが、$\xi_j=x_j/B_j$，$\beta_{jk}=b_{jk}/B_j$ によつて元の x 座標・b 係数に戻せば、（6b.14）式は

$$\frac{d_k}{B_k}=\Sigma_j\left(-\frac{x_j}{B_j}\times\frac{b_{jk}}{B_j}\right)[x_j<0] \qquad (k=1,\cdots,n)$$

と改められる。更に見易くするために

$$(6b.17) \qquad X_j=\frac{x_j}{B_j{}^2} \qquad (j=1,\cdots,n+m)$$

とおいて、

$$(6b.18) \quad d_k = B_k\Sigma_j(-X_j b_{jk})\,[X_j<0] \qquad (k=1,\cdots,n)$$

と書き直しておくと、計算に便利である。

則ち、出発点の x 座標と、基底方程式とが与えられるならば、先ず

$$B_j{}^2 = b_{j1}^2+\cdots+b_{jn}^2 \qquad (j=1,\cdots,n+m)$$

を計算しておき、それを使つて $X_j = x_j/B_j$ $(j=1,\cdots,n+m)$ を求め、それを前記の（6b.18）式に代入することによつて、compromise basis direction $(d_1,\cdots,d_n)$ を簡単に算出することができる。それを更に $d_j=\sum_1^n b_{jk}d_k$ $(j=n+1,\cdots,n+m)$（6a.5）に代入すれば、残りの総ての方向ヴェクトルが決まる。その上で、$6f\sim6g$ の方程式で進行の長さ λ を決定すれば、

$$x'_j = x_j+\lambda d_j \qquad (j=1,\cdots,n+m)$$

によつて、新しい位置の x 座標、則ち x' の値が計算されるであろう。

6c 回帰法による方向の決定

何等かの方法で決められた方向 D に向つて進みたいのだが、その行きついた先 $x'_j=x_j+\lambda D_j$ が元の基底方程式 $x_j=b_{j0}+\sum_1^n b_{jk}x_k$ $(j=1,\cdots,n+m)$ を満足するという保証がない場合には、どうしたらよいであろうか？

D とは別に、基底方程式を満足する未知の方向 d を考える。この d を、出来るだけ D に近いように決めるならば、D へ進みたいという要求と、基底方程式を満足させたいという要求とを、妥協させることができるであろう。

則ち、問題は、D が与えられたとき、

$$\sum_{1}^{n+m} (d_j - D_j)^2$$

を最小にするような方向 d を求めることである。右の自乗和は、$d_i\ (i=1,\cdots,n)$ を主変数、$d_j = \sum_{1}^{n} b_{jk} d_k \quad (j=n+1,\cdots,n+m)$ を従属変数とする連続函数であるから、これを主変数 d_i について偏微分したものを零とおけば、

$$2(d_i - D_i)+2\sum_{n+1}^{n+m}(d_j - D_j)\,b_{ji} = 0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

という聯立方程式が得られる。$(d_i - D_i) = \sum_{1}^{n}(d_j - D_j)b_{ji}\ (\because i=j \to b_{ji} = 1,\ i \neq j \to b_{ji}=0)$ であるから、右の聯立方程式は更に、

$$\sum_{1}^{n+m}(d_j - D_j)\,b_{ji} = 0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

のような見易い形に改められる。この式の中に含まれている m 個の従属変数 $(d_{n+1},\cdots,d_{n+m})$ を、$d_j = \sum_{1}^{n} b_{jk}\,x_k$ によつて悉く n 個の主変数で表わせば、

$$\sum_{j=1}^{n+m}\left(\sum_{1}^{n} b_{jk}\,d_k - D_j\right) b_{ji} = 0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

$$\therefore -\sum_{1}^{n+m} D_j\,b_{ji} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{1}^{n+m} b_{ji}\,b_{jk}\right) d_k = 0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

ここで、

$$M_i = -\sum_{1}^{n+m} D_j\,b_{ji} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

$$M_{ik} = \sum_{1}^{n+m} b_{ji\,jk} \qquad \begin{pmatrix} i=1,\cdots,n \\ k=1,\cdots,n \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$(6c.2) \qquad M_i + \sum_{1}^{n} M_{ik}\,d_k = 0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

となり、これを解けば、basic direction を一義的に決定することができる。係数 M_{ik} は対称 $n\times n$ 行列の要素であるから、n^2 個全部について計算する必要はなく、約半数の $n(n+1)/2$ 個だけ計算すればよいことになる。

6d 回帰法の特殊型

前記の回帰法では、希望方向 D が、基底関係を満足するかどうか不明であつ

たので、それを満足するような方向 d を別に選び出さなければならなかつた。然し、D の選び方を適当にすれば、別に d を考えなくても、D のままで基底関係を満足させることができる。

それには先ず、出発点において負であるような座標については D の値を正に、零であるところの座標については D の値を零又は正にとる。出発点の座標値が正のときは、それに対応する D の要素の符号は任意に選んで差支ない。

次に、λ の値としては、

(6d.2) $\quad \underset{j}{Max} - x_j / D_j \qquad [x_j < 0]$

よりも大きく、同時に、

(6d.2) $\quad \underset{j}{Min}\ x_j / -D_j \qquad [x_j > 0,\ D_j < 0]$

よりも小さい任意の値を決める。$Max - x_j / D_j$ $[x_j < 0]$ は必らず正であるから、それよりも大きな λ の値もまた、必らず正である。そのような λ の変域が存在しない場合にも、D の各要素の値を、右の符号条件を守りながら、適当に修正することによつて、存在するようにすることができる場合もあるであろう。

そのような運動の終点の位置 x' の値は、

$$x'_j = x_j + \lambda D_j \qquad (j=1, \cdots, n+m)$$

で与えられ、負なる x_j を x_k とすれば

$$x'_k = x_k + \lambda D_k = \{\underset{j}{max} \frac{-x_j}{D_j} [x_j < 0]\} D_k + x_k$$

$$\geqq x_k + \frac{-x_k}{D_k} D_k = 0$$

$$\therefore x'_k > 0$$

となり、また、出発点が正で運動方向が負である変数を x_l とすれば、

$$x'_l = x_l + \lambda D_l = x_l + \{\underset{j}{min} \frac{x_j}{-D_j} [x_j > 0,\ D_j < 0]\} D_l$$

$$\leqq x_l + \frac{x_l}{-D_l} D_l = 0$$

$$\therefore x'_l > 0$$

となる。$x_j \geqq 0$, $D_j \geqq 0$ の場合には x'_j は勿論正である。以上により、終点

x' の各要素は何れも非負条件を満足し、従つて、一気に許容域内に突入することができる。

D を任意に選べるならば、

$$(6d.3)\qquad D_j=-x_j\qquad (j=1,\cdots,n+m)$$

とすることによつて、(6d.2) の最大値と最小値とは何れも 1 になり、その運動の結果、x'_j は悉く 0 となる。然しながら、これは基底関係を無視しているので、一般には使用されない方法である。けれども、それを前記の回帰法の D として使い、それによつて妥協的方向 d を決めることは可能である。

(本節に記された特殊回帰法は、何れも基底関係を無視しているので、出発点 x 及び方向 D が何れも基底方程式を満足しているのでなければ、実際の役には立たないと思われる。紹介者註記°)

6e　若干の負変数を零とおいて方向を決める方法

先ず、n 個の主変数 $x_1,\cdots,x_n$ を任意に選ぶ (実例では全部正値を与えている)。これを基底方程式 $x_j=b_{j0}+\sum_1^n b_{jk}x_k$ に代入して、m 個の従属変数 $x_{n+1},\cdots,x_{n+m}$ を決める。そのうちには、その点が既に許容域内にあるという偶然の場合を除いて、幾つかの負値をとる変数が必らず存在するであろう。若しも、これらの負変数のうち互に線型従属のものがあれば、そのうち任意の一つを残して残りを以下の計算の対象から除いておく。

これらの負変数の数が n よりも多いときは、その絶対値 $|x_j|$ の大きいものから順に n 個をとる。n 個未満ならば全部を対象とすることができ。るこれらの選ばれた負の従属変数 x_j を左辺にもつ基底方程式 $b_{j0}+\Sigma b_{jk}x_k=0$ を聯立させ、式の数よりも変数の数 n の方が多いときは、それらのうちの任意のものを 0 とおいて、式の数と変数の数とを一致させた上で、これを解く。その解を $x'_1,\cdots,x'_n$ (予め 0 とおいた変数は、そのまま 0 と見做す) とすれば、方向 d は、

$$(6e.1)\qquad d_k=x'_k-x_k\qquad (k=1,\cdots,n)$$

によつて決定される。従属方向は、この主方向を $d_j=\sum_1^n b_{jk}d_k$ $(j=n+1,\cdots,n+m)$ に代入することによつて決定されること、言うまでもない。(このような手続をとることにより x' 点は x 点よりも許容域に近附くであろう。)

方向 d が決まれば、その方向に方つて $6g$ 節の $S(\lambda)$ が最小になるように λ を決める。必要があれば、更にこの点を出発点として、同様の計算を繰返す。出発点における n 個の主変数の値を悉く 0 とおくことも可能である。

6f　運動の長さについての一般的立言

以上 $6b$—$6e$ に亙つて、方向 d を決める四つの方法について述べた。以下においては、λ の長さを決める方法を論じなければならない。

方向 d と出発点 x とが基底関係を満足しているとすると、吾々の狙いは、λ の値を適当に決めることによつて、総ての変数を非負ならしめることにある。従つて、これらの変数のうちで負値をとる各変数の絶対値の和 $S(\lambda)$ を最小にするような λ の値を求めなければならない。方向 d が決まれば、$S(\lambda)$ は λ の一価函数となる。その導函数 $S'(\lambda)$ は、λ の増加につれて、ヴェクトル d が、各 $x_j=0$ 平面を正から負へ、又は負から正へ通過する際に、有限値から 0 へ又は 0 から有限値へと、不連続的に変化する。

右の $S(\lambda)$ の代りに、負値をとる各変数の絶対値の variance を利用することもできる。これもまた、λ の函数である。然し、$6e$ の方法で d を決める際には、経験上、$S(\lambda)$ を最小にする λ 決定法が極めて便利である。

6g　$S(\lambda)$ を最小にするように λ を決める方法

$S(\lambda)$ の値が、λ の増加につれてどう変るか、を考えてみよう。以下の説明は非常に複雑だが、実際やつてみると、計算は極めて簡単で、容易に機械化することができ、机上型計算機の操作に慣れた人なら誰でも行うことができる。先ず、若干の存在定理から始める。

(6g.1)　若し $-\Sigma d_j[x_j=0,\ d_j>0]\leqq\Sigma d_j[x_j<0,\ d_j\gtreqless 0]$

$$\leqq-\Sigma d_j[x_j=0,\ d_j<0]$$

ならば、$S(\lambda)<S(0)$ ならしめるような λ の値は存在しない。則ち、出発点 x から方向 d 又は $-d$ に向つて動いても、$S(\lambda)$ の値は減少しない。何となれば、$\lambda>0$ の場合には、前提により、

$$S(\lambda)=-\lambda\Sigma d_j[x_j<0]-\lambda\Sigma d_j[x_j=0,\ d_j<0]\geqq 0$$

また $\lambda<0$ の場合には、

$$S(\lambda)=\lambda\Sigma d_j[x_j=0,\ d_j>0]+\lambda\Sigma d_j[x_j<0]\geqq 0$$

となるから $S(\lambda)$ の値は λ が 0 から正又は負方向に増しても、決して減少することはない。

(6g.2)　若し $-\Sigma d_j[x_j=0,\ d_j<0]<\Sigma d_j[x_j<0,\ d_j\gtreqless 0]$ ならば、$S(\lambda)$ の値を最小にするところの λ の正な一義的値が存在し、その $S(\lambda)$ の値は $S(0)$ よりも小である。(証明後述)。

(6g.3)　若し $\Sigma d_j[x_j<0,\ d_j\gtreqless 0]<-\Sigma d_j[x_j=0,\ d_j>0]$ ならば、$S(\lambda)$ の値を最小にするところの λ の負な一義的値が存在し、その $S(\lambda)$ は $S(0)$ よりも小である(証明後述)。

若し、右の (6g.2) と (6g.3) とが同時に満足されるならば、λ の最適値は、正負それぞれ一つづつ存在する。そのうち何れの方を取るべきかを決めるには、以下に述べる計算法に従つて、それぞれの場合の $S(\lambda)$ の値を求めた上で、そのうちの小さい方を採用すべきである。但し、出発点の x_j の値が一つも零を含まず、且つ、$\Sigma d_j[x_j<0,\ d_j\gtreqless 0]\neq 0$ であるならば、そのような面倒臭い二重計算をする必要はない。何となれば、$\Sigma d_j[x_j<0,\ d_j\gtreqless 0]$ の値が正のときは λ の最適値は (6g.2) により正、上記の値が負のときは λ の最適値は (6g.3) により負、と、何れか一方に予め決まつてしまうから、正負何れか一方だけについて計算すれば十分である。

以下、λ の最適値の計算法を述べる。先ず、d が (6g.2) の条件を充たすものとする。最初に次の V_o を計算する。

(6g.4)　$-V_o\equiv\Sigma d_j[x_j<0,\ d_j\gtreqless 0]+\Sigma d_j[x_j=0,\ d_j<0]$

この右辺は前提 (6g.2) により必らず正、従つて V_o は必らず負、である。

次に、x_j と d_j とが異符号のものについて

(6g.5)　$\lambda_j\equiv\left|\dfrac{x_j}{d_j}\right|$　$(x_j d_j<0)$

を計算する。λ_j は勿論悉く正であるから、それを小さいものから順に並べて、$0<\lambda_{(1)}<\lambda_{(2)}<\cdots\cdots$ と番号をつけておく。場合によつては、同じ $\lambda_{(i)}$ に属する j が二つ以上存在することも考えられる。そこで、同じ $\lambda_{(r)}$ に属する総ての d_j(それを $d_\alpha, d_\beta,\cdots\cdots$ で示す) の絶対値の和 $V_{(r)}$ を求める。

(6g.7)　$V_{(r)} = |d_\alpha| + |d_\beta| + \cdots\cdots$　$(r=1,2,\cdots\cdots)$

これらの $V_o, V_{(1)}, V_{(2)}, \cdots\cdots$ の値から、累積的に、次の $V_{[o]}, V_{[1]}, V_{[2]}, \cdots\cdots$ を計算する。

$$(6g.8)\begin{cases} V_{[o]} \equiv V_o \\ V_{[1]} \equiv V_o + V_{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_{[r]} \equiv \sum_{1}^{r} V_{(l)} + V_o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_{[\omega]} \equiv \sum_{1}^{\omega} V_{(l)} + V_o \end{cases}$$

この $V_{[o]}, V_{[1]}, \cdots, V_{[\omega]}$ の数列は、$V_{[o]}$ が負、$V_{(1)}, \cdots, V_{(\omega)}$ が悉く正、であるから、初めのうちは負変域において単調増加を続け、或る段階 $V_{[r]}$ に達すると負から正又は零に転ずるであろう。若し、この $V_{[r]}$ が正であるならば、それは全数列中の正の最小値であり、それに相当する $\lambda_{(r)} = |x_r / d_r|$ がλ の正の最適値に外ならない。則ち、この $\lambda_{(r)}$ において、$S_{(\lambda)}$ は λ の非負変域における最小値をとる。その $\lambda_{(r)}$ を $S_{(\lambda)}$ に代入した値 $S(\lambda_{(r)})$ が零であるならば、吾々は既に許容域内にあり、正であれば、然らざることを示す。

また $V_{[r]}=0$ となるならば、$S(\lambda)$ の値は $\lambda_{(r)}$ と $\lambda_{(r+1)}$ との区間内において一定の値を保つ。

而て、この $S(\lambda_{(r)}) = S(\lambda_{(r+1)}) = 0$ は、前の場合と同様に、λ の非負変域における最低値に外ならない。

〔6g.2 の証明〕 出発点 x_j が負ならば、d_j の符号の如何に拘らず、λ の値に十分小さな正値を与えることにより、$x_j + \lambda d_j$ の値を負ならしめることができる。また、x_j が 0 で d_j が負の場合には、λ の任意の正値に対して、$x_j + \lambda d_j$ は必らず負となる。従つて、

$$(6g.11)\quad -S(\lambda) \equiv \Sigma(x_j + \lambda d_j)[x_j < 0,\ d_j \gtreqless 0] + \Sigma(x_j + \lambda d_j)[x_j = 0,\ d_j < 0]$$

の値は、λ に十分小さな正値を与えるならば、負となるであろう。この右辺を整頓して、$\lambda \Sigma d_j [x_j < 0,\ d_j \gtreqless 0] + \lambda \Sigma d_j [x_j = 0,\ d_j < 0]$ と、

$\Sigma x_j[x_j<0, d_j \gtreqless 0]+\Sigma x_j[x_j=0, d_j<0]$ とに分ければ、前者は(6g.4)により $-\lambda V_o$ に等しく、後者は $-S(0)\equiv -\Sigma|x_j|[x_j<0]$ に等しい。それ故、

$$-S(\lambda)=-S(0)-\lambda V_o$$

$$(6g.12)\quad \therefore\ S(\lambda)=S(0)+\lambda V_o$$

この関係は、少くとも一つの変数が、λ の増加につれて、始めて負から正へ、又は正から負へ変化する瞬間まで、持続される。その瞬間における λ の値は、$\lambda_j=|x_j/d_j|[x_j d_j<0]$ で定義される λ_j のうち最小のものに等しく、従つて、$\lambda_{(1)}$ に一致する。

その $\lambda_{(1)}$ に該当する x_j が x_α であり、且つ、それが $\lambda_{(1)}$ において負から正に移るものとすれば、$S(\lambda)$のλ についての微係数、則ち V_o の値は、λ が $0<\lambda<\lambda_{(1)}$ の区間にある間は一定に保たれるが、$\lambda_{(1)}$ を超える瞬間から $-d_\alpha$ が脱落し、V_o の値は従つて $d_\alpha(>0)$ だけ大きくなる。反対に、x_α が正から負に移る場合には、V_o の中に新たに $-d_\alpha(d_\alpha<0)$ が加わつてきて、V_o の値は $-d_\alpha$ だけ大きくなる。則ち、何れの場合においても、V_o の値は、V_o から $V_o+|d_\alpha|$ に増加する。$\min \lambda_j$ に該当する変数が二つ以上($x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\gamma$)ある場合には、$|d_\alpha|$ の代りに $|d_\alpha|+|d_\beta|+\cdots+|d_\gamma|$ をとればよい。然し、何れであろうとそれは $V_{(1)}$ に外ならないから、総ての場合を通じて、$dS(\lambda)/d\lambda$ の値は $V_o=V_{[0]}$ から $V_o+V_{(1)}=V_{[1]}$ に増加する。二番目の極小 λ_j、則ち $\lambda_{(2)}$、についても同様のことが言える。故に、一般的に

$$\frac{dS(\lambda)}{d\lambda}=V_{[r]}\qquad [\lambda_{(r)}<\lambda<\lambda_{(r+1)}]$$

が成立つ。

他方、(6g.8)式の説明の際に述べたように、数列 $V_{[0]}, V_{[1]}, V_{[2]}, \cdots\cdots$ は、初項は負であるが、負変域内において次第に増加し、或る番号から先は、正域において単調増加を続ける。また、同時に、$S_{(0)}\equiv\Sigma|x_j|[x_j<0]>0$ であるから、

$$S(\lambda)=S(0)+\lambda V_{[r]}$$

で表わされる $S(\lambda)$ の値は、$\lambda=0$ においては正であり、λ の増加につれて次

第に減少するが、その減少率もまた次第に減少し、或る段階を超えれば、増加に転ずる。従つて、$S(\lambda)$ は、λ の正変域において到るところ convex であり、必らず、一義的最小点 $\lambda_{(r)}$ が存在する。その $V_{[r]}$ が 0 のときは、最小点の代りに最小区間が存在することになる。点であつても区間であつても、λ の最適値 $\lambda_{(r)}$ は、λ が 0 から次第に増加するにつれて、最初に $V_{[r]}\geqq 0$ が成立つ瞬間の r によつて与えられることには変りはない。

ところで、$S(\lambda)$ の値を計算するには、

$$\lambda V_{[o]}=\lambda V_o \qquad 0\leqq\lambda\leqq\lambda_{(1)}$$

$$\lambda V_{[1]}=\lambda V_o+(\lambda-\lambda_{(1)})V_{(1)} \qquad \lambda_{(1)}\leqq\lambda\leqq\lambda_{(2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda V_{[r]}=\lambda V_o+(\lambda-\lambda_{(1)})V_{(1)}+\cdots+(\lambda-\lambda_{(r)})V_{(r)} \qquad \lambda_{(r)}\leqq\lambda\leqq\lambda_{(r+1)}$$

並びに

$$\lambda_{(r)}=\frac{|x_\alpha|}{|d_\alpha|}=\frac{|x_\beta|}{|d_\beta|}=\cdots\cdots=\frac{|x_\gamma|}{|d_\gamma|}$$

$$\therefore\quad |x_\alpha|+|x_\beta|+\cdots+|x_\gamma|=\lambda_{(r)}\{|d_\alpha|+|d_\beta|+\cdots+|d_\gamma|\}=\lambda_{(r)}V_{(r)}$$

なる関係を利用して、$S(\lambda)=S(0)+\lambda V_{[r]}$ を変形すれば、$x_{(r)}\equiv|x_\alpha|+|x_\beta|+\cdots+|x_\gamma|$ とおいて、

$$S(\lambda)=S(0)+\lambda\{V_o+V_{(1)}+\cdots+V_{(r)}\}-\{\lambda_{(1)}V_{(1)}+\cdots+\lambda_{(r)}V_{(r)}\}$$
$$=S(0)+\lambda V_{[r]}-(x_{(1)}+\cdots+x_{(r)})$$

となり、更に $x_{(1)}+\cdots+x_{(r)}=x_{[r]}$ とおけば、

$$(6g.23)\quad S(\lambda)=S(0)-x_{[r]}+\lambda V_{[r]} \qquad \lambda_{(r)}\leqq\lambda\leqq\lambda_{(r+1)}$$

と、簡単化される。実際の計算手続きとしては、この式を使うのが便利である。これを $\lambda=0$ から出発して順次に計算して行き、$S(\lambda)$ が最小になる λ の値を求めれば、それが λ の最適値に外ならない。

〔$6g.3$ の証明〕 λ が負の方向に動く場合についても、同様の証明と計算法とが可能である。則ち、先ず、

$$\overline{V}_o=\Sigma d_j[x_j<0,\ d_j\gtreqless 0]+\Sigma d_j[x_j=0,\ d_j>0]$$

を計算する。これは $(6g,3)$ の前提条件により、必らず負である。次に、同符号の x_j と d_j とにつき、

$$\bar{\lambda}_j = \left| \frac{x_j}{d_j} \right| \qquad [x_j d_j > 0]$$

を求めて、それを小さい順に $0 \leq \bar{\lambda}_{(1)} \leq \bar{\lambda}_{(2)} \leq \cdots\cdots$ と並べる。この $\bar{\lambda}_{(s)}$ において丁度 0 となる変数 $x_\alpha, x_\beta, \cdots, x_\gamma$ の絶対値の和 $\bar{V}_{(s)}$ と、その累積和 $V_{[s]}$ とを計算する。

$$\bar{V}_{(s)} = |d_\alpha| + |d_\beta| + \cdots + |d_\gamma| \qquad (s=1,2,\cdots\cdots)$$

$$\bar{V}_{[s]} = \bar{V}_0 + \bar{V}_{(1)} + \cdots + \bar{V}_{(s)} \qquad (s=1,2,\cdots\cdots)$$

$\bar{V}_0$ は（$6g.3$）の仮定により負であるが、絶対値の和 $\bar{V}_{(1)}, \bar{V}_{(2)}, \cdots\cdots$ は何れも正であるから、$\bar{V}_{[0]}, \bar{V}_{[1]}, \bar{V}_{[2]}, \cdots\cdots$ は、初項負の単調増加数列を形成する。従つて、この $\bar{V}_{[s]}$ が初めて $\geqq 0$ となる番号 ω を求めれば、$S(\lambda)$ の値は $\lambda = -\bar{\lambda}_{(\omega)}$ において最大となる。

以上の何れかの方法によつて λ の最適値が決まれば、新しい点 x' は、

$$x'_j = x_j + \lambda d_j \qquad (j=1, \cdots ‘ n+m)$$

によつて、簡単に求めることができる。

7　価 格 概 念

選好函数における各変数の係数を、一種の価格と考えることができる。これには overall defined prices と basis defined prices との二種類のものが考えられる。前者は（$n+m$）個の全変数に対して与えられる価格であり、この場合の選好函数 f は

$$f = \pi_0 + \pi_1 x_1 + \cdots + \pi_{n+m} x_{n+m}$$

なる形をとる。これらの価格は、基底変数の選び方から独立である。

特定の n 個の変数（$x_u, n_v, \cdots, x_w$）を基底変数に選び、残りの m 個の変数（$x_p, x_q, \cdots, x_r$）を従属変数にとれば、基底方程式、

$$x_j = b_{j0} + \sum_{h=u,v,\cdots,w} b_{jh} x_h \qquad (j=p,q,\cdots,r)$$

が成立つ。この関係を使つて、選好函数を基底変数のみの函数に書き改めるならば、

$$f = \pi_0 + \sum_{\xi=p,q,\cdots,r} \pi_\xi x_\xi + \sum_{h=u,v,\cdots,w} \pi_h x_h$$

$$=\pi_o+\sum_{g=p,q,\cdots r}\pi_g\,(b_{go}+\sum_{h=u,v,\cdots,w}b_{gh}\,x_h)+\sum_{h=u,v,\cdots,w}\pi_h\,x_h$$

$$=\pi_o+\sum_{g=p,q,\cdots,r}\pi_g\,b_{go}+\sum_{h=u,v,\cdots,w}(\pi_h+\sum_{h=u,v,\cdots,w}\pi_g\,b_{gh})\,x_h$$

となる。ここで、

$$\sum_{g=p,q,\cdots,r}\pi_g\,b_{go}+\pi_o=p_o$$

$$\pi_h+\sum_{h=u,v,\cdots,w}\pi_g\,b_{gh}=p_h$$

とおけば、

$$f=p_o+p_u\,x_u+p_v\,x_v+\cdots+p_w\,x_w$$

となる。この価格 $p_o, p_u, p_v, \cdots, p_w$ は、基底変数のとりかた如何によつて異つた値をもつので、basis defined prices と名附ける。選好函数をこの basis defined prices で表わしておけば、n 個の基底変数の値を知つただけで f の値を求めることができ、他の m 個の従属変数の値を知る必要はない。

（以下次号）

昭和卅年十月三日