

# 線型計画問題の新しい解き方 (II)

— フリッシュの対数ポテンシャル法 —

古瀬 大 六

## 8 最適解の一般的構造

どの境界面  $x_j = 0$  ( $j=1, \dots, n+m$ ) から見ても、許容域は必ず境界面の正側 (境界面自身を含む) にのみ存在し、従つて、許容域の形は必然的に凸 (convex) となる。ここで、境界 (boundary), 角 (corner), 及び陵 (edge) の三つの概念を定義しておく。

境界とは、 $(n+m)$  個の不等式  $x_j \geq 0$  のうち少なくとも一つについては等号の成立つところの総ての点の集合 (線、面、等) をいう。角とは、任意の  $n$  個の互に線型独立な不等式  $x_j \geq 0$  が丁度  $0$  に等しく、残りの  $m$  個の不等式は単に  $x_j > 0$  を満足するところの点をいう。陵とは、二つの角を結ぶ直線のうち、境界上に存在するものを言う。

或る一つの角を通る境界面  $x_j = 0$  の数は、通常  $n$  個であるが、時には  $n$  個よりも多い場合もある。前の場合を単純な角 (simple corner)、後の場合を多重に決定された角 (multiply determined corner) と名附ける。或る角が多重決定であることは、その点において所謂縮退 (degeneracy) の存在することを示すものである。

〔命題 (8.6)〕 許容域が原点からの無限遠点を含まない限り、選好函数  $f$  がその許容域の中で取り得る最大値を与えるところの唯一つの部分空間が、その境界上に存在する。この部分空間の次元  $\delta$  は、 $0$  から  $(n-1)$  までのうちの何れかの値をとる。

〔系 (8.7)〕 許容域が原点からの無限遠点を含まない限り、許容域内において選好函数  $f$  を最大ならしめるところの角が、境界上に少なくとも一つは存在する。

〔系 (8.8)〕 上記の角の数を  $(\delta+1)$  個とすれば、これらの角によつて定められる境界面上の  $\delta$  次元点集合上では、 $f$  は同じ値をとる。

総ての境界  $x_j \geq 0$  ( $j=1, \dots, n+m$ ) を、その最適解の値に及ぼす影響の程度に従つて、余分な (superfluous) 境界、附随的 (accessory) 境界、基本的 (fundamental) 境界の三つに分けて考えることは、巨視的経済モデルの場合のように問題全体の自由度  $n$  に比べて最適解の次元  $\delta$  が大きい場合には、極めて大切なことである。余分な境界とは、それを取除いても最適値における選好函数  $f$  の値にも最適解の存在空間の形にも何の変化をも与えないものを言い、附随的境界とは、 $f$  の最適値は変えないが最適解の存在空間の形状を変化させるような境界を言い、基本的境界とは、その何れをも変えてしまうところの境界を意味する。

### 9 与えられた点が最適点である ことの証明法、双対法

線型計画問題をどのような解法で解いている場合にも使えるような、最適点の判定法があれば極めて便利である。則ち、或る点の座標値  $(x_1, \dots, x_{n+m})$  だけによつて、その点が最適点であるかどうかを知る方法を考えてみよう。

これには、選好函数における各変数の係数 (則ち価格  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n+m}$ ) を使う方法と、双対定理を利用して、与えられた問題を他の一組の非正変数 ( $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}$ ) を求める問題に変換する方法と、が考えられる。

先ず、価格を使う第一の方法では、与えられた解において 0 となつている  $n$  個の変数 ( $x_u, x_v, \dots, x_w$ ) を基底変数とする  $m$  個の基底方程式:

$$x_j = b_{j0} + \sum_{h=u, v, \dots, w} b_{jh} x_h \quad (j=p, q, \dots, r)$$

を求める。上式の  $m$  個の常数項  $b_{j0}$  ( $j=p, q, \dots, r$ ) が悉く正であれば、その点は必ず許容域内に存在する。次に上記の基底変数 ( $x_u, x_v, \dots, x_w$ ) に対する basis defined price ( $p_u, p_v, \dots, p_w$ ) を第7節の方法によつて求め、それが悉く零又は負であれば、その点は最適解である。

この価格概念を使用する検定法は、単体法で使われている方法と本質的に同じものである。但し、単体法では、変数入れ替えの各段階において  $b_{j0}$  と  $(p_u,$

$p_v, \dots, p_w$ ) とが算出されるので、上記の計算は楽にできるが、本書に述べる複勾配法などのように各段階でこれらの計算が行われない場合には、最初の基底方程式と選好函数から、第4節の方法によつてこれらの値を算出しなければならない。

第二の最適解検定法である双対法 (Dual Method) は、次の定理から出発する。

〔命題 (9.5)〕 若し選好ベクトル  $(p_u, p_v, \dots, p_w)$  が、 $m+n$  個の境界ベクトル  $(b_{ju}, b_{jv}, \dots, b_{jw}; j=1, \dots, m+n$  — これは勿論  $x_j = 0$  なる境界面に垂直である) のうちの  $\nu$  個のベクトルの一次式で表わされ、且つ、この一次式の総ての係数が負であるならば、これらの  $\nu$  個の境界によつて規定される  $(n-\nu)$  次元面上の総ての点は、同一選好値をもつ。もし、この点がこれらの  $\nu$  個の境界上にあるだけでなく、同時にまた、他の総ての境界条件  $(x_j \geq 0, j=1, \dots, m+n)$  をも充すならば、則ち、その点が許容域内にあるならば、その点における選好函数の値は、与えられた線型計画問題の最大値を与える。

〔証明〕 上記の  $\nu$  個の境界を  $(x_\alpha = 0, x_\beta = 0, \dots, x_\gamma = 0)$  とし、基底方程式を変形して基底変数中にこれらの  $x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\gamma$  が悉く含まれるようにしておけば、 $\nu$  個の境界ベクトルは：

$$(b_{iu}, b_{iv}, \dots, b_{iw}) \quad i = \alpha, \beta, \dots, \gamma$$

で表わされる。仮定により、選好ベクトル  $p_u, p_v, \dots, p_w$  は、これらの境界ベクトルの一次式で表わされるから：

$$(9.7) \quad p_h = \lambda_\alpha b_{\alpha h} + \lambda_\beta b_{\beta h} + \dots + \lambda_\gamma b_{\gamma h} \quad (h = u, v, \dots, w)$$

となる。

許容域内の二点  $x_h(x_u, x_v, \dots, x_w)$ ,  $x'_h(x'_u, x'_v, \dots, x'_w)$  をとり、前者は  $x_i = 0, i = \alpha, \beta, \dots, \gamma$  なる条件を充し、後者はこれを充さない点とすれば、両点における選好函数の値  $f, f'$  の差は：

$$(9.8) \quad \begin{aligned} f' - f &= (p_u x'_u + p_v x'_v + \dots + p_w x'_w) \\ &\quad - (p_u x_u + p_v x_v + \dots + p_w x_w) \\ &= \lambda_\alpha x'_\alpha + \lambda_\beta x'_\beta + \dots + \lambda_\gamma x'_\gamma \end{aligned}$$

となる。上式の  $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \dots, \lambda_\gamma$  は前提により何れも負、 $x'_\alpha, \dots, x'_\gamma$  は何れも非負であるから、 $f' - f < 0$ 、従つて  $f > f'$  となり、 $f$  の値は  $x$  点において最大値をとる。

実際上は、この  $\nu$  個以外にも  $0$  値をとる変数があり得るし、この  $\nu$  個の変数が基底変数でないことも考えられるので、 $0$  となる変数の総数  $N$  が  $N \leq n$  なる場合、 $N > n$  なる場合に分けて、もつと一般的な形で考えておく方が都合である。

〔 $N \leq n$  なる場合〕 基底価格  $(p_u, \dots, p_w)$  が  $N$  個の境界ベクトルの線型組合せで表わされ、その係数が夫々  $\lambda_\alpha, \dots, \lambda_\gamma, \lambda_\phi, \dots, \lambda_\theta$  であるとする。この  $0$  なる変数の数  $N$  が、自由度  $n$  に等しいときは、この線型聯立方程式を第15～18章の方法で解いて、 $\lambda$  の値を一義的に決定できる。そのうち  $\lambda_\alpha, \dots, \lambda_\gamma$  が負、残りの  $\lambda_\phi, \dots, \lambda_\theta$  が零であるならば、この負なる係数  $\lambda_\alpha, \dots, \lambda_\gamma$  について (9.5) 命題を適用すれば、この  $x_\alpha = \dots = x_\gamma = x_\phi = \dots = x_\theta = 0$  なる点は最適点であることがわかる。

$N$  が自由度  $n$  より小さいならば、上記の  $\lambda$  に関する  $n$  個の方程式の中から、線型独立な  $N$  個の式を選んで解き、それらの  $\lambda$  が悉く非正であり、且つ、残りの  $(n - N)$  個の方程式をも満足するならば、その空間は最適空間であり、その空間の次元数は、 $\lambda$  のうちの負値をとるものの数を  $\nu$  とすれば、 $(n - \nu)$  となる。

〔 $N > n$  なる場合〕 その点で  $0$  値をとる変数  $x_\alpha, \dots, x_\gamma, x_\theta, \dots, x_\phi$  に対する境界ベクトルのうちから  $\nu$  ( $\nu \leq n$ ) 個を選んだ場合に、基底価格  $p_u, \dots, p_w$  がこれら  $\nu$  個の境界ベクトルの正なる線型組合せで表わされるならば、則ち、 $\lambda_\alpha, \dots, \lambda_\gamma$  が正、 $\lambda_\theta, \dots, \lambda_\phi$  が  $0$  であるならば、その点は最適点である。

## 10 境界の切除

われわれは既に第5章において余分な境界を除く方法を論じたが、これは許容域の形に無関係な境界を除くためであつた。本章では更に選好函数の形に基いてもつと多くの境界を除く可能性を考えてみたい。勿論、最適点を決定する総ての境界を決めようとすれば、与えられた線型計画問題を完全に解かなけれ

ばならない。従つて、われわれの目的は、そのような完全な除去を狙うのではなく、最適点が決まる前に、最適点において脱落する可能性の大きいと予想される境界を、若干なりとも取除くための簡単な判定基準を求めることに過ぎない。これを境界の切除 (bound truncation) と名附ける。

これには、 $\lambda$  方式と  $\theta$  方式の二つのやり方がある。先ず、第一の  $\lambda$  方式から説明しよう。予め第 6 章の方法で許容域内の一点を求めておき、その点から出発して、第 12~13 章の複勾配法 (double gradient method) で決められる最適方向 ( $f$  の増加方向) に向つて進むならば、その進行につれてこの beam に貫通される種々の境界 ( $x_j = 0$ ) の貫通順序は、最適点を決定する境界を推定するための有力な手掛りを与えるであろう。

この beam の方向が真の最適点への方向に極めて近いならば、それが貫通する境界を最初のものから順に  $n$  個とることによつて決定される一点は、真の最適点に一致するであろう。また、若しその方向が最適点から若干ずれていたとしても、同じやり方で決められる点は真の最適点に近い位置にあるであろうし、また、( $n$ +若干個) の境界をとるならば、そのうちに真の最適点を決める  $n$  個の境界が含まれる確率は極めて大きいであろう。そして、beam の方向が最適方向から外れるほど、追加的に取らねばならぬ境界の数は増していくであろう。

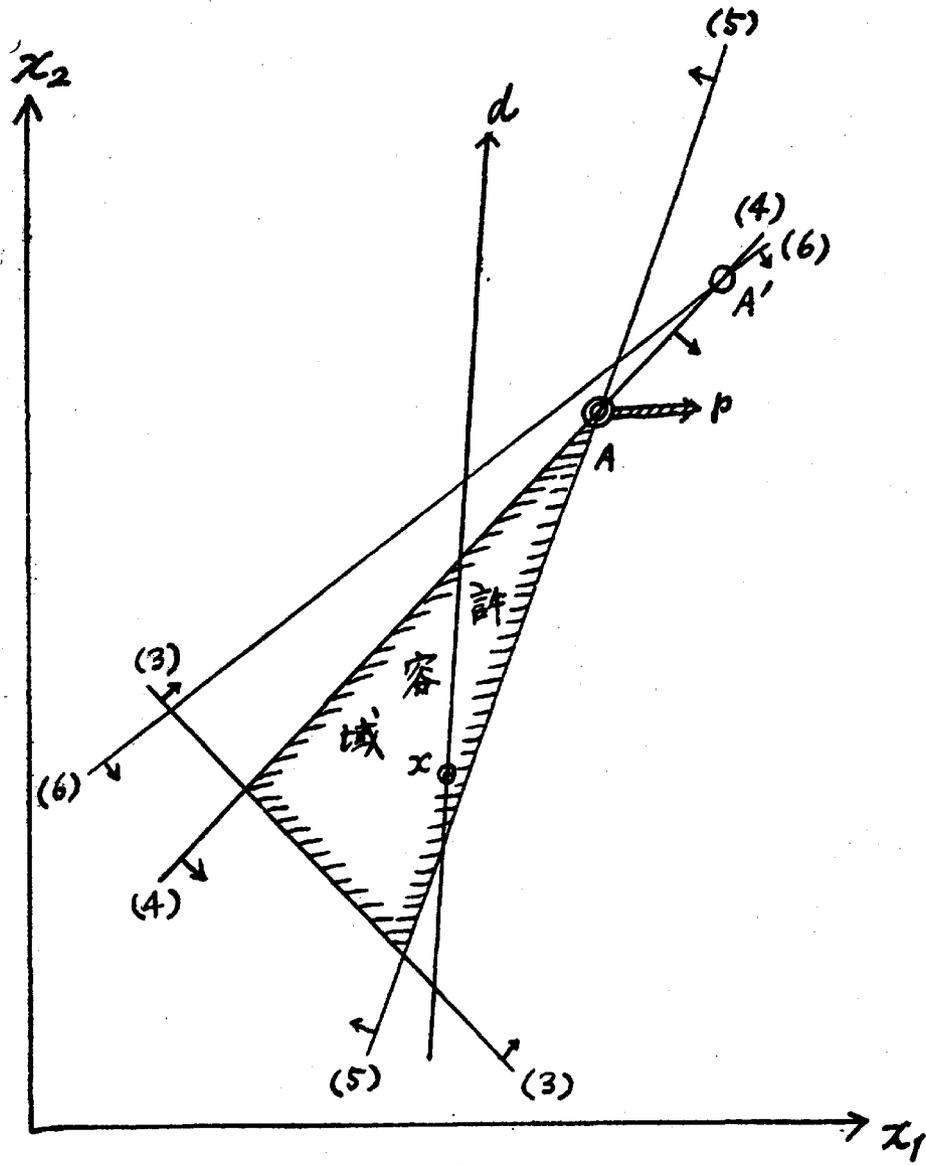
### (10.2) [ $\lambda$ 方式による境界切除]

最初、何等かの方法により、許容域内の一点と、この点から最適点の附近に向う beam が与えられているものとする。総ての変数  $x_j$  ( $j=1, \dots, n+m$ ) は、この beam の長さ  $\lambda$  の函数として表わされる。 $\lambda$  の増加につれて 0 となる変数を、最初のものから順次に  $n$  個とることによつて決まる一点を假想 (tentative) 最適点と名附ける。この点が許容域に属するならば、第 9 節の方法により、それが真の最適点であるかどうかを検定する。若しこの假想最適点が許容域の外にあるならば、更に作業を続けなければならない。但し、その際には、上記の假想最適点を規定する  $n$  個の境界に加えて、その点において負値をとる総ての境界は、除去せずに残しておかなければならない。

以上の手続を繰返すことによつて最適点を見出そうとする試みは、それだけでは能率的な計算法たり得ない。これが後述の複勾配法と併用されて初めて、能率的な方法となる。例えば、最初の出発点から假想最適点へ向う第二の beam について、上記の境界切除法を適用して第二の假想最適点を求める、という手続きによつて次第に真の最適点に近附いて行こうとする、一種の繰返し法を考えてみよ。うこの方法の第一の欠陥は、幾つかの境界の交点が丁度 beam 上に存在するために、最初に貫通するものから順次に  $n$  個の境界を抜き出そうとすると、同時に  $n$  個以上の境界が 0 となつてしまつて、その選択に困ることがある、という点である（現実にそのような場合は極めて稀ではないか、古瀬註記）。勿論その場合にも、その中からランダムに  $n$  個を選ぶという対策も考えられるけれども、それは最適点の大体の見当をつけ、それを基にして更に他の計算法を適用する際の出発点とするための補助手段としては役立つかもしれないが、それだけで最適点を見附け出そうとするには余り役に立たないであろう。また、假想最適点に向う beam が許容域を離れる点から13%位内側の点を取るというやり方によつて、よりよい結果が得られるかもしれない。然し、方向係数を決定する他の方法（複勾配法等）に比べて、 $n$  階聯立方程式を解き beam の方向を算出する計算上の手間を考えると、必ずしも有利な方法とは言えない。

上記の  $\lambda$  方式の今一つの欠陥は、図のような場合、真の最適点を決定する境界の一つである平面 (5) が、 $\lambda$  をいくら伸ばしてみても beam  $d$  と交わらない、という点である。勿論、最初に  $d$  によつて貫通される二平面 (4)、(6) から假想最適点  $A'$  を求め、 $A'$  点において負となる平面をもこれに追加するならば、(5) もまた切除されずに残る。然しながら、それには  $n$  階聯立一次方程式を解く手間が必要であるから、できれば  $A'$  点を求めずに必要な総ての境界を残せるような計算法が望ましい。

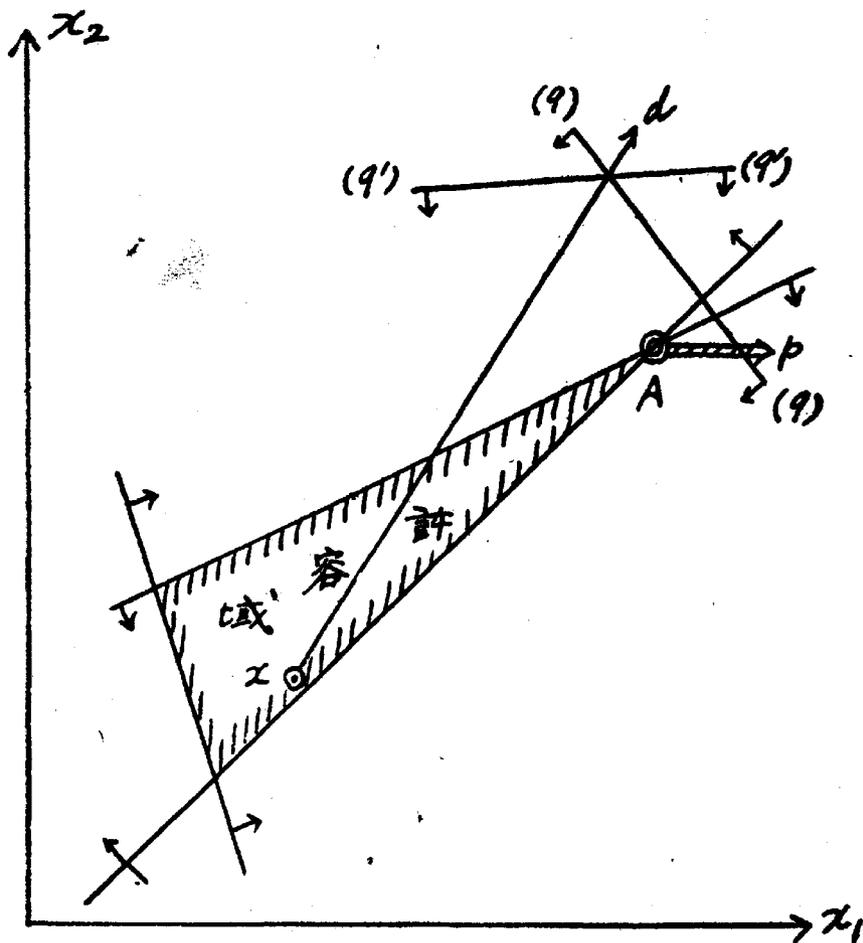
その一つとして、単純に  $\lambda_j$  (beam が境界  $x_j = 0$  を貫通する際の  $\lambda$  の値) の長さで判定することを止めて、各境界 ( $x_j = 0$ ) から  $x_j > 0$  なる領域（即ち許容域）に向けて立てた垂線  $b_j$  (境界  $j$  の勾配) と、 $\lambda$  の正方向との間の角度  $-\cos(b_j, d)$  を求め ( $\lambda$  は負でもよい),  $-\cos(b_j, d) / \lambda_j$  の値の大きい



(10.3) 図

ものから順次に  $n$  個 (若くはそれに若干個を追加) をとるようにするやり方が考えられる。けれども、図のように、この方法では (9) と (9') とが同じ順位を与えられることになるが、実際には (9') よりも (9) の方が真の最適点  $A$  の近所を通り、従つて最適点の決定に参与する可能性が遙かに大きい。そこで、上の式を改め、選好ベクトル  $p$  を考慮に入れて、

(10.5)  $\theta_j = -\cos(b_j d) \{1 - \cos(b_j p)\} / \lambda_j$  とすることによつて、(9') よりも (9) の方により高い優先順位を与えることができるであらう



(10.3)図2

う。

この二つのベクトル  $b_j$ ,  $d$  の間の cosine の値は、それぞれの座標の normalized product moment ( $u$  と  $v$  との交角を  $\cos \theta$  とすれば、 $\cos \theta = u_i v^i / \|u\| \cdot \|v\|$ ) で表わせるから、

$$(10.6) \quad \theta_j = - \frac{\sum_k b_{jk} d_k}{\|b_j\| \cdot \|d\|} \left\{ 1 - \frac{\sum_k b_{jk} p_k}{\|b_j\| \cdot \|p\|} \right\} / \lambda_j$$

となる。この右辺の中で、 $\|d\|$  と  $\|p\|$  とは  $j$  が何であつても常に同じ値を保つから、順位決定には影響を持たない。従つて、 $\|d\| \cdot \|p\| \cdot \theta_j$  を新しい  $\theta_j$  と見做すことができるから、

$$\begin{aligned}
 (10.8) \quad \theta_j &= - \frac{\|p\|}{\|b_j\|} \frac{\sum_1^n b_{jk} d_k}{\sum_1^n b_{jk} d_k} \frac{\|b_j\| \cdot \|p\| - \sum_1^n b_{jk} p_k}{\|b_j\| \cdot \|p\|} \Big/ \lambda_j \\
 &= \frac{\|b_j\| \cdot \|p\| - \sum_1^n b_{jk} p_k}{(\|b_j\|)^2} \left\{ - \frac{\sum_1^n b_{jk} d_k}{\lambda_j} \right\} \\
 &= - \phi_j \frac{\sum_1^n \bar{v}_{jk} d_k}{\lambda_j} \quad (j=1, \dots, m+n) \\
 \text{但し } \phi_j &= \frac{\|b_j\| \cdot \|p\| - \sum_1^n b_{jk} p_k}{\sum_1^n b_{jk}^2}
 \end{aligned}$$

と改められる。 $\phi_j$  の計算が一寸面倒であるが、その値は  $d$  と  $x$  とに無関係であるから、一度計算しておけば次の回にも使うことができる。

以上では方向ベクトル  $d$  は与えられたものと考えてきた。実際にはそれは、第12・13節の複勾配法によつて、則ち：

$$(10.10) \quad d_k = p_k + \mu V_k \quad (k=1, \dots, n)$$

によつて決定される。但し、 $V_k$  は対数ポテンシャル  $V$  の勾配の要素であり、 $\mu$  は  $d$  を最適方向に近附けるように選ばれたパラメーターである。(10.8) 式の  $d$  を (10.10) 式で決定する場合は、(10.8) 式はどのような形になるであろうか。

(6g.5) により  $\lambda_j = -x_j / d_j$  ( $x_j$  と  $d_j$  とは異符号) であるから、これを (10.10) に代入して：

$$(10.11) \quad \lambda_j = -x_j / (p_j + \mu V_j)$$

他方、(12.14) により  $p_j = \sum_1^n b_{jk} p_k$ , (12.15) により  $V_j = \sum_1^n b_{jk} V_k$ , ( $j=1, \dots, n+m$ ) であるから、

$$\begin{aligned}
 \theta_j &= - \phi_j \frac{\sum_1^n b_{jk} d_k}{\lambda_j} = - \phi_j \frac{\sum_1^n b_{jk} (p_k + \mu V_k)}{\lambda_j} \\
 &= - \phi_j \frac{\sum_1^n b_{jk} p_k + \sum_1^n \mu b_{jk} V_k}{\lambda_j}
 \end{aligned}$$

$$= -\phi_j \frac{p_j + \mu V_j}{\lambda_j} = \phi_j \frac{(p_j + \mu V_j)^2}{x_j}$$

$$(10.15) \quad \therefore \theta_j = \phi_j (p_j + \mu V_j)^2 / x_j \quad (j=1, \dots, n+m)$$

茲に、 $\phi_j$  は計算済みであり、 $x_j$  は出発点として与えられているから、残つた  $(p_j + \mu V_j)^2$  を計算しさえすれば、 $\theta_j$  は容易に計算される。以上を要約すれば：

#### (10.16) [θ方式による境界切除]

出発点  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  が許容域内に与えられ、その点から最適点の近くに向つて進む方向ベクトル  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  が与えられているものとする。この  $d$  に向つて、選好函数の値の増す方向に beam の長さ  $\lambda$  を測る。この beam が  $x_j = 0$ ,  $(j=1, \dots, n+m)$  平面を貫通する際の  $\lambda$  の長さ  $\lambda_j$  を計算するこれだけの資料から (10.8) 又は (10.15) 式によつて、優先順位  $\theta_j$  が決定される。 $\theta_j$  の高いものから順次に  $n$  個の境界  $x_j = 0$  をとり、これによつて仮想最適点を求める。この点が許容域内にあるならば第9章の方法でそれが最適点であるか否かを判定する。

仮想最適点が許容域外にあるならば、作業を続けなければならない。然し、その仮想最適点を定める作業中に考慮された優先順位中に含まれる  $n$  変数、並に、その点において 0 又は負となる総ての変数を残し、他の変数は切除する。作業経続に当つて用いられる新しい出発点を定める一つの方法は、最初の出発点から仮想最適点に向つて進み、最初の境界に到達する15%位手前で停止するやり方である。

## 11 自由度の切除

次章の複勾配法は、最適点に近接するには極めて有効で収束性のよい方法であるが、最適点の正確な位置を求めようとするときには、複勾配法を繰返し適用すると同時に、本章に述べる自由度切除法 (freedom truncation) を使わなければならない。

自由度切除とは、計算の途中で最適点において  $x_j = 0$  となると推定される変数を予め 0 とおくことによつて、以降の計算を簡単にする方法である。そ

の推定が正しいかどうかを知るためには、第9章の検定法によらなければならない。検定の結果、その推定が誤っていたとしても、その誤りを訂正した上で、計算を続行することができる。

これには、自変数の数  $n$  に等しい数の変数を全部 0 とおいてしまう完全切除法 (complete freedom truncation) と、その一部だけを 0 とおく部分切除法 (partial freedom truncation) と、の二つが考えられる。後者の方法によるときは、複勾配法を何回か繰返す度毎に若干個の変数を 0 とおき、次第に問題の自由度を低下させて行けばよい。

切除される変数が基底変数の中に含まれている場合には、それを 0 とおきさえすれば、他の全変数を残りの基底変数で表わす新しい基底方程式は、何等の計算をしなくても、直ちに求められる。然し、従属変数の幾つかを切除するには、それと同数の主変数を除いた残りの主変数について、元の基底方程式を解き直さなければならない。そればかりでなく、この除去された主変数を表わす式 (除去される従属変数  $x_j$  を左辺に持つ基底方程式  $x_j = b_{j0} + \sum_1^n b_{jk} x_k$  を  $x_j = 0$  とおいて得られる聯立方程式を解いて、除去さるべき主変数  $x_j$  を左辺に持つ新しい基底方程式を求める、古瀬註記) が、以降の計算において導入され、従つて、一旦除去された主変数  $x_j$  が、依然として従属変数として残り、変数の総数は一つも減少しない (この結論は少しおかしい。除去さるべき変数の数を  $r$  とすれば、それが主変数であれば、主変数が  $r$  個減少するが従属変数の数は不変である。それが従属変数であれば、主変数は  $r$  個減少し、従属変数の方は最初  $r$  個減少したものが slack 変数として再び導入されるためにその数は変わらない。従つて、変数の数に及ぼす影響は、何れの場合も全く同じであろう、古瀬註記)。

自由度切除の利点は、境界切除におけると同様に、二つ以上の変数を一挙に取除くことができるという点である。その計算手続きは、第4章の変数入れ替えの際の式 (4.8)-(4.21) と同じであるが、単体法で一つ宛入れ替えて行く場合に比べて、(4.16) の計算が不要になるので、全体としての計算量は減少する。その反面、単体法に比べて一般性が失われるけれども、各段階において、失われた自由度を元へ戻すことができるから、心配するほどのことはな

い。

自由度切除によつて  $r$  個の変数は  $0$  となるが、残りの  $(n-r)$  個の主変数の値が決まらなければ、次の計算段階に進むことができない。これらの値を決める最も簡単な方法は、それらの主変数を、切除以前の値にそのまま保持させる方法である。但し、この場合、最初の点が許容域内にあつたとしても、新しい従属変数の総てが必ず非負値をとるという保証はない。出発点において既に最適点に近いが、又は、方向  $d$  が極めて正確であれば、上記の点は許容域内に落ちる可能性が大であるが、然らざる場合には域外に出る危険性がある。

その対策は、新しい基底方程式の右辺に従来の値を代入して、左辺の従属変数中に負となるものがあれば、それを  $0$  とおいて自由度を更に引下げた上で、残りの主変数について同じ代入手続きを行つて従属変数の値の正負を検討すればよい。その結果、依然として負変数が残るようであれば、第6章の方法で許容域内の点を探せばよい。

第10~13章の方法によつて自由度切除を受ける変数を決めるに当つては、その優先順位により、全変数を次の三種類に分けて考えるのが便利である。：

I Optimum Candidates 最適点で  $0$  となる可能性の最も大きい変数。

II Directional Candidates 対数ポテンシャルを計算する際に、Iに加えて考慮されなければならない変数。これは、各計算段階において新しく加えたり除いたりすることが簡単にできるから、その選定にはそれほど気を使う必要はない。

III Boundary Candidates IにもIIにも属しないが、対数ポテンシャル法による計算に際して、変数の動きが境界外に出る恐れのあるときは、随時導入される変数。

IV Bottom Candidates 基底変数の入れ替え、又は切除等によつて除去される可能性の最も多い変数。

## 12 複勾配法の一般原理

自由度  $n$ 、拘束数  $m$  の大きな線型計画問題を単体法によつて、corner から corner へと一步一步進みながら解いて行くのは、大変な手間がかかる。こ

のように許容域の複雑な表面をのろのろと匍いまわることをやめて、その内部を連続的な軌跡に沿って一気に進む方法が考えられないものだろうか？ このような単体法のまだるつこさの根本原因は、許容域の表面は凸多面体であるため、それへの垂線方向が不連続的に変化し、従って、一次二次の導関数を利用する通常の解析的方法が使えない、という点にある。

この難点を避ける一つの方法としては、境界面から僅か内側に入りさえすれば連続な導関数を持つような何等かのポテンシャル関数を導入する方法を考えることができるであろう。例えば：

$$(12.1) \quad V(x_1, \dots, x_n) = \sum_1^{n+m} \log x_j$$

という対数ポテンシャルを考えてみよう。右辺の  $(n+m)$  個の変数のうち、 $(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$  は (3.6) により、基底変数  $(x_1, \dots, x_n)$  の一次式で表わされる。必要ならば、各不等式の重要性に応じて、各変数に適当なウェイトを付けることもできよう。

この対数ポテンシャル  $V$  は、許容域の内部（則ち、 $x_j > 0; j=1, \dots, n+m$ ）において連続な一次及び二次の導関数を持つと同時に、境界面に接近するにつれて  $V$  の値が  $(-\infty)$  に近附くので、進行径路が許容域外に飛び出す危険を予知してその方向を修正するための警戒信号の役割をも果たすることができる。その一次導関数を求めれば：

$$(12.2) \quad V_k = \frac{\partial V}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n+m} \frac{b_{jk}}{x_j} = \frac{1}{x_k} + \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{b_{jk}}{x_j} \quad (k=1, \dots, n)$$

となる。 $x^0$  点において若干の変数が 0 であるときは、正なる変数だけについての省略ポテンシャル：

$$(12.4) \quad V = \sum \log x_j \quad [x_j^0 > 0]$$

を考えればよい。

この対数ポテンシャルを使つて線型計画問題を解こうと試みるならば、その進行過程において  $V$  の値を  $(-\infty)$  にしないように注意すると同時に、選好関数  $f$  の値を出来るだけ大きくすること（則ち、basis defined prices  $p$  が負となること）に努めなければならない。

この二つの異つた目的を妥協させるような進行方向を求めるには、与えられた点  $x$  を通る等ポテンシャル面に切する平面上への価格ベクトル  $p$  の射影 (projection) :

$$(12.6) \quad p_k + \nu V_k \quad (k=1, \dots, n)$$

$$(12.7) \quad \text{但し } \nu = - \frac{p_1 V_1 + \dots + p_n V_n}{V_1^2 + \dots + V_n^2}$$

を考えればよいであろう。この (12.6) の方向に進めば、境界面に衝突することを避けながら、 $f$  を増加させることができる。所が、この方法を繰返すことによつて最適点に接近しようとしようとしても、実際やつてみると収束が遅くて実用にならない。この点では、価格ベクトル  $p$  だけを使う繰返し法の場合と少しも異なる。

そこで、各計算段階毎に、パラメーターの値を  $f$  の増加を最大ならしめるように選ぶことによつて、その収束性を高める工夫をしなければならない。そこで、方向ベクトル  $d$  を、(12.6) の射影ベクトルと、価格ベクトル  $p$  との荷重平均:

$$(12.8) \quad d_k = \omega (p_k + \nu V_k) + (1+\omega) p_k = p_k + \omega \nu V_k \quad (k=1, \dots, n)$$

で表すこととする。このパラメーター  $\omega$  の変化につれて、方向ベクトル  $d$  は、 $(p + \nu V)$  と  $p$  との二つのベクトルによつて張られる平面上を移動することができる。この  $\omega$  の変域は 0 と 1 との間に限定される必要はなく、全実変域を自由に動き得るようにすることが望ましい。

(12.8) 式のパラメーター  $(-\omega \nu)$  を一括して  $\mu$  で表わせば:

$$(12.9) \quad d_k = p_k + \mu V_k \quad (k=1, \dots, n)$$

と簡単化される。 $x$  点から出発して、この  $d$  方向に  $\lambda$  長だけ進んだ先の点  $x'$  は:

$$(12.11) \quad x'_k = x_k + \lambda d_k \quad (k=1, \dots, n)$$

となるであろう。それに伴つて、従属変数  $x_j$  ( $j=n+1, \dots, n+m$ ) の値も

$$x'_j = x_j + \lambda d_j \quad (j=n+1, \dots, n+m)$$

$$\text{但し } d_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} d_k \quad (j=n+1, \dots, n+m)$$

に変わる。以上を一括して、

$$(12.12) \quad x'_j = x_j + \lambda d_j \quad (j=1, \dots, n+m)$$

$$(12.13) \quad \text{但し } d_j = \sum_1^n b_{jk} d_k \quad (j=1, \dots, n+m)$$

と記すことができる。更にまた、 $p_{n+1}, \dots, p_{n+m}$  及び  $V_{n+1}, \dots, V_{n+m}$  を定義して、

$$(12.14) \quad p_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} p_k \quad (j=n+1, \dots, n+m)$$

$$(12.15) \quad V_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} V_k \quad (j=n+1, \dots, n+m)$$

としておけば、(12.9) 式は一般化されて、

$$(12.16) \quad d_j = p_j + \mu V_j \quad (j=1, \dots, n+m)$$

となるであろう。従つて、問題は、このパラメーター  $\mu$  をどう決めるか、ということである。

$\mu$  の決定に際しては、前述の如く、(I)  $x \rightarrow x'$  の beam (負方向をも含む) が許容域を通過すること、(II) その進行に伴う  $f$  の増加が最大となるようにすること、を考えなければならない。許容域は convex であるから、域内の任意の出発点  $x$  から、許容域内を通つて最適点に一気に到達することの出来る beam が必ず存在する筈である。然し、そのような方向を一度で決めてしまふには非常に多くのパラメーターを必要とし、従つて非常に多くの計算上の手間を必要とするので、実用的とは言い難い。

上記の (12.11) の運動に伴う  $f$  選好値の変化を求めれば、

$$\begin{aligned} (12.17) \quad f' - f &= \sum_1^n p_k (x'_k - x_k) = \sum_1^n p_k \cdot \lambda d_k \\ &= \lambda \sum_1^n p_k (p_k + \mu V_k) \\ &= \lambda \left( \sum_1^n p_k^2 + \mu \sum_1^n p_k V_k \right) \\ &= \lambda (P + \mu M) \end{aligned}$$

$$\text{但し } P = \sum_1^n p_k^2, \quad M = \sum_1^n p_k V_k$$

$f'$  の値を  $f$  よりも大にするためには、上式における  $(P + \mu M)$  が正であれば

パラメーター  $\lambda$  の値を正に、 $(P+\mu M)$  が負であれば  $\lambda$  を負に選ばなければならない。従つて、 $P+\mu M=0$  を成立たしめるところの  $\mu$  の値を  $\mu^0$  とすれば、 $\mu$  が  $\mu^0$  より大きい場合と小さい場合とに分けて考えることが便利である。(12.17)式を見ると、 $M=0$  ならば  $(f'-f)$  の値は  $\mu$  から独立のように見えるが、実は (12.9) によつて  $d$  は  $\mu$  に支配され、従つて許容域内において取り得る  $\lambda$  の最大値もまた  $\mu$  に支配されるので、 $M=0$  の場合をも含めて  $\mu$  全実変域について考えなければならない。

$M \neq 0$  ならば、 $P+\mu M=0$  を満足する  $\mu_0$  が存在する。 $P$  は定義により  $\sum_1^n p_k$  であるから必ず正、従つて  $\mu_0 M < 0$  となる。故に  $M$  と  $\mu_0$  とは必ず異符号である。そこで、先ず  $M$  が正、 $\mu_0$  が負、の場合を考えれば、 $\mu$  が  $\mu_0$  より大きいか小さいかに応じて、 $(P+\mu M)$  の値は正か負かになる筈である。それ故、 $f$  の値を増加させるためには、 $\lambda$  の値をそれぞれ正又は負に取らなければならない。 $M$  が負のときは、丁度この反対になる。繰返しによつて次第に最適点に接近するにつれて、 $M = \sum_1^n p_k V_k$  の値は負となる可能性が増してくる。

〔1〕  $P+\mu M > 0$  なる場合：—

この場合には、 $f$  を増加させる為には、beam の長さ  $\lambda$  を正にしなければならない。 $\lambda$  の大きいほど  $f$  の増加も大きくなるが、途中で境界条件の一つでも引つかかると、それ以上先には進めない。則ち、 $\lambda$  は、

$$(12.21) \quad x_j + \lambda d_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n+m)$$

の非負条件を破ることができない。 $d_j \geq 0$  ならばその心配は全くないが、 $d_j < 0$  のときは、 $\lambda$  の取り得る正值は、

$$(12.22) \quad \lambda \leq -x_j / d_j \quad (d_j < 0, P+\mu M > 0)$$

の限界を超えることはできない。従つて、 $\lambda_{opt.}$  は

$$(12.23) \quad \lambda_{opt.} = \underset{j}{\text{Min}} x_j / -d_j \quad (d_j < 0, P+\mu M > 0)$$

で決まつてくる。これに  $d_j = p_j + \mu V_j$  (12.16) を代入すれば、

$$(12.24) \quad \lambda_{opt.} = \underset{j=1, \dots, n+m}{\text{Min}} \frac{x_j}{-(p_j + \mu V_j)} \quad \begin{matrix} (p_j + \mu V_j < 0) \\ (P + \mu M > 0) \end{matrix}$$

となる。

〔2〕  $P + \mu M < 0$  なる場合：—

同様にして

$$(12.25) \quad \lambda_{opt.} = - \underset{j=1, \dots, n+m}{Min} \frac{x_j}{p_j + \mu V_j} \quad \begin{matrix} (p_j + \mu V_j > 0) \\ (P + \mu M < 0) \end{matrix}$$

従つて、(12.24) 又は (12.25) の方法で  $\lambda$  の最適値を決めておけば、新しい点  $x'$  は必ず許容域の内部に存在することが保証される。

若し、出発点において正であるような  $x_j$  についての拘束だけを計算に入れ (他の拘束は他の何等かの方法で、例えば、 $\mu$  の許容値に限界をつけることによつて、考慮される) るならば、(12.24) 式の両辺は正、(12.25) 式の両辺は負となり、従つて、 $\lambda_{opt.}$  と  $(P + \mu M)$  とは必ず同符号となる。それ故、必然的に、 $\lambda_{opt.} (P + \mu M) = |\lambda_{opt.}| \cdot |P + \mu M| > 0$  が成立ち、これを (12.17) に代入して、 $f' - f = |\lambda_{opt.}| \cdot |P + \mu M|$  が得られる。他方 (12.24)、(12.25) より、

$$|\lambda_{opt.}| = \underset{j}{Min} \left| \frac{x_j}{p_j + \mu V_j} \right| \quad \left. \begin{matrix} x_j > 0 \\ P + \mu M > 0 \text{ なら } p_j + \mu V_j < 0 \\ P + \mu M < 0 \text{ なら } p_j + \mu V_j > 0 \end{matrix} \right\}$$

であるから、

$$f' - f = |P + \mu M| \cdot \underset{j}{Min} \left| \frac{x_j}{p_j + \mu V_j} \right| \quad \left. \begin{matrix} x_j < 0 \\ (P + \mu M) \cdot (p_j + \mu V_j) > 0 \end{matrix} \right\}$$

となる。上式は、 $x$  点から  $d_j = p_j + \mu V_j$  方向に直進する場合、その出発点  $x$  で正であつた総ての変数とその進行によつて負に転ずることがないという条件の下で ( $x$  点で丁度 0 であつた変数がどうなるか、については全く考慮しない、然しそれは  $\mu$  の許容変域の制限という形で取上げることができる)、 $\mu$  の値が  $f$  の増加に如何に影響するかを示している。

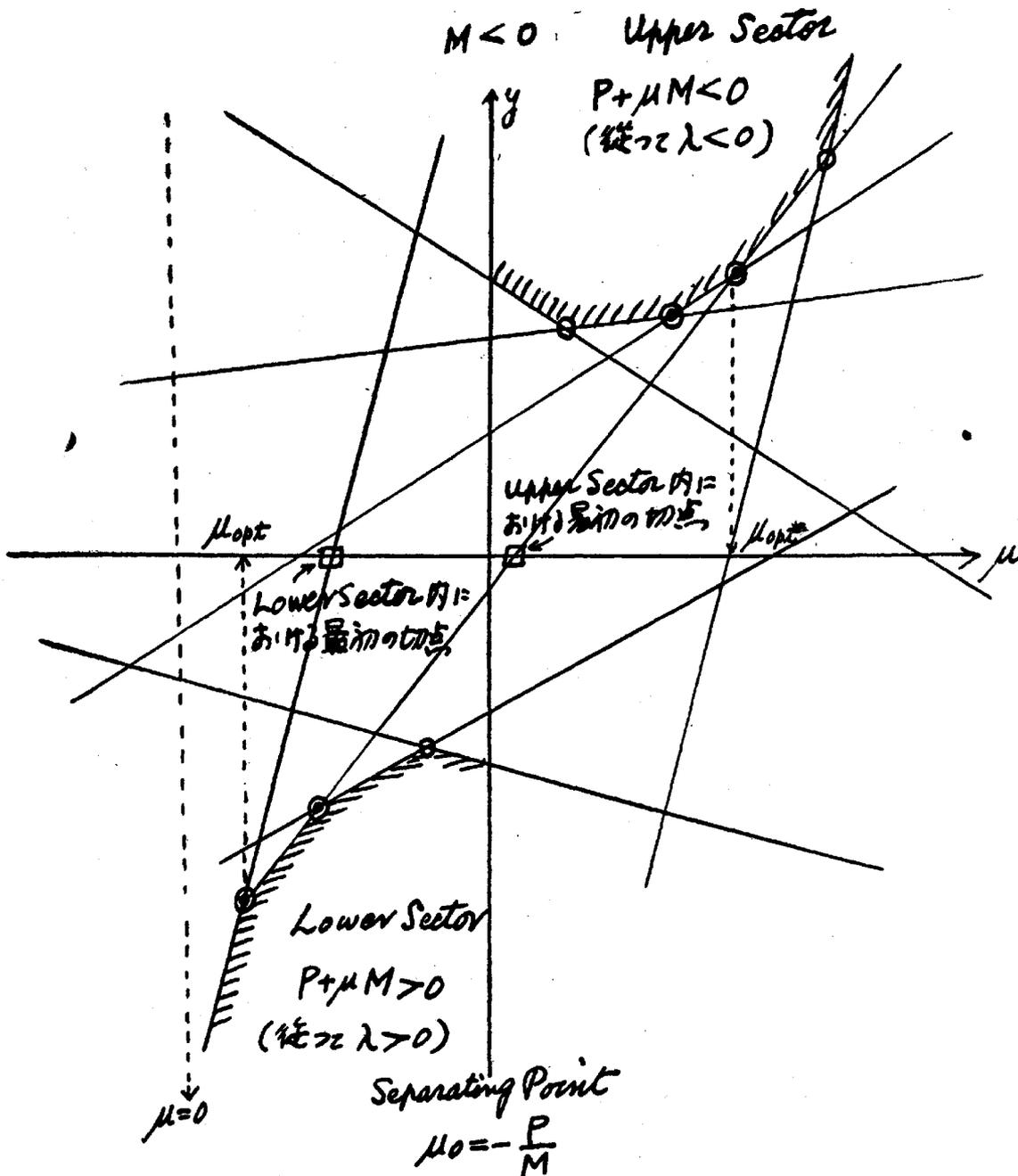
この  $\mu$  の影響力を検討するには、上の形では不便であるから、その逆数をとつて、

$$(12.29) \quad \frac{1}{f' - f} = \frac{1}{|P + \mu M|} \underset{j}{Max} \left| \frac{p_j + \mu V_j}{x_j} \right| \quad \left. \begin{matrix} x_j < 0 \\ (p_j + \mu V_j) \cdot (P + \mu M) < 0 \end{matrix} \right\}$$

とし、この右辺を最小にするところの  $\mu$  を求めることとする。

先づ、右辺第二項の中身  $(p_j + \mu V_j) / x_j$  を  $y$  とおいて、これを  $\mu$  の函数：

$$(12.30) \quad x = \frac{p_j}{x_j} + \mu \frac{V_j}{x_j}$$



(12.31) 図

で表わせば、 $p_j / x_j$ ,  $V_j / x_j$  は、何れも初期値できまる常数であるから、 $y$  は  $\mu$  の一次函数となり、(12.30) 式は  $(y, \mu)$  平面上の直線で表わされ、 $x_j > 0$  なる  $x$  の数だけ斯る直線が描かれることになる。

次に、 $P + \mu M = 0$  を解いて  $\mu^0$  を求め、 $\mu = \mu_0$  の直線を境として、 $P + \mu M < 0$  なる  $\mu$  の変域を upper sector (何となれば、(12.29) の条件により  $p_j + \mu V_j > 0$ 、従つて  $y > 0$  であるから)、 $P + \mu M > 0$  となる  $\mu$  の変域を lower sector (何となれば、(12.29) により  $p_j + \mu V_j < 0$ 、従つて  $y < 0$  であるから) と名附ける。 $\mu$  が upper sector 内に存在する (則ち  $P + \mu M < 0$  が成立つ) ためには、 $\mu M < -P$  でなくてはならず、従つて、 $M$  が正であるか負であるかに応じて、 $\mu < -P/M$  又は  $\mu > -P/M$  が成立たなくてはならない。定義により  $P + \mu_0 M = 0$ 、従つて  $-P/M = \mu_0$  であるから、 $\mu$  が upper sector に存在するためには、 $M > 0$  ならば  $\mu < \mu_0$ 、則ち upper sector は  $\mu_0$  の左側に、 $M < 0$  ならば  $\mu > \mu_0$ 、則ち upper sector は  $\mu_0$  の右側に位置しなければならない。lower sector の方は、勿論、その反対側になる。

(12.29) 式は、 $x_j > 0$  なる種々の  $x_j$  について求めた  $y$  の値のうち、与えられた  $\mu$  については  $|y|$  が最大 (則ち、 $\mu$  軸からの距離が最大) になるような  $j$  だけが選ばれること、則ち、upper sector ( $P + \mu M < 0$ ,  $y > 0$ ) においてはそれは下に凸な凸多面錐を形成し、lower sector においてはそれは上に凸な凸多面錐を形成することを示すものである。従つて、何れの sector においても、これら凸多面錐上の総ての点のうちで、 $\mu$  軸に最も近い点、線又は面、等が一義的に決まる。

lower sector における  $\mu$  の或る変域内において  $y = p_j / x_j + V_j / x_j$  の線が、 $x_j > 0$  なる総ての  $j$  について  $y \geq 0$  であるならば、 $d_j = p_j + \mu V_j = x_j y \geq 0$  となり、 $\lambda$  がいくら正方向に延びても  $x_j$  は負とはならない (勿論、最初に 0 であつた変数は負となるかもしれない)。他方 lower sector においては  $P + \mu M > 0$  であるから  $f' - f = \lambda (P + \mu M)$  は  $\lambda$  の増加につれて無限大となり得る。 $\mu$  のこのような変域を escape range と呼び、それに対応する  $d_j = p_j + \mu V_j$  を escape direction と名附ける。upper sector においても、

総ての  $x_j > 0$  において  $y \leq 0$  となる  $\mu$  の変域においては、 $f' - f$  に無限大となることができる。これもまた同様に、escape range と呼ばれる。

このようなグラフを手掛りとして、問題の (12.29) 式を最小にするような  $\mu$  の値を求めてみよう。先ず、出発点における総ての  $x_j$  の値が正であり、従つて  $\mu$  の変域に制限が存在しない場合を考える。(12.29) 式の右辺を  $F(\mu)$ 、右辺第二項を  $N(\mu)$  で表わせば、

$$(12.32) \quad F(\mu) = \frac{N(\mu)}{|P + \mu M|}$$

$$(12.33) \quad N(\mu) = \text{Max}_j \left| \frac{p_j + \mu V_j}{x_j} \right| \quad \begin{array}{l} x_j > 0 \\ (p_j + \mu V_j)(P + \mu M) < 0 \end{array}$$

であり、この  $N(\mu)$  は、既に上記のグラフの縦座標の絶対値として図示されている。

この  $F(\mu)$  の値の変化の状況を、図表における  $N(\mu)$  折線の任意の一つの線分上に限つて考えてみよう。その線分の両端における  $\mu$  の値をそれぞれ  $\mu'$ 、 $\mu''$ 、それに対応する  $N(\mu)$  の値をそれぞれ  $Z'$ 、 $Z''$  とすれば、

$$(12.34) \quad F(\mu) = \text{sgn}(P + \mu M) \frac{Z' + \frac{Z'' - Z'}{\mu'' - \mu'} (\mu - \mu')}{P + \mu M} \quad (\mu'' \geq \mu \geq \mu')$$

$$(12.35) \quad \frac{dF(\mu)}{d\mu} = -\text{sgn}(P + \mu M) \cdot \frac{MK}{(P + \mu M)^2} \left[ -\frac{Z'}{K} - (\mu' - \mu_0) \right] \quad (\mu'' \geq \mu \geq \mu')$$

$$\text{但し } K = \frac{Z'' - Z'}{\mu'' - \mu'}$$

この導関数を検討すると、変数  $\mu$  は分母に  $(P + \mu M)^2$  の形で現れてくるだけである。 $M \neq 0$  ならば、 $(P + \mu M)^2$  は  $\mu$  の単調増加又は単調減少函数であり、従つて  $F(\mu)$  もまた  $\mu$  の単調増加又は単調減少函数となり、それ故、 $F(\mu)$  の最小値は線分の何れかの端 ( $\mu'$  又は  $\mu''$ ) において生ずる。 $M = 0$  であれば、その  $\mu'$  から  $\mu''$  までの全区間において  $F(\mu)$  の値は一定となる。従つて  $F(\mu)$  の値の最小値を求める場合には、 $\mu$  の全変域について考える必要はなく、 $N(\mu)$  図表の各線分の端点 (joint) だけを考えれば充分である。

upper sector 或は lower sector において  $N(\mu)$  の値を最小ならしめる点を、それぞれ、minimum point と名付ける。

$M=0$  ならば、 $F(\mu)=N(\mu)/P$  となるから、 $N(\mu)$  を最小にする  $\mu$  の値 (minimum point) は同時に  $F(\mu)$  をも最小ならしめるので、問題は簡単に解かれる。 $M \neq 0$  なる場合には分子と分母との両方が  $\mu$  の函数となるので、更に詳細な検討を要する。そこで、予備的命題として、次の二つの名題が成立つ。

〔命題 12.36〕  $M \neq 0$  ならば、上図の各 sector における  $F(\mu)$  の最小値は、夫々の sector の minimum point か又はそれよりも  $\mu^0$  から遠い或る joint (又は線分) 上において実現される。

この命題を更に精密化すれば、

〔命題 12.37〕 上図の各 sector における minimum joint から出発して、 $\mu_0$  から遠ざかる方向に進むならば、 $F(\mu)$  は単調に増加し続けるか、又は、最初は単調に減少して或る一つの joint (又は線分) で最低に達し爾後は単調に増加を続けるか、何れかである。

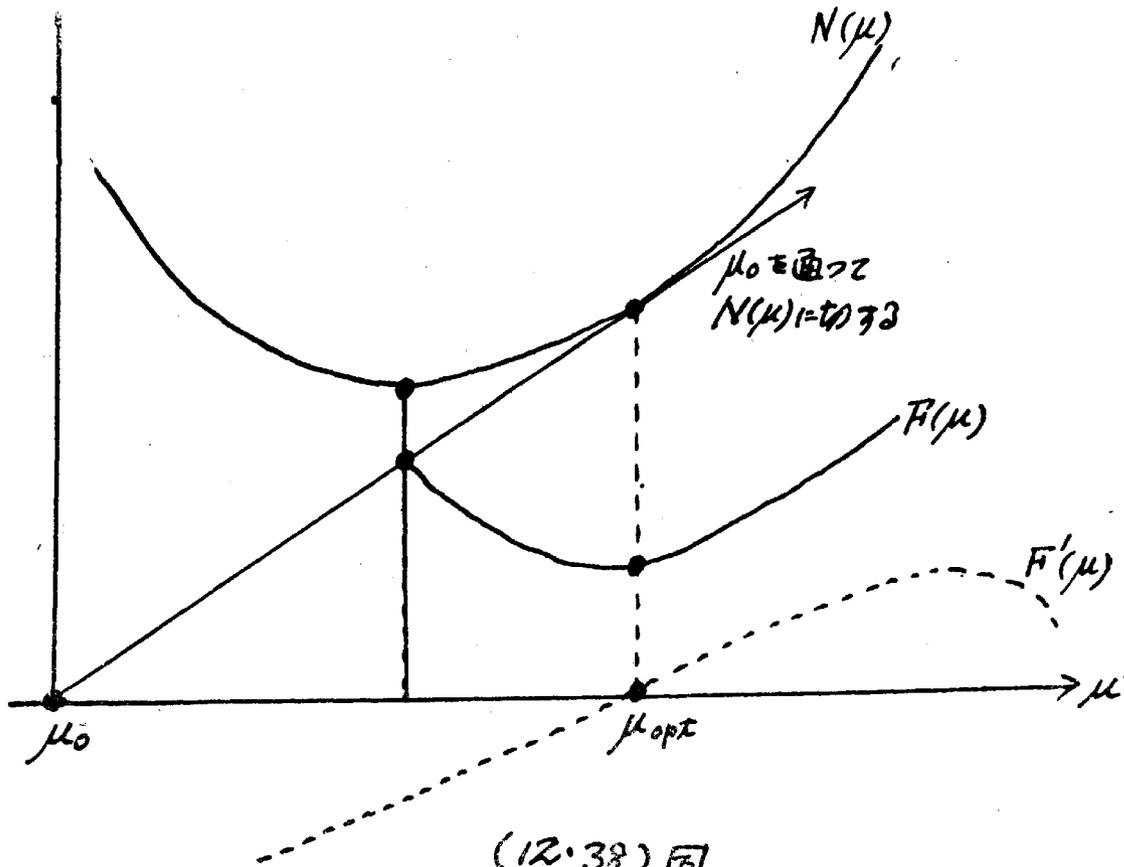
この命題の証明を簡単にするには、 $N(\mu)$  を近似的に二回微分可能な連続凸函数で表わすのが便利である。 $P + \mu M > 0$ ,  $M > 0$  なる場合について考えれば、 $F(\mu) = N(\mu)/(P + \mu M)$  であるから、

$$(12.39) \quad \frac{dF(\mu)}{d\mu} = \frac{\frac{dN(\mu)}{d\mu} (P + \mu M) - N(\mu) \cdot M}{(P + \mu M)^2}$$

この分母は常に正であるが、分子の符号は不確定である。そこで、分子を更に微分すれば、

$$(12.40) \quad \frac{d\{N'(P + \mu M) - N \cdot M\}}{d\mu} = N''(P + \mu M)$$

然るに、 $N(\mu)$  は凸であるから  $N''$  は必ず正、また仮定により  $(P + \mu M) > 0$  であるから、上式は常に正であり、従つて、(12.39) 式の分母は  $\mu$  の単調増加函数である。他方、 $N(\mu)$  の minimum point においては、(12.39) 式の分母は  $-N(\mu) \cdot M < 0$  となるから、 $\mu$  の増加につれてその負値は 0 に近付き、或る点  $\mu_{opt.}$  で 0 となり、更に 0 を超えて正となる。然るに、分母



(12.38) 図

は  $\mu_0$  以外では常に正であるから、(12.39) 式の右辺は、minimum point では負、 $\mu$  が増すにつれて 0 に近付き  $\mu_{opt}$  では 0、それを超えれば正となる。従つて  $F(\mu)$  は、 $\mu$  の minimum point を超えると単調減少し、 $\mu_{opt}$  では最小となり、それを超えれば単調増加する。 $(P+\mu M)$  と  $M$  が、正でない場合についてもまた、同様の推論が成立つ。故に、 $F(\mu)$  の最小値は、 $dF(\mu)/d\mu = 0$  を解くことによつて確定される。然し、 $N(\mu)$  は実際にはスムーズな曲線ではないので、そのような微分法的解法は使用できない。実際の計算に当つては、次のような計算手続が必要である。

〔規則 12.41〕 第 (12.31) 図の各 sector において、 $\mu_0$  に最も近い joint から出発して、順次に  $\mu_0$  から遠い joint に向つて進む。その際、互に隣り合つている joint を結ぶ線分を延長して  $\mu$  軸との交点を求める。この交点は、最初のうちは互に反対側の sector にあるが、進行につれて自己の sector に移つてくる。その、自己の sector に移つた最初の交点を決定する線分における、 $\mu_0$  に近い方の joint を求めれば、その点において  $F(\mu)$  は各 sector 内における最低値をとる。若しその交点が  $\mu_0$  に一致するなら

ば、 $F(\mu)$  の値は、その線分内において一定値をとり、従つてその線分が  $F(\mu)$  の最低値を与える。

その証明は次の如くである。或る joint における  $\mu$  の値  $\mu'$  から出発して、 $\mu^0$  から遠ざかるにつれて  $F(\mu)$  の値が増加するためには、 $(P+\mu M)$  と  $M$  との符号の正負を問わず、

$$(12.42) \quad \left| \frac{y'}{\mu' - \mu^0} \right| < |K|$$

$$y' = \frac{p_j + \mu' V_j}{x_j}$$

が成立たなければならない。従つて、(12.42) が初めて成立つところの joint が、 $F(\mu)$  の最小値を与える。 $N(\mu)$  の折線を曲線で近似的に表わした場合の、 $F(\mu)$  の極値条件は、(12.39) より、

$$(P + \mu M) \cdot N' - NM = 0$$

これに、 $P + \mu_0 M = 0$  から、 $P = -\mu_0 M$  を代入すれば、

$$(12.43) \quad \frac{dN}{d\mu} = \frac{N}{\mu - \mu_0}$$

となる。則ち、 $\mu_0$  を通る直線が  $N(\mu)$  曲線に切する点において、 $F(\mu)$  の値は極値をとる。この (12.43) 式は、折線における (12.42) 式の連続曲線近似に外ならないこと、一見して明かであろう。

〔規則 12.44〕  $\mu$  の変域に限界が附けられている場合には、 $\mu_{opt}$  がその変域内にあればその値を、変域外にあるときは  $\mu$  の許容変域内で  $\mu_{opt}$  に最も近い  $\mu$  の値をとればよい。

出発点  $x$  における全変数の値が悉く正であれば、 $\lambda$  を充分小さくとりさえすれば、どの方向に進んでも許容域外に出る懼れはない。若し、出発点  $x$  が 0 なる変数  $x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\gamma$  を含むならば、(12.9) 式に従う進行によつて許容域外に離脱しないための必要十分条件は、

$$(12.52) \quad p_i + \mu V_i \geq 0 \quad | \quad x_i = 0 \quad (i = \alpha, \beta, \dots, \gamma)$$

が成立つか又は、

$$(12.53) \quad p_i + \mu V_i \leq 0 \quad | \quad x_i = 0 \quad (i = \alpha, \beta, \dots, \gamma)$$

が成立つところの  $\mu$  の変域が存在すること、である。上の二式を書き直せば、

許容域内にある為の必要十分条件は

$$(12.54) \quad \left[ -\min_i \frac{p_i}{|V_i|} \mid x_i = 0 \mid V_i > 0 \right] \leq \mu \leq \left[ \min_i \frac{p_i}{|V_i|} \mid x_i = 0 \mid V_i < 0 \right]$$

が成立つか、又は

$$(12.55) \quad \left[ \max_i \frac{p_i}{|V_i|} \mid x_i = 0 \mid V_i < 0 \right] \leq \mu \leq \left[ -\max_i \frac{p_i}{|V_i|} \mid x_i = 0 \mid V_i > 0 \right]$$

が成立つことである。そのような変域の存在と、その値とが算出されたならば、その変域について上記の規則 (12.44) を適用すればよい。若しも、(12.52) 及び (12.53) における  $\mu$  の上限と下限とが入れ違いになつているために  $\mu$  の許容変域が存在しないならば、それは、最適点において若干の変数が 0 となることを示すものであるから、 $x_\alpha, \dots, x_\gamma$  のうちで、その入れ違いの原因となつている若干の変数を 0 とおいて自由度切除を行うことにより、(12.52) 又は (12.53) を満足する  $\mu$  の変域を見出すことができる。

それほど正確な最適方向を必要としない場合には、上記の規則 (12.44) の代りに、次の簡便法によつて  $\mu$  を決めても差支ない。

〔規則 12.56〕 許容域内に留りながら選好値を増すためには、 $M > 0$  ならば (12.54) 式によつて決まる  $\mu$  の上限を、また  $M < 0$  ならば下限をとればよい。又は、 $M > 0$  ならば (12.55) 式によつて決まる下限を、 $M < 0$  ならば上限をとればよい。その場合勿論、上限が下限よりも小でないものと仮定する。

また、何等かの理由で、選好値を不変に保ちながら進みたい場合には、次の規則を利用する。

〔規則 12.57〕  $M = 0, \lambda \neq 0$  ならば、選好函数を不変に保つような  $\mu$  の値は存在しない。 $M \neq 0$  ならば、 $\mu_0 = P / -M$  は必らず (12.54) か又は (12.55) を満足させ、従つて (12.9) 式の  $\mu$  をこの  $\mu_0$  に等しくすることによつて、 $\lambda$  の先分に小さな変域 (12.54 の場合は正、12.55 の場合は負変域) をとれば、各変数は許容域内に留りながら、選好値は一定に保たれる。

(12.52), (12.53) の何れも満足されない場合には、出発点の位置を適当に移動することによつて、次の複勾配法の適用効果を大ならしめることが可能で



とするやり方である。 $\epsilon_i$  は  $[\hat{N}_{ij}]$  の row の符号を示す。

もつと簡単な方法としては、

$$(12.68) \quad \omega_i = \frac{1}{\sqrt{N_{ii}}} \quad (i = \alpha, \beta, \dots, \gamma)$$

としても差支ない。これなら、 $[N_{ij}]$  の逆行列を計算する面倒をかけずにすむ。

何れかの方法で  $b_k$  が決まれば、第 (12.31) 図の方法で、

$$(12.70) \quad d_k = p_k + \mu b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

のパラメーター  $\mu$  の最適値を求めればよい。

このように  $\omega$  と  $\mu$  とを二段構えで決定することをやめて、両方を一挙に決定することも可能である。則ち、(12.70) 式の右辺  $b_k$  に (12.65) 式を代入して、 $\mu_i = \mu \omega_i$  とおけば、

$$(12.71) \quad d_k = p_k + \mu_\alpha b_{\alpha k} + \mu_\beta b_{\beta k} + \dots + \mu_\gamma b_{\gamma k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

この進行の終点の座標を  $x'$  とすれば、その点が許容域内にあるためには、

$$(12.73) \quad x'_j = x_j^0 + \lambda d_j = x_j^0 + \lambda \sum_{k=1}^n b_{jk} (p_k + \mu_\alpha b_{\alpha k} + \dots + \mu_\gamma b_{\gamma k}) \geq 0 \quad (j = 1, n+m)$$

そのうち、 $x_\alpha^0, x_\beta^0, \dots, x_\gamma^0 = 0, \lambda > 0$  であるから、

$$(12.74) \quad p_i + N_{i\alpha} \mu_\alpha + \dots + N_{i\gamma} \mu_\gamma \geq 0 \quad (i = \alpha, \dots, \gamma)$$

それによる選好値の増加は、

$$(12.75) \quad f' - f^0 = \lambda (P + p_\alpha \mu_\alpha + \dots + p_\gamma \mu_\gamma)$$

この  $(P + p_\alpha \mu_\alpha + \dots + p_\gamma \mu_\gamma)$  を (12.74) の不等式拘束条件の下で最大ならしめるように各パラメーター  $\mu_\alpha, \dots, \mu_\gamma$  の値を決める問題は、一つの線型計画問題に外ならない。これを表立つて解くことは面倒であるから、通常は前記の簡便法を使用することが望ましいであろう。

上記の最も簡単な (12.69) 式を使つて、極めて単純な複勾配法を構成することができる。則ち、許容域内の任意の一点  $x_j > 0 (j = 1, \dots, n+m)$  から出発して、等選好面に垂直に  $\lambda$  長進めば  $x'_j = x_j + \lambda p_j$  点に到達する。許容域内に留り得る  $\lambda$  の最長値は、

$$(12.77) \quad \lambda_{opt} = \min_j \frac{x_j}{-p_j} \quad \left| \quad p_j < 0, x_j > 0 \right.$$

で決定される。この  $x'$  点では少くとも一つの変数が  $0$  になる。 $x'$  から更に (12.70), (12.69) によつて進み、 $\mu$  の最適値を第 (12.31) 図の方法で決定する。そこで少くとも二つの変数が  $0$  となる。以下同様の過程を繰返して最適点に接近する。

この方法と、通常の方法との違う点は、勾配要素  $V_k$  の代りに、(12.69) 式で決まる  $b_k$  を使う点だけである。 $V_k$  では総ての境界が考慮されているが、 $b_k$  では少数の特別の境界だけしか考えに入れられていない。大ざっぱな表現を使えば、 $b_k$  法では情報蓄積が算術級数的に行われるのに対し、対数ポテンシャル法では幾何級数的に行われ、従つて計算段階の数は、前者では問題の自由度  $n$  に比例するのに対し、後者では大体  $\log n$  に比例するものと考えてよいであろう。その代りに、一段階の計算の手数は、 $b_k$  法の方が少くてすむ。

### 13 複勾配法の計算規則

先ず、基底方程式の係数  $b_{jk}$  ( $j=1, \dots, n+m; k=0, 1, \dots, n$ ) の一覧表を作り、その横計  $b_{j\cdot} = \sum_{k=1}^n b_{jk}$ , 縦計  $b_{\cdot k} = \sum_{j=1}^{n+m} b_{jk}$  を計算して記入しておく。出発点  $x$  が  $0$  座標  $x_j$  を含むときは、その  $j$  を除いた縦計  $b_{\cdot k} = \sum_{j=1}^{n+m} b_{jk} | x_j > 0$  を併せて記入しておく必要がある。以下、便宜上、ドット記号で  $1$  から  $n$  までの合計を、二重ドット記号  $\cdot\cdot$  で  $1$  から  $n+m$  までの合計を、また  $\div$  記号によつて  $x_j > 0$  なる  $j$  についての  $1$  から  $n+m$  までの合計を示す。

次に (13.4表) の計算表を準備し、以下の順序で記入・計算して行く。

(i) 非負初期値  $x_j$  を (1) 欄に記入し、これが基底方程式を満足することを確かめておく。

(ii)  $x_j > 0$  なる  $x_1, \dots, x_{n+m}$  について、その逆数  $1/x_j$  を求めて (2) 欄に記入し、 $1/x_j \times x_j = 1$  になることを確かめておく。

(iii) 上記の  $1/x_j$  に  $b_{jk}$  をかけて  $1$  から  $n+m$  まで加えたもの、則ち基底勾配要素  $V_k = \sum_{j=1}^{n+m} b_{jk}/x_j | x_j > 0$  を  $k=1, \dots, n$  について計算の上、

(0)	(1) Initial Point $x_j$	(2) $\frac{1}{x_j}   x_j > 0$	(3) $V_j$	(4) $p_j$	(5) $\frac{V_j}{x_j}   x_j > 0$ $\frac{p_j}{ V_j }   x_j = 0$ $ V_j  < 0$	(6) $\frac{p_j}{x_j}   x_j > 0$ $\frac{p_j}{ V_j }   x_j = 0$ $ V_j  > 0$	(7) $\gamma - \frac{y_j}{y_{cond}}   x_j > 0$	(8) 値 は $\gamma$
$j=1$								
2								
⋮								
$n$								
$n+1$								
$n+2$								
⋮								
$n+m$								
$\Sigma$								
	$f_{init}$	$P$	$M$	$\mu_0$	$\mu_{cond}^{>0}$	$\mu_{cond}^{<0}$		
	$\mu_{low}$	$\mu_{up}$	$\mu_{cond}^{>0}$	$\mu_{cond}^{<0}$			$f_{cond}^{>0}$	

第 (3) 欄の上半部に記入する。 $\sum_{k=1}^n V_k$  が  $\sum_{j=1}^{n+m} x_j > 0 (1/x_j)$  ( $\sum_{k=1}^n b_{jk}$ ) に等しいことを検算しておく。従属変数についての勾配は  $x_j = 0$  なる変数についてのみ計算・記入する。

(iv) 基底変数に対する価格  $p_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) を第 (4) 欄に記入する。従属変数については  $x_j = 0$  なる変数についてのみ計算・記入すればよい。

(v) 正なる基底変数  $x_k > 0$  ( $k=1, \dots, n$ ) について (3) 欄と (2) 欄との積、則ち  $V_k / x_k$  を計算して、第 (5) 欄の上半部に記入する。

(vi) 正なる従属変数  $x_j > 0$  ( $j=n+1, \dots, n+m$ ) について  $V_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} V_k$  を計算し、その値を計算機上においたまま、更に (2) 欄の  $1/x_j$  を乗じて、その結果 ( $V_j / x_j$ ) を第 (5) 欄の下半部に記入する。これで (5) 欄が全部記入済となるので、(1) 欄と (5) 欄とをかけて加えた値  $\sum_{j=1}^{n+m} x_j > 0 (V_j / x_j)$  を求め、最初に計算しておいた  $b_{jk}$  の値と (3) 欄の  $V_k$  との積の和  $\sum_{k=1}^n b_{jk} V_k$  と一致することを確認しておく。更にまた、(5) 欄の  $x_j > 0$  についての合計値  $(V/x)_+$  を計算して、(5) 欄の下段  $\Sigma$  のところに記入する。

(vii) 正なる基底変数  $x_k > 0$  ( $k=1, \dots, n$ ) について、(2)  $\times$  (4) 則ち  $p_k / x_k$  を計算して、(6) 欄の上半部に記入する。(12.14) 式  $p_j = \sum_{k=1}^n$

$b_{jk} p_k$ , ( $j=n+1, \dots, n+m$ ) によつて、正なる従属変数に対する価格  $p_j$  ( $j=n+1, \dots, n+m$ ) を求め、その値を計算機上に置いたまま、それに (2) 欄の  $1/x_j$  を乗じ、その答を (6) 欄の下半部に記入する。ここで (6) 欄が一杯になるので、

$$\sum_{j=1 | x_j > 0}^{n+m} x_j \left( \frac{p_j}{x_j} \right) = \sum_{k=1}^n b_{+k} p_k$$

の検算を施しておく。更にまた (6) 欄の合計  $(p/x)_+$  を求めて、その  $\Sigma$  行のところに記入する。

$$(vii) (12.15) \text{式 } V_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} V_k, \quad (j=1, \dots, n+m)$$

によつて 0 なる従属変数  $x_j = 0$ , ( $j=n+1, \dots, n+m$ ) についての  $V_j$  を求め、(3) 欄の下半部の空いている所に記入する。

(viii) 同上の変数について  $p_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} p_k$  を計算し、(4) 欄の下半部の空いた箇所に記入する。

(ix) 上記の  $p_j$  が計算機上に算出されたならば、それを  $|V_j| \neq 0$  で割り、その答を、 $V_j < 0$  のときは (5) 欄に、 $V_j > 0$  のときは (6) 欄に記入する。主変数中の 0 なるもの ( $x_k = 0$ ) についてもまた、 $p_k / |V_k|$ , ( $V_k \neq 0$ ) を計算し、 $V_k < 0$  のときは (5) 欄に、 $V_k > 0$  のときは (6) 欄に記載する。検算は次の二つの式を利用して行う。

$$\sum_{j=1 | x_j > 0}^{n+m} (p_j + V_j) = \sum_{k=1}^n (b_{+k} - b_{-k}) (p_k + V_k)$$

$$\sum_{j=1 | x_j = 0, V_j \neq 0}^{n+m} |V_j| \left( \frac{p_j}{|V_j|} \right) = \sum_{j=1 | x_j = 0, V_j \neq 0}^{n+m} p_j$$

(x)  $P$  を (12.18) 式で、 $M$  を (12.19) 式で、また  $\mu_0$  を (12.20) によつて求め、当該欄に記入する。 $\mu_0$  については特に、一桁か二桁の概算値を求めて、それを  $\mu_0^{approx}$  の所に記入する。

(xi) 正なる総ての変数  $x_j > 0$ ,  $j=1, \dots, n+m$  について、縦座標:

$$Y_j = \frac{p_j}{x_j} + \mu_0^{approx} \frac{V_j}{x_j} \quad \left| \quad x_j > 0 \right.$$

を求め、これを (12.31) 図の  $(y, \mu)$  グラフに記入する。この計算は、(5) 欄から  $V_j / x_j$  を記録加算器 (listing adding machine) に移しとり、

$\mu_o^{approx}$  の乗算を繰返し用のキーを使つて行い、それに (6) 欄を加えれば、加算器だけで簡単に行うことができる (加減乗除のできる小型の記録計算器も売出されているので、必ずしも  $\mu_o^{approx}$  を使う必要はなく、 $\mu_o$  そのままを使うこともできる、古瀬註記)。検算は、

$$Y_+ - \left(\frac{p}{x}\right)_+ - \mu_o^{approx} \left(\frac{V}{x}\right)_+ = 0$$

によつて行う。このグラフから、前節の (12.30)~(12.37) の方法によつて  $\mu_{opt}^{approx}$  を求め、計算表の下部の、 $\mu_{opt}^{uncond}$  の所に記入しておく。

(xii) 次に、(12.54), (12.55) 式に (5), (6) 欄の  $p_j / |V_j|$ ,  $x_j = 0$ ,  $V_j \neq 0$  を代入して、 $\mu$  の上限と下限とを求め、計算表の  $\mu^{up}$ ,  $\mu^{low}$  の所に記入する。0 の変数がないときは、 $\mu^{up} = \infty$ ,  $\mu^{low} = -\infty$  と記す。

(xiii)  $\mu_{opt}^{uncond}$  が上記の  $\mu$  の限界内にあれば、それをそのまま  $\mu_{opt}^{cond}$  に選び、 $\mu$  の限界外に落ちるときは、上限と下限とのうち、 $\mu_{opt}^{uncond}$  に最も近いものを  $\mu_{opt}^{cond}$  に選ぶ。

斯くして算出された  $\mu_{opt}^{cond}$  は、グラフによる近似値であるから、正確な値を計算しなければならない。 $\mu$  の最適値が  $\mu$  の変域内にあるときは、その  $\mu_{opt}$  を決定する二つの線分の番号  $\alpha, \beta$  について、計算表の (6), (5) 欄から  $p/x$ ,  $V/x$  の値を読み取り、それを、

$$\mu_{opt}^{uncond} = \left( \frac{p_\alpha}{x_\alpha} - \frac{p_\beta}{x_\beta} \right) / \left( \frac{V_\beta}{x_\beta} - \frac{V_\alpha}{x_\alpha} \right)$$

に代入して、 $\mu$  の正確な値を求め、それを計算表の  $\mu_{opt}^{uncond}$  及び  $\mu_{opt}^{cond}$  の箇所に記入する。

グラフにおける  $\mu_{opt}^{cond}$  に対応する縦軸の値  $y_{opt}^{cond}$  は、 $-1/\lambda_{opt}^{cond}$  に一致する。この  $y_{opt}^{cond}$  も、正確な値を知らなければならない。 $\mu_{opt}^{uncond}$  が  $\mu$  の変域内にある場合は、その運動の終点  $x'$  においては、上記の  $x'_\alpha$  と  $x'_\beta$  とは 0 となるから、(12.12) 式より、

$$(13.20) \quad x_\alpha + \lambda_{opt}^{cond} (p_\alpha + \mu_{opt}^{cond} V_\alpha) = 0$$

となる。これから  $\lambda_{opt}^{cond}$  を求め、その逆数に負号をつけたものが、 $y_{opt}^{cond}$  の正確な値に外ならない。 $\mu_{opt}^{uncond}$  が、 $\mu$  の変域外にあるときは、 $\mu_{opt}^{cond}$  を通る垂線

によつて貫通される線分  $r$  について、(13.20) 式を適用すればよい。その得られた値  $y_{opt}^{cond}$  を、計算表の当該箇所に記入する。

(xiv) 総ての正なる変数について、次の優先順位を計算する、

$$(13.25) \quad \frac{y_j}{y_{opt}^{cond}} = \frac{\frac{p_j}{x_j} + \mu_{opt}^{cond} \frac{V_j}{x_j}}{y_{opt}^{cond}} \quad (j=1, \dots, n+m \mid x_j > 0)$$

この値は、

$$(13.27) \quad x'_j = x_j \left(1 - \frac{y_j}{y_{opt}^{cond}}\right) \quad (j=1, \dots, n+m \mid x_j > 0)$$

なる関係を通じて、新しい点  $x'$  を計算するのにも役立つので、 $y_j / y_{opt}^{cond}$  の代りに、 $(1 - y_j / y_{opt}^{cond})$  を優先順位と考えるのが便利である。その値の 0 に近いもの、経験的には 0~1 の間に落ちるものは、最適点で 0 となる確率が大い。この (13.25) から  $x'_j$  までの計算は、各変数につき一回の連続計算として行い、その途中で  $(1 - y_j / y_{opt}^{cond})$  を計算表の (7) 欄に記入し、最後の  $x'_j$  を次の計算表の (1) 欄に記入すれば、迅速な計算が可能である。検算は、

$$(13.29) \quad \left(\frac{y_j}{y_{opt}^{cond}}\right)_+ = \frac{\left(\frac{p_j}{x_j}\right)_+ + \mu_{opt}^{cond} \left(\frac{V_j}{x_j}\right)_+}{y_{opt}^{cond}}$$

$$(13.30) \quad (x'_j)_+ = x_j + \left(x_j \frac{y_j}{y_{opt}^{cond}}\right)_+$$

$$(13.31) \quad \sum_{j=1}^{n+m} \mid x_j = 0 \quad x'_j = \frac{\sum_{j=1}^{n+m} \mid x_j = 0} p_j + \mu_{opt}^{cond} \frac{\sum_{j=1}^{n+m} \mid x_j = 0} V_j}{y_{opt}^{cond}}$$

によつて行う。

(xv) 次の二つの式で、 $x'$  における選好値  $f'$  を計算、その一致を確かめた上で、計算表に記入する。

$$(13.32) \quad f' - f = f - \frac{P + \mu_{opt}^{cond} M}{y_{opt}^{cond}}$$

$$f' = p_0 + \sum_{k=1}^n p_k x'_k$$

(xvi) この新しい  $x'$  点から出発して、再び (i)~(xv) の過程を繰返す。

然し、以上の過程を繰返すだけでは、収束が遅いから、途中で、優先順位を利用して、自由度切除、境界切除を加えることによつて、収束速度を速めなければならない。

**優先順位だけによる自由度切除**

過去の経験によれば、自由度  $n$  に対し、その  $1/3$  に当る  $n/3$  個を切除するならば、誤つた切除をする（最適点で  $0$  とならぬ変数を切除する）危険は少い。その危険を少くし、修正の手数を減らすには、次に述べる top truncation, the method of apparent optimum, price testing for truncations 等の、より慎重な方法によらなければならない。

〔腰だめ式自由度切除 (rule of thumb for freedom truncations) (13.34)〕

優先順位だけによつて自由度切除を行う場合には、 $\kappa$  回の計算で  $(1-\sigma^\kappa)$  以上の自由度切除を施してはならない。従つて  $\sigma$  を  $1/3$  とすれば、二回では  $50\%$ 、三回では  $70\%$ 、四回では  $80\%$ 、五回では  $87\%$  を超えてはならない。

最後に二変数を残し、それを単体法で解くことにすれば、必要な計算回数は、 $n\sigma^{\kappa-1}=2$ 、則ち、 $\kappa=1+(\log n - \log 2) / -\log \sigma$  で与えられる。 $\sigma=1/3$  とすれば、

$n$	2	3	5	7	10	15	23	34	51	76	145	217	325	488
$\kappa$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

〔progress table〕

優先順位による truncation を効率的に行うには、(13.38) 表の progress table を用意し、各計算段回における順位  $r$  と優先係数  $(1-y_j / y_{opt}^{cond})$  とを記入するのが便利である。

順位数  $r$  で  $0$  とあるのは、順位係数が  $0$  であることを示し、: 符号は自由度切除の行われたことを示す。 $r$  の計算は、前の計算段階及び現在の計算段階で  $0$  となつたものをも含めて考える。

変数 数 No.	順位数 $r$				順位係数 $(1 - y_j / y_{opt}^{cond})$			
	In Round No.							
	1	2	3	4	1	2	3	4
$j = 1$		12	14			.818	.973	
2								
3								
4			18	19			1.000	1.000
5								
6	9	11		12	.986	.809		.926
7	5	6	6	0	.964	.630	.597	0
8	17	18	17	18	.997	.968	.991	.989
9	0:	—	—	—→	0			
10	12	14	13	16	.990	.874	.971	.963
11	4	0:	—	—→	.915	0		
12	0:	—	—	—→	0			
13	10	13	11	13	.988	.859	.956	.946
14	15	9	15	17	.994	.783	.980	.975
15	8	7	9	10	.983	.776	.933	.911
16		5	0	6		.492	0	pos.
17								
18								
19								
20								
21	13	16	16	14	.991	.910	.983	.957
22	3			9	.591			.900
23	6	10	7	7	.977	.804	.753	.576
24	14	17	10	5	.993	.932	.954	.960
25	16	0	0	0	.996	0	0	0
26	7	8	8	8	.982	.777	.877	.830
27	11	15	12	11	.990	.892	.958	.923
28								

Top Truncation

各計算段階において 0 となる二個の変数は、原則として、最適点においてもまた 0 となる。然し、早期の段階においては、最適点から離れているため、

最適点の附近の許容域の形が複雑であると、これらの変数が後の段階で再び正となる可能性が残る。そのような可能性を排除するには、次のような判定法を使えばよい。

或る計算段階で 0 となつた変数  $x_g$  ( $g = \alpha, \beta, \dots, r$ ) が、次の段階で取る値  $x'_g$  は、 $x'_g = \lambda(p_g + \mu V_g)$  であるから、 $x'_g$  が正となるためには、 $\lambda$  と  $(p_g + \mu V_g)$  とは同符号でなければならない。また、その結果として選好函数が増すためには  $f' - f = \lambda(P + \mu M) > 0$ 、則ち、 $\lambda$  と  $(P + \mu M)$  とが同符号でなくてはならない。そこで、横軸に  $\mu$  をとり、縦軸に  $(P + \mu M)$ 、 $(p_g + \mu V_g)$ 、 $g = \alpha, \beta, \dots, r$  を表わすグラフを描き、上記の条件を満足するような  $\lambda$  の変域が存在するかどうか、則ち、 $(P + \mu M)$  と  $(p_g + \mu V_g)$ 、 $g = \alpha, \beta, \dots, r$  とが同符号になるような  $\mu$  の変域が存在するかどうかを判定する。

そのような  $\mu$  変域が存在するならば、それらの変数は総て将来正となる可能性を持つから、切除してはならない。同符号になる  $\mu$  変域が存在しない場合には、そのうちの幾つかの変数を除けば、残りは全部同符号になるであろう。従つて、この除かれた変数を自由度切除すれば、残りの変数は後の段階で正值をとることができるであろう。これらの変数は必ず切除しなければならないが、それ以上の切除は危険を伴うことを覚悟しなければならない。

[Rule of Non Intervention] (13.42)

各段階において、上記の条件に合致した変数、則ち、次の段階に進むに必要な最小限度の数の変数だけを自由度切除し、 $\kappa = 1 + (\log n - \log 2) / -\log \sigma$  の段階に到達したならば、progress table を検討する。その結果、最終解の見当がつけば、一気に最終解を出して、その最適性を検定する。

上記の切除に際しては、出来るだけ基底変数の方を切除する方が、次の段階の計算が楽になる。基底変数の場合は、何等の追加計算をも必要としないが、従属変数であると、

$$\bar{p}_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} p_k = p_j - \sum_{g=\alpha\beta\dots\gamma} b_{jg} p_g \quad (j = n+1, \dots, n+m)$$

$$\bar{V}_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} V_k = V_j - \sum_{g=\alpha\beta\dots\gamma} b_{jg} V_g \quad (j = n+1, \dots, n+m)$$

$$\bar{P} = P - \sum_{\xi=\alpha\beta\cdots\gamma} p_{\xi}^2, \quad \bar{M} = M - \sum_{\xi=\alpha\beta\cdots\gamma} p_{\xi} V_{\xi}$$

によつて、 $\bar{p}$ 、 $\bar{V}$ 、 $\bar{P}$ 、 $\bar{M}$  を計算し直さなければならない。然し、通常  $x_{\alpha}$ 、 $x_{\beta}$ 、 $\cdots$ 、 $x_{\gamma}$  の数は二個であるから、その手数は大したことはない。

### The Method of Apparent Optimum

順位  $r$  の  $1$  から  $n$  までを  $0$  とおけば、 $n$  個の主変数の値  $\bar{x}$  が確定する。この apparent optimum point に対して価格テストを行い、それが悉く非正であり、且つ、従属変数もまた非負であれば、それは真の最適点に外ならない。

上記の条件を満足しない場合には、その段階の出発点  $x$  と、この apparent optimum point  $\bar{x}$  との差ベクトル  $\bar{b} = (\bar{x} - x)$  から新しい方向  $\bar{d} = p + \mu \bar{b}$  を求め、改めて  $x$  点からこの  $\bar{d}$  方向に  $\lambda$  だけ進む。従つて、新しい到達点は  $x'' = x + \lambda \bar{d}$  で表わされる。この進行について、(12.31) 表の方法を適用して  $\mu$  の最適値を定め、その  $x''$  点から僅か許り内側へ入った位置で、再び  $V_j$  を計算して、次の計算段階に移る。

$n$  に比べて  $m$  が非常に大きい場合には、特にこの方法は有利である。前記の progress table の第一回目にこれを適用すれば、直ちに最適解に到達することができる。

### Price Testing for Truncation

前記の apparent optimum point が、真の最適点でなかつた場合、その原因が、 $\bar{x}$  の負要素にあるならば、前記の  $\bar{b}$  によつて  $x''$  へ進めばよい。然し、その原因が、価格の正要素にあるときは、正価格のついた変数を除き、同数の更に下順位の変数を加えて、前記の Method of Apparent Optimum を施す。これを繰返すうちに、真の最適点に到達する機会があるであろう。これは、価格計算だけですむので、極めて簡単に行うことができる。

若しも、何回かの繰返しの後、再び元の変数の組合せに戻るか、又は、あまり低い順位 (順位係数 1 以上) の変数まで入ってしまったと思われるときは、その最後の段階で著しく負な価格をもっている若干の変数を自由度切除する (この際、かなり多数の同時切除が可能である)。その結果が許容域内にあれ

ば、その点を出発点として通常の複勾配法を施し、域外にあれば、第6章の  $S(\lambda)$  法又は前記の  $\bar{b}$  法によつて域内に移つた上で、通常の複勾配法を行えばよい。

### 自由度修正

何回かの自由度切除によつて自由度が 0 になつてしまつたのに、尚最適点に到達しない場合にはどうしたらよいか？

その対策の一つは、その点から許容域内へ僅かに戻つた点を出発点として（則ち、自由度を再び  $n$  に戻して）、但し、それまでの計算資料から判断して多数の境界を切除し、 $m$  の値を出来るだけ減らした上で、再び同じ計算を繰返すやり方である。

〔規則〕 (13.54) 先ず、許容域内の一点を、必要ならば第6章の  $S(\lambda)$  法を使つて、決定する。それに対して、 $\sigma$  規則、progress table, method of apparent optimum, truncation testing を使つて自由度切除を繰返し適用する。その結果、最適点に到達すれば、それで問題が解けたことになる。依然として最適点外にあるならば、その点から僅か許り許容域内に入つた点から、大きな境界切除を加えた上で、再出発すればよい。

この、許容域内への後退によつて選好函数の値が低下する。これを防止するには  $(x_k^0 - x'_k)$  方向に後退する代りに、 $x'_k$  を通る等選好面を考え、 $(x_k^0 - x'_k)$  のこの面への射影の方向に後退する。それには、 $x'$  から、

$$(13.59) \quad d_k = (x_k^0 - x'_k) + \frac{f' - f_0}{p_1^2 + \dots + p_n^2} p_k \quad (k=1, \dots, n)$$

方向に進めばよい。但し、その到達点  $x$  が許容域内に在るためには、 $x = x' + \lambda d$  の  $\lambda$  を先分小さくすることによつて  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  ならしめ得ること、則ち、 $d_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} d_k, j=1, \dots, n+m \mid x_j = 0$  が非負なることが必要且つ十分である。

## 14 単 体 法

省略。

## 15 高階線型聯立方程式

高階の線型聯立方程式を解くことは、決して純粹に科学的な形式的手続の問題ではなく、直観力と想像力とを働かす一種の **art** であるといつて差支ない。

**繰返し法**は、投入産出行列のように、対角要素の値が他の係数に優越している場合などには、収束性が早く、而も乗除計算量が極めて少くてすむ便利な方法である。途中で計算を誤つても、後で自動的に修正される。演算は全く機械的で、電子管式計算機には殊に適した方法である。

然し、右辺常数の種々の値に対し、又は右辺を未知常数のままで解こうとする（則ち、逆のマトリックスを求める）場合には、乗除計算量は却つて増加する。どのような行列に対しても使えるようにするためには、収束性を速める手続を考えなければならないが、今迄のところでは、あまり良い方法は発見されていない。

**ガウスの計算法**は、対角要素の値が優越しておらず、且つ、多くの  $0$  を含まない場合などには、他の何れの方法よりも少い乗除算しか必要としない。種々の右辺常数值に対する解を求めたり、完全な逆マトリックスを求めたりするには非常によい方法で、後者の場合でも、一つの与えられた右辺値に対する場合の僅か三倍の乗除算ですむという利点がある。電子計算機による機械的演算も困難ではない。

このガウス法の最大の難点は、係数行列の対角要素の値が非常に小さく、従つて、**singular** であるか又はそれに非常に近い場合、途中から最初に戻つて、より多くの桁数を計算し直さなければならず、実際上はそこで計算を放棄しなければならない場合がある、という点である。

**消去法**では、最後の段階までは割算を全然行わず、従つて丸めの誤差が全然ない。線型計画問題のように、係数行列が多くの  $0$  を含む場合には、それを分割して個別的に解いて行くことができる、という利点をもつ。右辺の常数值の種々の値に対する解を必要とする際には、全体の計算量が少くてすむ。

但し、行列の分割又は  $0$  係数による計算量の節約が不可能な場合には、他の二法よりも多くの乗除算を必要とすることが、大きな欠点である。

**要約**：係数行列に  $0$  要素が多く、分割による計算節約の可能性の多い場合には、単一解の場合、多数値の場合、逆行列の場合を通じて、消去法の使用が

有利である。

そのような利点のなく、且つ対角要素が大きい場合には、繰返し法を使うべきで、殊に単一解の場合には有利である。

上記の何れの方法も使い難いときは、ガウスの計算法を使わなければならない。

何れの方法でもうまく行かない場合には、これらの方法を混用することによって困難を切抜けられることがある。例えば、最初繰返し法でやって、若干の変数だけが仲々収束しないときは、収束のよい変数の値を元の式に代入の上、残りの変数について他の二法の何れかで解き、それを更に繰返し法で解いて行くことができる。

何れの方法を使うときでも、最後の段階は繰返し法によるのが有利である。それによつて、それまでの解が果して元の方程式を近似的に満しているかどうかをチェックすることができる。

計画法を解くときは、各係数の値は何れも正確なものであるという仮定に立っている。現実には勿論、これらの値は不正確である。これらの誤差の累積の結果、数学的な解が現実から全く離れてしまうこともあり得るかもしれない。然し、実際は、高階の場合にはこれらの誤差が打消し合つて、却つて現実に近い解が得られるものと考えて、差支ないであろう。

## 16 消 去 法

省略。

## 17 ガウスの計算法

省略。

## 18 繰 返 し 法

省略。

## 19 最大雇傭問題を複勾配法で解いた例

省略。