提携形ゲームのいくつかの解と
その縮小ゲームによる一貫性

社会情報学科　行　方　常　幸

目　　次

1．はじめに……………………………………………………25
2．線形でETPを満たす解…………………………………26
3．縮小ゲームによる一貫性………………………………28
4．数 値 例…………………………………………………32
5．終わりに…………………………………………………32
6．補　　遺…………………………………………………33
参考文献…………………………………………………35

1．は じ め に

提携形ゲームとは複数人が集まって得た利益を，その部分提携の評価値を考慮して，公平に分けるにはどうすべきか？の問に答えようとしたものである。得られた利益の分け方（解）として，種々の観点から様々な解が提唱されている。その中に線形でETP（Equal Treatment Property）という性質を満たす解の集合がある。本稿ではこの中の3つの解に関する縮小ゲームによる一貫性について考察する。これらの縮小ゲームは複数個の項の凸結合であり，確率的解釈が可能である。これら3つの解は従来考察されてきた解である最小二乗準仁，シャープレイ値，ニュー値と関連している。

2．線形で ETP を満たす解

複数の参加者が集まって利益を生む状況を想定する。参加者（プレイヤーと呼ぶ）の集合を $N := \{1,\ldots,n\}$ とおく。N の部分集合を提携と呼ぶ。提携 $S(\subset N)$ のメンバーが集まって得ることができる利益を $v(S)$ で表し，提携 S の提携値と呼ぶ。N の部分集合から実数へのこの関数 $v: 2^N \to \Re$ を特性関数と呼ぶ。ただし，$v(\emptyset)=0$ とする。プレイヤーの集合 N と特性関数 v の組 (N,v) を提携形ゲーム[1)]と呼ぶ。すべての提携形ゲーム集合を G とおく。全体提携 N によって得られる利益 $v(N)$ を，部分提携 S の提携値 $\{v(S) | S\subset N\}$ を利用して，N のメンバーになるべく公平に分けることが，提携形ゲーム (N,v) の１つの目的である。

提携形ゲームの１点解とは提携形ゲームの集合 G からプレイヤーへの分け方への関数 $f: G \to \Re^n$ で次の条件を満たすものである：

$$f(N,v) = \left(f_1(N,v),\ldots, f_n(N,v)\right)$$
$$\sum_{j\in N} f_j(N,v) = v(N)$$

１点解は値とも呼ばれる。線形性と ETP（Equal Treatment Property）は次のように定義される。

線形性：G 上の解 f は次を満たすとき線形である，といわれる。

すべての $(N,v),(N,w)\in G$ に対して，$f(N,v+w) = f(N,v)+f(N,w)$ である。ただし，$(v+w)(S) = v(S)+w(S)$ である。

ETP ：G 上の解 f は次を満たすとき ETP を満たす，といわれる。

$v(S\cup\{i\} = v(S\cup\{j\})\ (\forall S\subset N-\{i,j\})$ を満たす $(N,v)\in G$ に対して，

1）譲渡可能効用を扱うので，正確には，譲渡可能効用を持つ提携形ゲームと呼ばれる。

$f_i(N,v) = f_j(N,v)$ である。

線形でETPを満たす解（値）は次に示すように表現される。

補題：（Ruiz *et al.* 1998） G 上の解 f が線形でETPを満たす必要かつ十分条件は重み $m=(m_{n,s})_{n=2,\ldots;s=1,\ldots n-1}$ が存在し，f が次のように表現されることである。

$$f_j(N,v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{\substack{S:j\in S\subset N\\ S\neq N}} m_{n,s}\, v(S) - \sum_{\substack{S:S\subset N\\ S\neq \emptyset,N}} \frac{s}{n}\, m_{n,s}\, v(S)$$

ただし，$s=|S|$，すなわち，提携 S のプレイヤーの人数である。

この表現を利用して，最小二乗準仁，シャープレイ値，ニュー値が次のように定義される。

$m_{n,s} = \dfrac{1}{2^{n-2}}$ $(n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$ ならば，最小二乗準仁である。

$m_{n,s} = \dfrac{1}{n-s}\begin{pmatrix} n-1 \\ s-1 \end{pmatrix}^{-1}(n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$ ならば，シャープレイ値である。

$m_{n,s} = \dfrac{2s}{n(n-s)}\begin{pmatrix} n-1 \\ s-1 \end{pmatrix}^{-1}(n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$ ならば，ニュー値である。

これらと関連する本稿で扱う解を定義する。関連していることを示すため「擬」をつけることにする。

重み $m_{n,s} = \dfrac{1}{(n-1)\,2^{n-2}}$ $(n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$ を持つ解を，擬最小二乗準仁と呼ぶことにする。

重み $m_{n,s} = \dfrac{1}{(n-1)(n-s)}\begin{pmatrix} n-1 \\ s-1 \end{pmatrix}^{-1}(n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$ を持つ解を，擬シャープレイ値と呼ぶことにする。

重み $m_{n,s}=\dfrac{2s}{n(n-1)(n-s)}\begin{pmatrix}n-1\\ s-1\end{pmatrix}^{-1}(n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$ を持つ解を，擬ニュー値と呼ぶことにする。

これらは元の解の重みを $\dfrac{1}{n-1}$ 倍して得られた重みを持つ解である。

3．縮小ゲームによる一貫性

元のゲーム (N,v) $(|N|\geq 3)$ と利得ベクトル $x\in\Re^n$ が与えられた時，縮小ゲーム $(N-\{i\},v^x)$ $(v^x:2^{N-\{i\}}\to\Re)$ を定義する。ただし，$v^x(\emptyset)=0, v^x(N-\{i\})=v(N)-x_i$ である。

G 上の解 f に対して，縮小ゲームの部分提携の提携値 $v^x(S)$ $(S\subset N-\{i\}, S\neq\emptyset, N-\{i\})$ を適切に定義して，

$$f_j(N,v)=f_j(N-\{i\},v^{f(N,v)})\ (\forall j\in N-\{i\})$$

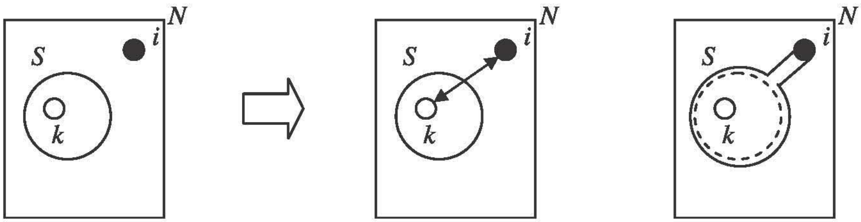
となるようにしたい。すなわち，元のゲーム (N,v) において解 f により配分された利得 $f_i(N,v)$ を持って１人のプレイヤー i が退出し，縮小ゲーム $(N-\{i\},v^{f(N,v)})$ ができる。退出しなかったプレイヤー j に対して，解 f により配分される元のゲームにおける利得 $f_j(N,v)$ が縮小ゲームにおける利得 $f_j(N-\{i\},v^{f(N,v)})$ と一致することを要求するのが，縮小ゲームによる一貫性である。

縮小ゲームによる一貫性を満たせば，部分と全体を同じように扱うことを意味するので，望ましい解と解釈される。また，解の差異を縮小ゲームの違いで表す試みである。

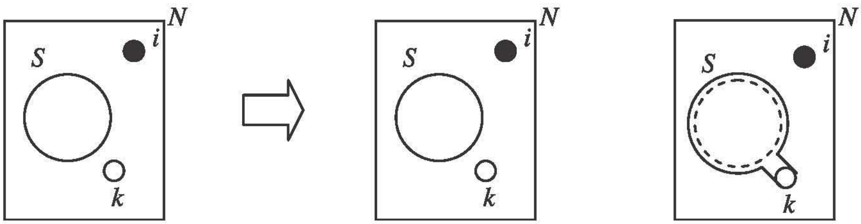
次のような形の縮小ゲームを考察する。

$$
\begin{aligned}
v^x(S) := &\frac{1}{n-1}\, p_{n,s} \sum_{k\in S} \Big[v(S\cup\{i\}-\{k\}) - x_i \Big] \\
&+ \frac{s}{n-1}\,(1-p_{n,s})\,\Big[v(S\cup\{i\}) - x_i \Big] \\
&+ \frac{n-s-1}{n-1}\, p_{n,s}\, v(S) + \frac{1}{n-1}\,(1-p_{n,s}) \sum_{k\in N-S\cup\{i\}} v(S\cup\{k\})
\end{aligned}
\tag{Red}
$$

ただし，$0 \leq p_{n,s} \leq 1$ である。これは複数個の項からなる凸結合で，次のような確率的解釈が可能である。



確率 $\frac{s}{n-1}$ で　　(1) 確率 $p_{n,s}$ で　　(2) 確率 $1-p_{n,s}$ で



確率 $\frac{n-s-1}{n-1}$ で　　(1) 確率 $p_{n,s}$ で　　(2) 確率 $1-p_{n,s}$ で

縮小ゲームの意味：縮小ゲーム $(N-\{i\}, v^x)$ において提携 $S\subset N-\{i\}$ は使者を通じてプレイヤー i に利得 x_i を与える代わりに，ゲームに留まって貰おうする。使者（プレイヤー k とする）はプレイヤー i 以外の $n-1$人からランダムに（すなわち，確率 $\frac{1}{n-1}$ で）選ばれる。また，プレイヤー i を留まらせようとする時に，(1)確率 $p_{n,s}$ で提携の人数を変えることはできない，または，

(2)確率 $1-p_{n,s}$ で提携の人数を1人増やすことができる，の2つの可能性がある。

使者であるプレイヤー k が提携 S に属す場合（上図の上方を参照），使者が提携 S のメンバーなので提携 S の意向に積極的に従い，プレイヤー i の説得に成功する。従って，(1)提携の人数を増やすことができない場合，プレイヤー i に留まってもらう代わりにプレイヤー k に退出してもらい，提携 $S\cup\{i\}-\{k\}$ を形成し，その結果として提携 S に $v(S\cup\{i\}-\{k\})-x_i$ の利得が残る。(2)提携の人数を1人増やすことができる場合，提携 $S\cup\{i\}$ を形成することができ，その結果として提携 S に $v(S\cup\{i\})-x_i$ の利得が残る。

使者であるプレイヤー k が提携 S に属さない場合（上図の下方を参照），使者が提携 S のメンバーではないので提携 S の意向に従う気がなく，プレイヤー i の説得に失敗し，自分自身が提携に参加することを希望する。従って，(1)提携の人数を増やすことができない場合，提携 S の利得は $v(S)$ のままである。(2)提携の人数を1人増やすことができる場合，提携 $S\cup\{k\}$ が形成され，その結果として提携 S に $v(S\cup\{k\})$ の利得が残る。

提携 S が得る利得の期待値を計算すれば上記の（Red）が得られる。

$p_{n,s}$ として次の3つの場合を考察する：(i)　$p_{n,s}=\frac{1}{2}$，(ii)　$p_{n,s}=\frac{n-s-1}{n-1}$，(iii)　$p_{n,s}=\frac{n-s-1}{n}$。これらは次のように解釈される。上述の(1)提携の人数を変えることはできない，または，(2)提携の人数を1人増やすことができる，を決定するために，使者とは独立に（$N-\{i\}$ または N から）1人のプレイヤーが選ばれる。選ばれたプレイヤーが等確率で(1)または(2)を選ぶ場合が(i)である。選ばれた人が提携 S に属さなければ(1)を選び，提携 S に属せば(2)を選ぶ場合が(ii)と(iii)である。(ii)ではプレイヤー i は考慮の対象外である。(iii)ではプレイヤー i も考慮の対象に含まれ，プレイヤー i が選ばれた場合は(2)を選ぶ。

(i)の場合が擬最小二乗準仁，(ii)の場合が擬シャープレイ値，(iii)の場合が擬ニュー値に対する縮小ゲームである。

さらに，2人ゲームにおける標準性を次のように定義する。

2人ゲームにおける標準性：G 上の解 f は次を満たす時，2人ゲームにおける標準性を満たす，といわれる。

$$f(\{i,j\},v)=\left(v(\{i\})+\frac{v(\{i,j\})-v(\{i\})-v(\{j\})}{2},\ v(\{j\})+\frac{v(\{i,j\})-v(\{i\})-v(\{j\})}{2}\right)$$

次の定理が成り立つ：

定理：（証明は補遺を参照。）

(1) 擬最小二乗準仁は2人ゲームにおける標準性を満たし，$p_{n,s}=\dfrac{1}{2}$ である（Red）で与えられた縮小ゲームに対して縮小ゲームによる一貫性を満たす唯一の解である。

(2) 擬シャープレイ値は2人ゲームにおける標準性を満たし，$p_{n,s}=\dfrac{n-s-1}{n-1}$ である（Red）で与えられた縮小ゲームに対して縮小ゲームによる一貫性を満たす唯一の解である。

(3) 擬ニュー値は2人ゲームにおける標準性を満たし，$p_{n,s}=\dfrac{n-s-1}{n}$ である（Red）で与えられた縮小ゲームに対して縮小ゲームによる一貫性を満たす唯一の解である。

命題：（証明は補遺を参照。）

擬最小二乗準仁，擬シャープレイ値，擬ニュー値は次に示すように元の値と全体提携値の均等割りの凸結合である。ただし，f で元の値，f^* で擬値を示す。

$$f_i{}^*(N,v)=\frac{n-2}{n-1}\frac{v(N)}{n}+\frac{1}{n-1}f_i(N,v)\ (\forall i\in N).$$

この命題より $f_i{}^*(N,v)-f_j{}^*(N,v)=\dfrac{1}{n-1}(f_i(N,v)-f_j(N,v))\ (\forall i\in N)$. となり，擬値では元の値よりもプレイヤー間の配分の（大小関係は変わらないが）差が小さく $\left(\dfrac{1}{n-1}\text{倍に}\right)$ なる。

4．数　値　例

次の4人ゲームを考察する。

$v(3) = v(13) = 10,\ v(4) = v(14) = 20,$

$v(23) = v(123) = 15,\ v(24) = v(124) = 25,$

$v(34) = v(134) = v(234) = v(1234) = 30,$

$v(S) = 0$ for other $S(\subset \{1,2,3,4\})$.

各値を求めると次の表のようになる。

	プレイヤー1	プレイヤー2	プレイヤー3	プレイヤー4
最小二乗準仁	-0.63	1.88	9.38	19.38
シャープレイ	0	1.67	9.17	19.16
ニュー値	4.86	5.42	8.19	11.53
擬最小二乗準仁	4.79	5.63	8.13	11.46
擬シャープレイ値	5.00	5.56	8.06	11.39
擬ニュー値	6.62	6.81	7.73	8.84

プレイヤー1，2，3，4の順に配分量が多くなる。しかしその差は，命題の後で述べたように，元の値よりも擬値の方が小さい。

例えば，このゲームの縮小ゲームの評価として(ii) $p_{n,s} = \dfrac{n-s-1}{n-1}$ のケースが妥当と判断できるならば，擬シャープレイ値を解として採用すれば良い。

5．終わりに

縮小ゲームによる一貫性に関する従来の研究では,「先に考察する解があり，その後その解が縮小ゲームによる一貫性を満たすように縮小ゲームを構成する。」という方向であった。本稿ではこの方向を逆にし，確率的解釈が可能である縮小ゲームを与え，その縮小ゲームによる一貫性を満たす解を求めた。(Red) で与えられる縮小ゲームは本稿で述べたような確率的解釈が可能であ

り，この縮小ゲームに対して一貫性を満たすのが，擬最小二乗準仁，擬シャープレイ値，擬ニュー値であった。これらの擬値は，従来注目されていなかった。貧富の差がだんだん広がり，そのために社会不安が増大する現代において，元の値よりもプレイヤー間の格差を小さくする擬値は意味のある解と思われる。

6．補　　遺

定理と命題の証明を行う。

定理：

Namekata & Driessen の Lemma 7, 8, 9 より，

$$\begin{cases} m_{n,1} = m_{n-1,1}\dfrac{n-2}{n-1}p_{n,1}, \\[2ex] m_{n,s} = m_{n-1,s}\dfrac{n-s-1}{n-1}p_{n,s} + m_{n-1,s-1}\dfrac{s-1}{n-1}(1-p_{n,s-1}) \text{ for } s=2,\ldots,n-2, \\[2ex] m_{n,n-1} = m_{n-1,n-2}\dfrac{n-2}{n-1}(1-p_{n,n-2}). \end{cases}$$

が成り立つことを示せばよい。代入して右辺を計算し，左辺に等しくなることを示す。

(1)　$m_{n,s} = \dfrac{1}{(n-1)2^{n-2}}$ $(n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$，$p_{n,s} = \dfrac{1}{2}$ を代入すると，

$$m_{n-1,1}\frac{n-2}{n-1}p_{n,1} = \frac{1}{(n-2)2^{n-3}}\frac{n-2}{n-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{(n-1)2^{n-2}} = m_{n,1}$$

$$m_{n-1,s}\frac{n-s-1}{n-1}p_{n,s} + m_{n-1,s-1}\frac{s-1}{n-1}(1-p_{n,s-1})$$

$$=\frac{1}{n-2}\frac{1}{2^{n-3}}\frac{n-s-1}{n-1}\frac{1}{2} + \frac{1}{n-2}\frac{1}{2^{n-3}}\frac{s-1}{n-1}\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{n-1}\frac{1}{2^{n-2}} = m_{n,s}$$

$$m_{n-1,n-2}\frac{n-2}{n-1}(1-p_{n,n-2})=\frac{1}{(n-2)2^{n-3}}\frac{n-2}{n-1}\frac{1}{2}=\frac{1}{(n-1)2^{n-2}}=m_{n,n-1}$$

となる。

(2) $m_{n,s}=\dfrac{1}{(n-1)(n-s)}\dbinom{n-1}{s-1}^{-1}(n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$, $p_{n,s}=\dfrac{n-s-1}{n-1}$

を代入すると,

$$m_{n-1,1}\frac{n-2}{n-1}p_{n,1}=\frac{1}{(n-2)^2}\binom{n-2}{0}^{-1}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2=\frac{1}{(n-1)^2}=m_{n,1}$$

$$m_{n-1,s}\frac{n-s-1}{n-1}p_{n,s}+m_{n-1,s-1}\frac{s-1}{n-1}(1-p_{n,s-1})$$

$$=\frac{1}{(n-2)(n-s-1)}\binom{n-2}{s-1}^{-1}\left(\frac{n-s-1}{n-1}\right)^2$$

$$+\frac{1}{(n-2)(n-s)}\binom{n-2}{s-2}^{-1}\left(\frac{s-1}{n-1}\right)^2$$

$$=\frac{1}{(n-1)(n-s)}\binom{n-1}{s-1}^{-1}=m_{n,s}$$

$$m_{n-1,n-2}\frac{n-2}{n-1}(1-p_{n,n-2})=\frac{1}{(n-2)}\binom{n-2}{n-3}^{-1}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2$$

$$=\frac{1}{(n-1)^2}=m_{n,n-1}$$

となる。

(3) $m_{n,s}=\dfrac{2s}{n(n-1)(n-s)}\dbinom{n-1}{s-1}^{-1}(n=2,\ldots;s=1,\ldots,n-1)$, $p_{n,s}=\dfrac{n-s-1}{n}$

を代入すると,

$$m_{n-1,1}\frac{n-2}{n-1}p_{n,1}=\frac{2}{(n-1)(n-2)^2}\binom{n-2}{0}^{-1}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-2}{n}$$

$$=\frac{2}{n(n-1)^2}=m_{n,1}$$

$$m_{n-1,s}\frac{n-s-1}{n-1}p_{n,s}+m_{n-1,s-1}\frac{s-1}{n-1}(1-p_{n,s-1})$$

$$=\frac{2s}{(n-1)(n-2)(n-s-1)}\binom{n-2}{s-1}^{-1}\frac{n-s-1}{n-1}\frac{n-s-1}{n}$$

$$+\frac{2(s-1)^2}{(n-1)(n-2)(n-s)}\binom{n-2}{s-2}^{-1}\frac{s}{n(n-1)}$$

$$=\frac{2s}{n(n-1)(n-s)}\binom{n-1}{s-1}^{-1}=m_{n,s}$$

$$m_{n-1,n-2}\frac{n-2}{n-1}(1-p_{n,n-2})=\frac{2(n-2)}{(n-1)(n-2)}\binom{n-2}{n-3}^{-1}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-1}{n}$$

$$=\frac{2}{n(n-1)}=m_{n,n-1}$$

となる。

命題：

元の値の重み m を，擬値の重みを m^*とおくと，$m^*_{n,s}=\frac{1}{n-1}m_{n,s}$ であった。

これより，

$$f_i{}^*(N,v)=\frac{v(N)}{n}+\sum_{\substack{S:i\in S\subset N\\ S\neq N}}m^*_{n,s}v(S)-\sum_{\substack{S:S\subset N\\ S\neq\emptyset,N}}\frac{s}{n}m^*_{n,s}v(S)$$

$$=\frac{n-2}{n-1}\frac{v(N)}{n}+\frac{1}{n-1}\left[\frac{v(N)}{n}+\sum_{\substack{S:i\in S\subset N\\ S\neq N}}m_{n,s}v(S)-\sum_{\substack{S:S\subset N\\ S\neq\emptyset,N}}\frac{s}{n}m_{n,s}v(S)\right]$$

$$=\frac{n-2}{n-1}\frac{v(N)}{n}+\frac{1}{n-1}f_i(N,v).$$

となる。

参 考 文 献

Namekata, T. and Driessen, T. S. H. Reduced Game Property of Linear Values with Equal Treatment Property. In “Operations Research/Management Science At Work”, Kluwer Academic Publishers 2002; 317-332

Ruiz, L. M., Valenciano, F. and Zarzuelo, J. M. The Least Square Prenucleolus and the Least Square Nucleolus. Two Values for TU Games Based on the Excess Vector. International Journal of Game Theory 1996; 25: 113-134

Ruiz, L. M., Valenciano, F. and Zarzuelo, J. M. The Family of Least Square Values

for Transferable Utility Games. Games and Economic Behavior 1998; 24: 109-130
行方常幸「ニュー値（提携形ゲームの解）の確率的解釈について」小樽商科大学『商学討究』（2005）第56巻第2・3合併号：33-40
行方常幸「団結値（提携形ゲームの解）の縮小ゲームによる一貫性について」小樽商科大学『商学討究』（2006）第57巻第2・3合併号：25-32