限界代替率概念による消費者均衡理論

古　瀬　大　六

目　　次

序

総ての科学は，その取扱う諸概念の間主観的 (inter-subjektiv)[1] 妥当性の拡大と共に進歩し，その操作性[2]の増大と共に実用化の道を進むことが出来たのである。

物理学に於ける力・温度等，現在の吾々が最も客観的であると信じている諸概念すらも，嘗ては筋肉の内部知覚・皮膚の温度感覚等の最も主観的な概念と同一視され，それを測定したり物理的にコントロールすることが出来なかつたという事実を忘れてはならない。

これが，客観的・操作的・可測的概念に迄進化する為には，一つの飛躍が必要であつた。則ち，内省心理学的世界像から，物理学的世界像への飛躍が[3]。心理学自身もまた此の例外をなすものではない。内省心理学から行動心理学へ，行動心理学から大脳生理学への発展は正に此の線に沿うものに外ならないのである。主観的効用概念から出発しようとする19世紀の主観価値学派経済理論の進んで来た道も亦，遅れ馳せ乍ら同様の経過を辿りつゝあるものの如くである[4]。

初期の主観価値説を採る人々は多く内省心理学的概念である効用・満足に対してそのまゝ可測性を賦与しようとした。本来，内省心理学的世界像は，物理学的世界像と同様に，その時間性・空間性を持つてはいるけれども，その時間性なり空間性なりは単に大小相等的・順序数的・集合論的或はトポロギー的であるだけであつて，決して可測的・則ち全実数との1対1の対応をつけることは不可能である[6]。

世紀の初頭に入るや，先づ第一にパレートが，効用指標函数を採用すること

（註 1） カルナップ「普遍科学としての物理学」（「綜合科学」第1巻第10, 11, 12号）
（註 2） Bridgman, P. W.: The Logic of Modem Physics, 1928.
（註 3） 古瀬大六「世界像の進化」（「ヘルメス」第26号）
（註 4） Samuelson, P. A.: Foundatins of Eeonomic Analysis, 1948.（「経済学に於ける業績は明かにベンサム，シジュウィック，エッヂワース等が与えた功利主義的・倫理的・厚生的色彩の排除に向つて進んで来ている」頁90。）
（註 5） Jevons: The Theory of Political Economy, 1871.
（註 6） ポアンカレ「科学の価値」

によつて此の難点を回避しようとした。これは確かに経済学の科学性を高める上に於て一つのコペルニクス的転廻ではあつたけれども，然し，それは飽くまでも難点の「回避」であつて，決してその「解決」ではなかつたのである。

その故にこそ，フィッシャー，フリッシュ等の効用測定法に関する論文が未だに学界にその生命を保つてをり，新しい測定法の提案が未だに跡を断たないのである。効用概念を排して限界代替率という可測的数値を以て此に代えようとするヒックスに於てすら，効用の可測性の問題は，これを有効に「回避」し得るけれども，何等の方法でこれを測定せんとする試みを否定する論拠はない，と主張している有様である。(7)

斯様な態度は科学一般の発展傾向に反抗するものであり，科学方法論の最近の成果に眼を覆わんとするものである。他の諸科学の実例に徴しても明かな如く，総ての内省心理的現象は本質的に非可測的であつて，それに可測性を与えることは，そのまゝでは絶対に不可能であり，その内省心理的現象に対応する物理的世界像を操作的に規定し論理的に構成するという手続きを必ず必要とするのである。

経済学に於ける所謂効用なる概念は勿論内省心理学的概念であつて，従つて本質的に非可測的なのである。故に，之を数学的に取扱おうとする時は，その変域を実数全体に取ることは誤りであり，単なる順序数として，則ち所謂選択指標としてしか扱へない。此の様に，効用を選択指標として順序数的に表現するときは，それに就ての実数的四則演算は勿論成立しない。従つて，その微分値たる限界効用は，その正負は判定し得てもその量的規定は不可能であり，その弾力性に至つては符号の判定すら不可能となる。此の様にルーズな非量的な概念を他の量的な諸概念と共に符号的表現を与えて，其れ等の間に可測的演算を行わせることは極めて危険であつて，出来る限り之を避けなくてはならない。

右の意味に於て，ヒックスが選択指標概念に代えて限界代替率概念を使用しようとする態度は正しい。然し彼はその態度をその数学註の中では徹底させて居らず，相変らず選択指標函数を使つている。私の此の論文の第1の目標は，その表題にも明かな如く，選択指標函数を全然使わずに限界代替率函数だけを

（註 7） Hicks: Value and Capital, p. 18.

使用して同一の解に到達しようとすることに在る。

但しヒックスの意図にも拘わらず，選択指標函数の果す役割の総てを限界代替率函数をして行わしめることは，実は不可能なのである。限界代替率函数は個々の無差別曲面を規定する丈であつて，二つの異つた無差別曲面上の2点の中何れが選択されるかを定める事は出来ない。則ち，均衡条件の決定には限界代替率函数丈けで充分であるけれども，安定条件の場合はそうは行かないのである。然し特に選択指標を問題としなければならぬのは議論の極く僅かな部分に於てであつて，之を特に何等かの記号を以て表現する必要は認められない。

斯様な試みは，過去に於て組立てられた理論の単なる純粋化，という言わば非常に消極的な試みと見られるかも知れない。然し，これこそ現在の効用可測論者の誤れる方向を是正し，可測性への真の道を切開くための有力なステップ•ボードとなるであろう。真の可測性は言う迄もなく' 大脳生理学の中に之を求めなければならないのであるが，これは，斯学が漸く発展の緒口に着いた許りの現在では，未だ困難であり，将来の発展を期待して貸すに若干の年月を以てしなければならないであろう。

第1章　限界代替率

第1節　限界代替率の定義

ヒックスによれば，X財のY財に対する限界代替率とは，X財の最終の1単位を失うことによつて生ずる損失を丁度補償するに足るY財の量[(1)]である。従つて，これは二つの物理量の比であるから，完全な無次元量であつて，効用次元は全然含まれない[(2)]。故に，効用可測性の問題に煩わされる心配は，これによつて全く無くなるであろらう。

扨，市場に現れる総ての財の種類を n とすれば，その中の任意の1財を基準財とすることにより，其他の $(n-1)$ 財の限界代替率を，此の基準財に対する限界代替率として表わすことが出来る。以下便宜上 x_1 財を基準財に取る。之により他の $(n-1)$ 財に就ての $(n-1)$ 個の限界代替率が定まる。若し x_1 財

(註 1)　Hicks: Value and Capital, p.20.
(註 2)　Do., p.20.

以外の財を基準に取りたいならば，此の $(n-1)$ 個の限界代替率を適当に組合せることによつてその目的を達することが出来る。例えば x_r 財に対する x_s 財の限界代替率は，「x_1 財に対する x_s 財の限界代替率」の「x_1 財に対する x_r 財の限界代替率」に対する比，として表わされる。

此等の x_1 財を基準とする $(n-1)$ 個の限界代替率を，その比較財の番号に従つて，

$$S_2,\ S_3,\ \cdots\cdots\cdots,\ S_n$$

で表わすことにする。その具体的な値は，勿論人により又時によつて異るけれども，以下に於ては特定人の特定時点に於ける場合だけを考える。同一人の同一時点の同一財の限界代替率であつても，その値は，他の総ての財の購入量によつても亦影響されるものであることは，吾々の日常経験するところである。右の関係を数学的に表現するならば，S_r は $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ の函数である，ということに外ならず，従つて次の様な表現を与えることが出来る。

$$\begin{cases} S_2 = S_2(x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_n) \\ S_3 = S_3(x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_n = S_n(x_1, x_2,\cdots\cdots,\ x_n) \end{cases} \qquad (1.1)$$

此の函数表示に於て，当該消費者の財の取得をプラス，提供をマイナスで表わすならば，定義により S_r は $\varDelta x_1$ の提供に対する $\varDelta x_r$ の無差別的取得の比の極限値に外ならず，従つてその値は必ず負である。

$$S_r = lim\ \frac{\varDelta x_r}{\varDelta x_1} = \frac{dx_r}{dx_1} < 0 \qquad (1.2)$$

第2節　限界代替率と限界効用の関係

所で，限界代替率と限界効用とは如何なる関係に在るであろうか。前節の限界代替率の定義を厳密に書き直すならば「他の総ての財の購入量を一定に保つ場合の，x_1 財と x_r 財とに関する無差別曲線の方向係数」である。[(1)] 同じことを効用指標函数を用いて表わすならば，x_1, x_r の微分を夫々 dx_1, dx_r として，

$$du = u_1\,dx_1 + u_r\,dx_r = 0$$

$$\therefore\quad \frac{dx_r}{dx_1} = -\frac{u_1}{u_r} \qquad (1.3)$$

（註 1）　Hicks: Value and Capital, p.20.

となる。然るに (1.2) により，左辺は S_r に外ならないから，

$$S_r = -u_1 / u_r \qquad (1.4)$$

則ち，x_r 財の限界代替率 S_r は，x_1 の限界効用の，x_r の限界効用に対する比の負数，に等しい。そうだとするならば，$-u_1 / u_r$ を S_r と書き換えてみても，それは何等の新しい事実に就ての知識を与えるものではなく，単なるトートロジーであつて全くの無駄骨折ではないか，という疑問が発生するかも知れない。

だが，事実は決してそうではない。$-u_1 / u_r$ の物語る所は確かに S_r のそれよりも豊富である。然しこの一見豊富に見える部分の知識は全く操作性を欠いているのである。従つて，S_r を $-u_1 / u_r$ のまゝの形で取扱い，推論過程に於て斯様な限界効用函数を陽表的に露出させたまゝにして置くことは，多くの経済学者達をして，それが恰も何か主観的効用の可測量的表現であるかの如く誤解せしめる危険が極めて大である。殊に，此の (1.4) の分数形式の分母を払つて二つの限界効用の間の関係を操作的に求めようとする誘惑に打克つことは，老練な学者と雖も困難を感ずるであろう。

多くの限界効用可測動者の誤謬の根本原因は実に此の1点に存するのである。ヒックスが効用指標函数の使用を避けて限界代替率函数を使用する理由として「誤つた推論に導く聯想を伴う危険を避ける為に[(2)]」云々，と言つているのも，此の辺の事情を物語るものであろう。限界代替率をいくら実測してみたところで，限界効用或はその弾力性の可測量的値を知ることは出来ない。此の点に就ては，以下節を改めて更に徹底的に之を論じて置く必要を認める。

第3節　限界代替率の次元解析

先ず，限界効用可測論者の1人，フリッシュの限界効用測定論を取り上げてみよう。彼の New Method の要点は次の如くである[(1)]。

則ち，彼は，均衡状態に於ては $u_r / u_1 = p_r / p_1$ であることに着目して，先ず p_r / p_1 則ち x_r 財の限界代替率を実測し，更にそれが物価変動につれて如何に変動するかを統計的に測定してみて，若しその全変化過程を通じて x_1 財

(註 2)　Wo., p.20.
(註 1)　Frisch, R.: New Methods of Measuring Marginal Utility, Tübingen, 1932.

の均衡購入量が不変一定であるならば，u_1 の値も常数として取扱えるから，従つて u_r の変化率は p_r/p_1 の変化率に比例することとなり，此の p_r/p_1 の変化率を知ることによつて x_r 財の限界効用 u_r の変化率或はその弾力性を間接的に測定することが出来る，と言うのである。

更にこれから4年後に現れた彼の Flexibility Method(2) に於ても，x_1 財の代りに，食糧という1群の財を使用している丈けで，右の根本的な点に就ては全く進歩の跡は見られない。又，所謂 deflation factor を導入したのは良いが，折角の結論を出す時になると $\check{P}=0$ という仮定を持込むことによつ，て結局何の為に daflation factor を持込んだのか訳が分らない結果となつてしまつている。

斯様な所謂エッヂワース的独立財概念の使用は，経験科学としての経済学に於ては禁止されなくてはならない。則ち，独立財の仮定が成立つ為には，各財の効用が其の財の購入量のみの函数であつて，決して同時に取得される他の諸財の購入量によつて影響されないことを経験的に証明しなければならない。それは果して可能であろうか？答えは明白に否である。何故ならば，経験的に測定出来るのは二財の限界代替率，或は限界効用の比のみであり，此の比が他の諸財の取得量によつて全く影響されないことが経験的に証明されたとしても，その場合に於ても其の二財の夫々の限界効用が他の諸財の購入量の変化に伴つて同一割合で変化しているかも知れず，而もそれが果して変化したか否かを確認するに足る経験的手懸りが全く存在しないからである。則ち，効用が可測的であると仮定してみても，その測定手段が全く存在しないのであるから，それは経験的には全く無意味な仮定である。斯様な，初めから heuristisch でないことの分つている仮設を導入することは経験科学としては為すべからざることである。

経済学上の推論に際しては効用の可測性は決して必要な前提ではないことに初めて気附いたのはパレートであつたが，その態度は幾分不徹底であつて，その或る著書の中では，独立財・競争財・補完財に関するエッヂワース的定義を

（註2） Frisch, R.: The Problem of Index Numbers, 1936. (Econometrica, Vol.4, No.1.)

採用して,[3] 一財の限界效用が他の諸財の購入量の変化につれて変化するかどうかという問題が,裕も何等かの経験的意味 (経験的 designatum) を有するかの如く取扱つている。これは,彼が,效用可測性の問題は之を有効に回避し得ると考えた丈で,積極的にその非可測性を主張したのではない,という事実に相応するものではなかろうか。ヒックスと雖も此の点に就てはパレートを少しも出ていないのである。

著名な現代経済学者達の態度が斯の如くであるので,本節に於ては,限界代替率と限界效用とは全く無関係であるということを徹底的に証明して置く必要を痛感する。扨,限界效用の定義により,

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, u_2, \cdots, x_n) - u(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\Delta x_1} \\
u_r &= \lim_{\Delta x_r \leftarrow 0} \frac{u(x_1, \cdots, x_r + \Delta x_r, \cdots, x_n) - u(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\Delta x_r}
\end{aligned}
\qquad (1.4)
$$

上の u_r は之をテイラー展開することにより下の如く変形される。x_1, x_r 以外の総ての財の購入量は不変であるから,便宜上これを除いて記せば,

$$
\begin{aligned}
& u(x_1 + \Delta x_1, x_r + \Delta x_r) - u(x_1 + \Delta x_1, x_r) \\
&= u(x_1, x_r + \Delta x_r) + u_1(x_1, x_r + \Delta_r)\Delta x_1 + u_{11}(x_1, x_r + \Delta x_r)\Delta x_1^2 / 2! + \cdots \\
&\quad - u(x_1, x_r) - u_1(x_1, x_r)\Delta x_1 - u_{11}(x_1, x_r)\Delta x_1^2 / 2! - \cdots\cdots \\
&= u(x_1, x_r) + u_r(x_1, x_r)\Delta x_r + u_{rr}(x_1, x_r)\Delta x_r^2 / 2! + \cdots\cdots \\
&\quad + u_1(x_1, x_r)\Delta x_1 + u_{1r}(x_1, x_r)\Delta x_1 \Delta x_r + u_{1rr}(x_1, x_2)\Delta x_1 \Delta x_r^2 / 2! + \cdots\cdots \\
&\quad + u_{11}(x_1, x_r)\Delta x_1^2 / 2! + u_{11r} \Delta x_1^2 \Delta x_r / 2! + \cdots\cdots \\
&\quad + \cdots\cdots \\
&\quad - u(x_1, x_r) - u_1(x_1, x_r)\Delta x_1 - u_{11}(x_1, x_r)\Delta x_1^2 / 2! - \cdots\cdots \\
&= u_r(x_1, x_r)\Delta x_r + u_{rr}(x_1, x_r)\Delta x_r^2 / 2! + \cdots\cdots \\
&\quad + u_{1r}(x_1, x_r)\Delta x_1 \Delta x_r + u_{1rr}(x_1, x_r)\Delta x_1 \Delta x_r^2 / 2 + \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

(註 3) Zawozki: Les Mathématiques appliquées á l' EconomiePolittque. (寺尾琢磨訳,頁152)。

(補註) フリッシュの Flexibility Method は,表面的にはエッヂワース的独立財の仮定に無関係の如くであるが,その代償として如何に厳密な非現実な制約を附加しなければならぬか,に就ては Samuekon: Foundations of Economic Analysis, 1948, p.177. を見よ。

$$+u_{11r}(x_1,x_r)\overset{2}{\Delta x_1}\Delta x_r/2!+u_{11rr}\overset{2}{\Delta x_1}\overset{2}{\Delta x_r}/(2!)^2+\cdots\cdots$$

$$+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \lim_{\Delta x_1,\Delta x_r\to 0}\frac{u(x_1+\Delta x_1,x_r+\Delta_r)-u(x_1+\Delta x_1,x_r)}{\Delta x_r}$$

$$=\lim_{\Delta x_1,\Delta x_r\to 0}\{u_r(x_1,x_r)+u_{rr}(x_1,x_r)\Delta x_r/2!+u_{r1}\Delta x_1+\cdots\cdots\}$$

$$=u_r(x_1,x_r)$$

$$=\lim_{\Delta x_r\to 0}\frac{u(x_1,x_r+\Delta_r)-u(x_1,x_r)}{\Delta x_r}\qquad(1.5)$$

この結果を (1.4) に代入すれば，

$$\begin{cases} u_1=\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\dfrac{u(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)-u(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\Delta x_1} \\ u_r=\lim\limits_{\Delta x_1,\Delta x_r\to 0}\dfrac{u(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_r+\Delta x_r,\cdots,x_n)}{\Delta x_r} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\underline{-u(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)} \end{cases}\qquad(1.6)$$

扨，Δx_1 と Δ_r とが同一無差別曲面上の変位を表わすものとすれば，則ち購入組合せ点 $(x_1, x_2,\cdots, x_n)$ と他の購入組合せ点 $(x_1+\Delta x_1, x_2,\cdots, x_r+\Delta x_r, \cdots, x_n)$ とが同一無差別曲面上に在るものとすれば，

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_r+\Delta x_r,\cdots,x_n)\quad(1.7)$$

であるから，これを (1.6) に代入すれば，

$$\begin{cases} u_1=\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\dfrac{u(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)-u(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\Delta x_1} \\ u_r=\lim\limits_{\Delta x_1,\Delta x_r\to 0}\dfrac{u(x_1,x_2,\cdots,x_n)-u(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\Delta x_r} \end{cases}\qquad(1.8)$$

両者の比を取れば，

$$\frac{u_1}{u_r}=\lim_{\Delta x_1,\Delta x_r\to 0}\frac{\Delta x_r}{\Delta x_1}\times\frac{-u(x_1,x_2,\cdots,x_n)+u(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)}{u(x_1,x_2,\cdots,x_n)-u(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

$$=\lim_{\Delta x_1,\Delta x_r\to 0}\frac{-\Delta x_r}{\Delta x_1}$$

$$=-S_r$$

$$\therefore\quad S_r=-\frac{u_1}{u_r}$$

となり，二つの限界効用の比の中に最初は含まれているかに見えた効用函数は完全にその姿を消してしまうのである。

限界代替率 S_r の値は，外見上如何にも二財の限界効用の比を表わすものの如くでありながら，その実は無差別曲線の傾斜以上の何物をも表現するものではない。比を取る操作自体が実は効用函数を脱落させる操作に外ならない。これを逆に言えば，限界代替率 S_r 自身は確かに可測的であるが，その分母子に同一値（但し符号は反対）を乗ずることによつてそれが裕も2財の限界効用の比であるかの如く見せかけることが出来るのである。而もこのことは，乗ぜられる函数が可測的効用函数であると或は又非可測的選択指標函数であるとを問わず，成立ち得るのである。従つて，限界代替率 S_r の大きさが実測されても，それに対応する限界効用の大きさは全く恣意的であり，限界効用の任意の大きさに対して上記の関係は完全に成立するのである。故に限界代替率を数学的に如何に分析して見た所で，限界効用或はその弾力性を可測的数値として把えることは根本的に不可能なことなのである。

第4節　選択指標函数の追放

玆に於て筆者は彼の有名なエルランゲン・プログラムを想起するのである。数学者クラインは幾何学を定義して「幾何学とは変換に対して不変な関係を論ずるものである」としたのであるが，此の例に倣うならば「経済学とは効用函数の単調増加変換に対して不変な性質を論ずるものである」とすることも出来よう。ヒックスがその「価値と資本」の数学註に於て「効用函数をたとい使用するにしても，吾々は唯効用函数の任意変換に於て不変な性質だけを扱う[(1)]」と述べているのも，その意味する所は同一であろう。

その様な無駄の効用函数ならば，ヒックスは何故それを彼の著書の数学註の中からも追放してしまわなかつたのであろうか？　その第一の理由は，前世紀以来使い慣れて来た効用函数への執着によるものであつて，同時に又，得られた結論の一つ一つに就て効用函数の単調増加変換を行つてみて，その値が変らないことを確かめて置きさえすれば差支ないではないか，という考方に基いている。斯様なやり方が如何に危険なものであるか，に就ては既に詳しく論じて置いたから，改めて述べる必要を認めない。

（註1）Hicks: Value and Capital, p.307.

第二の理由は，効用の可測性は証明出来ないとしても，それを選択指標と考えるならば，そこに大小相等関係が成立し，それに対して或る種の経済的意味を持たせることが出来るのであるから，効用函数は追放出来ても，選択指標函数の使用を回避することは出来ないという点である。だが果して効用或は選択指標の大小相等関係が与えられなければ消費者均衡の成立を説明し得ないであろうか？

以下の各章に展開される如く，その必要は極めて狭い領域に限定されて居り，限界代替率函数のみを以て論じ得る範囲は非常に広いのである。

第2章　静態的均衡条件

第1節　効用函数による均衡条件

前章に於て吾々が使用した経済諸量は，各財の購入量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ と，その函数である限界代替率 $S_2, S_3, \cdots\cdots, S_n$ とだけであつたが，本章では更に各財の価格 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ 並に所得 E を追加する。

静態的消費者均衡理論なるものは，結局此等諸量の間の均衡・安定に関する関係に外ならない。従つて以上の諸量の中，何を変数とするかによつて，得られる関係式は勿論種々の形態を取り得るのであつて，本章ではその中最も簡単で且つ最もありふれた場合である所得 E 一定，価格 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 一定，購入量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 可変の場合だけを扱う。此の場合の均衡条件は，効用函数を使用する場合には，

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = E$$

なる条件の下に，総効用 u の極大条件を求めることによつて，周知の如く，

$$\begin{cases} \sum p_i x_i = E \\ \dfrac{u_1}{p_1} = \dfrac{u_2}{p_2} = \cdots = \dfrac{u_n}{p_n} \end{cases} \tag{2.1}$$

である。自変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の数と，右の聯立方程式の数とは何れも n 個であるから，これによつて均衡購入量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を $p_1, p_2, \cdots, p_n$，E の函数として一義的に決定することが出来る。

これは則ち，拡張された限界効用均等法則に外ならないのであるが，その経済的意味は　通常左の如く解釈されている。則ち，E なる一定所得を有する一消費者は，各財の購入に振向けられた貨幣量の最終1単位の与える効用が全部均等になる点で支出を止めるであろう，と。その当人の内省心理学的立場から見るならば，則ち，自分が自分自身の経済行為を観察する場合ならば，右の命題は，その限りに於て或る種の妥当性を持つかも知れないが，然し第三者が之を観測することによつて之を客観的に確めることは全く不可能である。則ち，右の定理は間主観的妥当性を持たない。

経済学が単なる思考の遊戯の閾を脱して，厳密な経験科学として進歩して行く為には，その対象が間主観的妥当性と操作性とを持つこと，則ち誰が之を測定しても，同一条件の下に在つては同一の測定値を得られること，が不可欠の条件となる。

現代心理学が，内省心理学から次第に行動心理学に移行しつゝあるのも，右の如き方法論的意味を持つものであり，経済学と雖もまた，此の進路を外れることは出来ないであろう。

第2節　限界代替率による均衡条件

そこで，(2.1) の均衡条件を客観化する為に，その中から効用次元を除去しなければならない。従つて，それは次の様に書き改められる。

$$\begin{cases} \sum p_i x_i = E \\ \dfrac{u_1}{u_r} = \dfrac{p_1}{p_r} \quad (r=2,3,\cdots, n) \end{cases}$$

然るに前章に述べた通り，同一購入組合せ点に於ては $u_1 / u_r = - S_r$ であるから，

$$\begin{cases} \sum p_i x_i = E \\ S_r = -\dfrac{p_1}{p_r} \quad (r=2,3,\cdots, n \end{cases} \qquad (2,2)$$

となる。

斯く操作的に書き改められた均衡条件式の中には最早如何なる非可測的函数も含まれてはいない。(2.1) を (2.2) の形に書き改めることは決して単なる論理的潔癖症だけからではない。それは(2.1) の中の効用函数が，効用の大きさ

に就て何事かを物語るかの如くに見えても，それは単なる見せ掛けだけのことであつて，それから任意のヴェールを剝ぎ取つた (2.2) の形が物語る以上の何事をも物語るものではない，ということを明白にし，それに伴う誤解・誤謬を防止する，という具体的効果を持つのである。

斯くして可測的に書き改められた均衡条件則ちヒックスの所謂「限界代替率均等法則」を求めるに際して，その推論の途中に於て効用函数或は選択指標函数を使用することは，効用函数追放の趣旨に反するものである。従つて，吾々は，最初から此等の非可測的函数を使わずに．限界代替率函数だけから出発すべきである。

効用指標函数を使用する場合は，所得一定の束縛条件の下に，効用或は選択指標極大条件を求めた。今回は．購入組合せ点が常に同一無差別曲面上を移動することを条件として，所得或は支出金額 E の極小条件を求めればよい。

無差別曲面の次元数は財の数 n よりも一つだけ少いから，同一無差別曲面上の移動の自由度は $(n-1)$ である。従つて，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の中の任意の $(n-1)$ 個の値が定まれば，残りの1個は，其等の従属変数として一義的に定まつてしまう。本節では $x_2, x_3, \cdots, x_n$ を自変，x_1 数を其等の従属変数と考えて，所得 E の極値条件を求めれば，

$$\sum p_i x_i = E$$

を，$x_2, x_3, \cdots, x_n$ で偏微分して，

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + p_i = 0 \qquad (i=2,3,\cdots,n) \qquad (2.3)$$

然るに $\partial x_1 / \partial x_1$ は同一無差別曲線上の移動量 Δx_1, Δx_i の比であり，且つ x_1 と x_i 以外の財の購入量は不変に保たれるのであるから，それは，前章の定義により，$1/S_i$ に等しい。そこで．(2.3) にこの関係を代入すれば，

$$p_1 / S_i + p_i = 0 \qquad (i=2,3,\cdots\ n)$$

これを纏めれば，

$$\begin{cases} \sum p_i x_i = E \\ S_i = -p_1 / p_i \qquad (i=2,3,\cdots,n) \end{cases} \qquad (2.4)$$

となり，結局 (2.2) と全く同じ結果に到達する。右の推論過程に於ては，効用

函数或は選択指標函数は全く使用されず，単に限界代替率函数が与えられて居りさえすれば充分である。

第3節 均衡状態に於ける諸関係式

静態的消費者均衡条件式 (2.4) の方程式の数は n 個であるから，$p_1, p_2, \cdots, p_n$; $x_1, x_2, \cdots, x_n$; E の $(2n+1)$ 個の文字の中，任意の n 個を常数と置けば，残りの $(2n+1)-n=n+1$ 個の変数の中，$(n-1)$ 個の変数が消去されて変数は2個だけとなり，その2個の変数の間の均衡状態下に於ける関係式を一義的に確定することが出来る。

則ち，右の $(2n+1)$ 個の文字の中，任意の1個を取つてそれを自変数とし，残りの $2n$ 個の文字の中任意の n 個を常数とすれば，更にその残りの n 個の従属変数の中の任意の $(n-1)$ 個は聯立方程式 (2.4) を解くことにより消去されて，その結果，唯1個の従属変数が残される。従つて，$(2n+1)$ 個の文字の中，任意の2個の文字が均衡状態に於て互に如何なる関係に立つかを一義的に確定するには，残りの $(2n-1)$ 個の文字の中任意の n 個を常数とすればよい。$(2n+1)$ 個の文字の中から任意の2個を取出す取出し方は $(2n+1)\cdot 2n/2!$ 種類あり，更に残りの $(2n-1)$ 個の文字の中から任意の n 個を取出す方法は $(2n-1)\cdot(2n-2)\cdots\cdots(n+1)\cdot n/n!$ 種であるから，商品の種類を僅か3種に限定しても，その関係式の数は実に210種にも達するであろう。然し，その中で，均衡購入量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を常数に取ることは，純理論的には考えることが出来ても，現実の経済現象としては極めて稀な場合であるから，之を除外するならば，左の如き三つの種類に大別することが出来るであろう。

(1) 総ての価格を常数とする場合

(i) 任意の2財の均衡購入量 x_r, x_s の間の関係 dx_s/dx_r を一義的に確定することが出来る。これは所謂支出拡張線の方向係数に外ならない。

(ii) 任意の1財の均衡購入量 x_r と所得 E との間の関係 dx_r/dE を確定することが出来る（所得効果，エンゲル函数）。

(2) 任意の1価格 p_r を除いた総ての価格と所得 E とを常数とする場合

(i) 価格 p_r の変化と，任意の1財の均衡購入量 x_s の変化との間の関係 dx_s/dp_r を確定することが出来る（スルツキー基本方程式）。

（ii） 任意の2商品 x_i, x_j の間の関係式 dx_j / dx_i を確定することが出来る。これは価格拡張線の方向係数に外ならない。

次の第4章に於ては(1)の場合を取扱い，更に第5章に於ては(2)の問題を取扱うであろう。

(2.4) の均衡条件式は，n 個の束縛条件を与えるものであるが，更に，右の場合には常数として扱つた文字の一部或は全部を，他の $(n+1)$ 個の変数の従属変数たらしめる様な，特殊な束縛条件を考えることが出来る。これにも亦，無数の場合が理論的には考えられるのであるが，その中で最も現実的な場合は，次の二つに限定されるであろう。

(1) （i） 総ての価格変化が時を示すパラメーター t の函数として表わされるならば，その中の任意の価格 p_r だけを自変数とみて，他の総ての価格は p_r の従属変数として表わすことが出来，従つて，常数は $(n-1)$ 個を減じて僅かに1個に減少する。残りの $(n+1)$ 個の文字の中任意の一つの文字を常数にとれば，他の総ての変数の間の関係は一義的に確定する。この常数を E とするならば，名目所得一定の消費者が総ての価格の変化によつて其の各財の均衡購入量を如何に変えて行くか，を一義的に確定することが出来る。又 E の代りに任意の1財の均衡購入量 x_r を常数にとるならば，所謂等量法（Isoquant Method）の場合を取扱うことが出来る。

（ii） 総ての価格変化と所謂変化とがパラメーター t の函数として表示されるならば，その中の任意の一つを自変数に取ることにより，他の n 個はそれの従属変数となるから，常数は n 個を減じて零とすることが出来る。之により，所得水準と価格水準との変化が各財の均衡購入量に如何なる影響を与えるか，を確定することが出来る。

(2) （i） 総ての均衡購入量の変化を t の函数として与えることが出来るならば，一定所得 E の下で，此等の変化する総ての購入量が常に均衡的である為には，各財の価格を如何に調整すべきか，を知ることが出来る。

（ii） 総ての均衡購入量と所得 E とが t の函数として与えられるならば，此等の変化する購入量が同時に変化する所得 E の下に於て常に均衡購入量であらしめる為には，価格を如何に調整すべきかを知ることができる。

此等の問題に対する解答は，パラメーターを含まない前の場合の解から極めて容易に之を求めることが出来るので，夫々の場合に於て補足的に述べることにする。然し後者の場合の方が，その現実性と実用性とに於て，前者より遙かに優れている。殊に後者の(2)の場合は，計画経済国家が日々に直面する極めて現実的な問題の解答なのである。

但し，右の場合，t を含むということは，決して静態から動態への転化を意味するものではなく，所謂比較静態学的取扱をなしているに過ぎず，之に更に，適応に要する時間，物価と所得の変化に対する予想の問題等を附加することによつて初めて，完全に現実的な消費者均衡理論に到達し得るものであることを附け加えて置かねばならない。

第3章　静態的安定条件

第1節　効用函数による安定条件

静態的消費者均衡の安定条件は，効用函数又は選択指標函数を用いる場合には，周知の如く，$d^2u<0$則ち，

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \cdots\cdots u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \cdots\cdots u_{1n} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \cdots\cdots u_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ u_n & u_{n1} & u_{n2} \cdots\cdots u_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3.1)$$

の行列式が左から交互に正・負の値を取ること，である。

単なる数学上の問題としては勿論これでよいであろう。然し吾々経済学者がその経済的意味に著目してこれを眺めようとするときは，それが一体何を意味しているのか，さつぱり分らない。如何に複雑な数式を並べてみた所で，それから得られる経済的意味は，u が極大なら安定，極小なら不安定，という判り切つたこと丈けであつて，(3.1) の式は吾々に何等の新しい知識をも与えては呉れないのである。則ち，(3.1) の各行列式の元素である u_1, u_2,…, u_n に就てはその符号が正であることだけしか分らず，その具体的数値を実測することは不可能である。まして u_{11}, u_{12},…, u_{nn} に至つてはその正負の判別すら出

来ないのであるから，(3.1) の行列式の各元素の値を測つて式の正負を判定することなどは思いもよらない。

栗村雄吉氏がノリスの「消費者需要の理論」を引用して，「ヒックスの見解は余りに形式的であり過ぎて，経済的意味の追求に欠ける所があるとの非難が高いようである」(1) として居られるのも，此の辺の事情を物語るものであろう。

第2節　限界代替率による安定条件（I）

そこで吾々としては，上述の如き效用極大条件による安定条件論を棄てゝ，その代りに可測的な限界代替率による安定条件を考えなければならない。前章に於て吾々は所得の極限値を求めることによつて均衡条件式を導いたのであるが，これに対する安定条件は，従つて，所得 E の極小条件を求めることによつて得られるであろう。無差別的な多くの購入組合せが与えられた場合，総ての消費者がその中で最も貨幣支出の少い点で安定するであろうことは，吾々の日常経験に照して自明のことである。

そこで，同一無差別曲面上の移動に於ける貨幣支出 E の極小条件，則ち $d^2E>0$ が成立する為の条件を求めると，$x_2, x_3, \cdots, x_n$ を自変数，x_1 をそれらの従属変数と見て，

$$E_{22},\quad \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix},\cdots\cdots,\quad \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} & \cdots\cdots & E_{2n} \\ E_{32} & E_{33} & \cdots\cdots & E_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{n2} & E_{n3} & \cdots\cdots & E_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3.2)$$

が悉く正値を取ることを要する。玆に E は x_i，x_j の変化に対して連続であるから $E_{ij}=E_{ji}$ が成立し，従つて右の様な対称的形式に書くことが出来る。

扨 (3. 2) の行列式群が如何なる経済的意味を持つているかを検討しなければならないのであるが，それには (3. 2) の儘の形では不便であるので，これを交代行列式 (Reciprocal Determinant) の定理によつて変形すれば，右端の $(n-1)$ 次の行列式を $\mathfrak{D}$ とし，その E_{rr} に関する余因子を $\mathfrak{D}_{rr}$ で表わすこととして，

(註 1) 栗村雄吉，古谷弘「近代理論経済学の発展動向」(エコノミスト25周年記念特集号，13頁)。

$$\mathfrak{d}>0;\ \mathfrak{d}_{rr}>0 \qquad (r=2,3,\cdots,\ n-1) \qquad (3.3)$$

とすることが出来る。その証明は次の通りである。(3.2) の行列式の各々を $D_2,\ D_3,\cdots,\ D_n$ と略記すれば，交代行列式の定理により，

$$D_n=\frac{\begin{vmatrix}\mathfrak{d}_{n-1,\,n-1} & \mathfrak{d}_{n,\,n-1}\\ \mathfrak{d}_{n,\,n-1} & \mathfrak{d}_{n,\,n}\end{vmatrix}}{D_{n-2}}$$ （$\mathfrak{d}$は対称形なる故 $\mathfrak{d}_{n-1,\,n}=\mathfrak{d}_{n,\,n-1}$）

が成立する。然るに安定条件は $D_n,\ D_{n-2}$ 何れもプラスであることを意味するから，右式の分子の行列式もまたプラスでなくてはならない。故に

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{d}_{n-1,\,n-1} & \mathfrak{d}_{n,\,n-1}\\ \mathfrak{d}_{n,\,n-1} & \mathfrak{d}_{n,\,n}\end{vmatrix}=\mathfrak{d}_{n,\,n}\,\mathfrak{d}_{n-1,\,n-1}-\mathfrak{d}^2_{n,\,n-1}>0$$

然るに $(\mathfrak{d}_{n,\,n-1})^2$ は必らずプラスであるから，$\mathfrak{d}_{n,\,n}\times\mathfrak{d}_{n-1,\,n-1}$ も又プラスでなければならない。所で $\mathfrak{d}_{n,\,n}$ は D_{n-1} に外ならず，従つてこれも又安定均衡に於てはプラスの値を取るから，$\mathfrak{d}_{n-1,n-1}$ も従つてプラスでなければならない。

更に又，

$$D_n^2=\frac{\begin{vmatrix}\mathfrak{d}_{n-2,n-2} & \mathfrak{d}_{n-2,n-1} & \mathfrak{d}_{n-2,n}\\ \mathfrak{d}_{n-2,n-1} & \mathfrak{d}_{n-1,n-1} & \mathfrak{d}_{n-1,n}\\ \mathfrak{d}_{n-2,n} & \mathfrak{d}_{n-1,n} & \mathfrak{d}_{n,n}\end{vmatrix}}{D_{n-3}}>0$$

が成立ち，$D_n^2>0,\ D_{n-3}>0$ であるから分子の行列式も正である。この分子の行列式の，$(i,\ k)$ 元素の余因子を $\mathcal{E}_{ik}$ で表わせば，

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{d}_{n-2,n-2} & \mathfrak{d}_{n-2,n-1} & \mathfrak{d}_{n-2,n}\\ \mathfrak{d}_{n-2,n-1} & \mathfrak{d}_{n-1,n-1} & \mathfrak{d}_{n-1,n}\\ \mathfrak{d}_{n-2,n} & \mathfrak{d}_{n-1,n} & \mathfrak{d}_{n,n}\end{vmatrix}=\frac{\begin{vmatrix}\mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12}\\ \mathcal{E}_{12} & \mathcal{E}_{22}\end{vmatrix}}{\mathfrak{d}_{nn}}=\frac{\mathcal{E}_{11}\mathcal{E}_{22}-\mathcal{E}_{12}^2}{D_{n-1}}>0$$

然るに，

$$\mathcal{E}_{11}=\begin{vmatrix}\mathfrak{d}_{n-1,n-1} & \mathfrak{d}_{n-1,n}\\ \mathfrak{d}_{n-1,n} & \mathfrak{d}_{n,n}\end{vmatrix}>0$$

なることは証明済みであり且つ $D_{n-1}>0,\ (\mathcal{E}_{12})^2>0$ であるから，残つた $\mathcal{E}_{22}$

もまた正である。故に，

$$\mathcal{E}_{22}=\begin{vmatrix} \mathfrak{D}_{n-2,n-2} & \mathfrak{D}_{n-2,n} \\ \mathfrak{D}_{n-2,n} & \mathfrak{D}_{n,n} \end{vmatrix}=\mathfrak{D}_{nn}\mathfrak{D}_{n-2,n-2}-\mathfrak{D}^2_{n-2,2}>0$$

然るに $\mathfrak{D}_{nn}=D_{n-1}>0$，$(\mathfrak{D}_{n-2,n})^2>0$ であるから，従つて $\mathfrak{D}_{n-2,n-2}$ もまた正でなくてはならない。

以上の証明過程を繰返えすことにより一般に $\mathfrak{D}_{rr}>0$ $(r=2,3,\cdots,n)$ なることが証明されるのである。逆に $\mathfrak{D}_{rr}$，$\mathfrak{D}>0$ が成立つときは，これから (3.2) の関係を導くことが出来るから，今後は (3.2) の代りに (3.3) を使用することにする。

第3節　限界代替率による安定条件（Ⅱ）

上記の (3.2) の各元素を，x_1 は x_2, $x_3,\cdots$, x_n の従属変数であり，且つ購入組合せ点 $(x_1, x_2,\cdots x_n)$ は必ず同一無差別曲面上に在るという束縛条件に着目して変形すれば，

$$E_i=p_1\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+p_i=p_1/S_i+p_i$$

$$\therefore\ E_{ij}=\frac{-p_1(S_{i1}\partial x_1/\partial x_j+S_{ij})}{(S_i)^2}=\frac{-p_1(S_{i1}/S_j+S_{ij})}{(S_i)^2}\qquad(3.4)$$

となるから，これを D_n，則ち $\mathfrak{D}$ の各元素に代入すれば，

$$\begin{vmatrix} E_{22} & E_{23}\cdots E_{2n} \\ E_{32} & E_{33}\cdots E_{3n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ E_{n2} & E_{n3}\cdots E_{nn} \end{vmatrix}=\frac{(p_1)^{n-1}}{(S_2S_3\cdots S_n)_1}\begin{vmatrix} S_{21}/S_2+S_{22} & S_{21}/S_3+S_{23}\cdots S_{21}/S_n+S_{2n} \\ S_{31}/S_2+S_{32} & S_{31}/S_3+S_{33}\cdots S_{31}/S_n+S_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ S_{n1}/S_2+S_{n2} & S_{n1}/S_3+S_{n3}\cdots S_{n1}/S_n+S_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(-p_1{}^{n-.}}{(S_2S_3\cdots S_n)^2}\left\{\frac{1}{S_2}\begin{vmatrix} S_{21} & S_{23}\cdots S_{2n} \\ S_{31} & S_{33}\cdots S_{3n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ S_{n1} & S_{n3}\cdots S_{nn} \end{vmatrix}+\frac{1}{S_3}\begin{vmatrix} S_{22} & S_{21} & S_{24}\cdots S_{2n} \\ S_{32} & S_{31} & S_{34}\cdots S_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ S_{n2} & S_{n1} & S_{n4}\cdots S_{nn} \end{vmatrix}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{S_n}\begin{vmatrix} S_{22} & S_{23}\cdots S_{2,n-1} & S_{21} \\ S_{32} & S_{33}\cdots S_{3,n-1} & S_{31} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ S_{n2} & S_{n3}\cdots S_{n,n-1} & S_{n1} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} S_{22} & S_{23}\cdots S_{2n} \\ S_{32} & S_{33}\cdots S_{3n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ S_{n2} & S_{n3}\cdots S_{nn} \end{vmatrix}\right\}$$

$$
= = \frac{(-p_1)^2}{(S_2 S_3 \cdots S_n)^2} \left\{ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \cdots S_{2n} \\ S_{23} & S_{33} \cdots S_{3n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ S_{n2} & S_{n3} \cdots S_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \frac{1}{S_2} \begin{vmatrix} S_{21} & S_{23} \cdots S_{2n} \\ S_{31} & S_{33} \cdots S_{3n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ S_{n1} & S_{n3} \cdots S_{nn} \end{vmatrix} \right.
$$

$$
+ (-1)^{3+1} \frac{-1}{S_3} \begin{vmatrix} S_{21} & S_{22} & S_{24} \cdots S_{2n} \\ S_{31} & S_{32} & S_{34} \cdots S_{3n} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ S_{n1} & S_{n2} & S_{n4} \cdots S_{nn} \end{vmatrix} + \cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
\left. + (-1)^{n+1} \frac{-1}{S_n} \begin{vmatrix} S_{21} & S_{22} \cdots S_{2,\,n-1} \\ S_{31} & S_{32} \cdots S_{3,\,n-1} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ S_{n1} & S_{n2} \cdots S_{n,n-1} \end{vmatrix} \right\} = \frac{(-p_1)^{n-1}}{(S_2 S_3 \cdots S_n)^2} \begin{vmatrix} 1 & -1/S_2 \cdots -1/S_n \\ S_{21} & S_{22} \cdots\cdots S_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ S_{n1} & S_{n2} \cdots\cdots S_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
\therefore\ \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \cdots E_{2n} \\ E_{23} & E_{33} \cdots E_{3n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ E_{n2} & E_{n3} \cdots E_{nn} \end{vmatrix} = \frac{(-p_1)^{n-1}}{(S_2 S_3 \cdots S_n)^2} \begin{vmatrix} 1 & -1/S_2 \cdots -1/S_n \\ S_{21} & S_{22} \cdots\cdots S_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ S_{n1} & S_{n2} \cdots\cdots S_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.5}
$$

従つて $\mathfrak{D}$ の E_{rr} に関する余因子も又，次の如き限界代替率函数の行列式で表わされる。

$$
\mathfrak{D}_{rr} = \frac{S_r^2 \times (-p_1)^{n-2}}{(S_2 S_3 \cdots S_n)^2} \begin{vmatrix} 1 & -1/S_2 \cdots\cdots & -1/S_{r-1} & 0 & 1-/S_{r-1} \cdots -1/S_n \\ S_{21} & S_{22} \cdots\cdots & S_{2,r-1} & 0 & S_{2,r+1} \cdots S_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ S_{r-1,1} & S_{r-1,2} \cdots & S_{r-1,r-1} & 0 & S_{r-1,r+1} \cdots S_{r-1,n} \\ S_{r1} & S_{r,2} \cdots & S_{r,r-1} & 1 & S_{r,r+1} \cdots S_{rn} \\ S_{r+1,1} & S_{r+1,2} \cdots & S_{r+1,r-1} & 0 & S_{r+1,r+1} \cdots S_{r+1,n} \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ S_{n1} & S_{n2} \cdots & S_{n,r-1} & 0 & S_{n,r+1} \cdots S_{nn} \end{vmatrix}
$$

そこで $\mathfrak{D}$ と $\mathfrak{D}_{rr}$ との比を取れば

$$\frac{\mathfrak{d}_{rr}}{\mathfrak{d}}=\frac{S_r^2}{-p_1}\begin{vmatrix}1 & -1/S_2 & \cdots & -1/S_{r-1} & 0 & -1/S_{r+1} & \cdots & -1/S_n\\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2,r-1} & 0 & S_{2,r+1} & \cdots & S_{2n}\\ \cdots & & & & & & & \cdots\\ S_{r1} & S_{r2} & \cdots & S_{r,r-1} & 1 & S_{r,r+1} & \cdots & S_{rn}\\ \cdots & & & & & & & \cdots\\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{n,r-1} & 0 & S_{n,r+1} & \cdots & S_{nn}\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}1 & -1/S_2 & \cdots & -/1S_n\\ S_{2} & S_{2} & \cdots & S_{2n}\\ \cdots & & & \cdots\\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn}\end{vmatrix}$$

この様な同型の二つの行列式の比は，必ず何等かの聯立方程式の解である。此の場合は，それは，(2.4) の静態的均衡条件の聯立方程式を，p_r 以外の総ての価格一定，購入組合せ点の同一無差別曲線上の移動という束縛条件の下に p_r で微分することによつて求められる $-dx_r/dp_r$ の値に外ならない。則ち，

$$S_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=-p_1/p_i \qquad (i=2,3,\cdots,n)$$

を上記の条件の下に p_r で微分すれば，

$$\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dp_r}+-1/S_2\frac{dx_2}{dp_r}+\cdots\cdots+-1/S_n\frac{dx_n}{dp_r}=0\\ &S_{21}\frac{dx_1}{dp_r}+S_{22}\frac{dx_2}{dp_r}+\cdots\cdots+S_{2n}\frac{dx_n}{dx_r}=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &S_{r1}\frac{dx_1}{dp_r}+S_{r2}\frac{dx_2}{dp_r}+\cdots\cdots+S_{rn}\frac{dx_n}{dp_r}=p_1/p_r^2=S_r^2/p_1\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &S_{n1}\frac{dx_1}{dp_r}+S_{n1}\frac{dx_2}{dp_r}+\cdots\cdots+S_{nn}\frac{dx_n}{dx_r}=0\end{aligned}\qquad (3.3)$$

となる。この第一式は $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ が同一無差別曲面上の変位であることを示している。これから dx_r/dp_r を求めれば，

$$\frac{dx_r}{dp_r}=\frac{(S_r)^2}{p_1}\begin{vmatrix}1 & -1/S_2 & \cdots & -1/S_{r-1} & 0 & -1/S_{r+1} & \cdots & -1/S_n\\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2,r-1} & 0 & S_{2,r+1} & \cdots & S_{2n}\\ \cdots & & & & & & & \cdots\\ S_{r1} & S_{r2} & \cdots & S_{r,r-1} & 1 & S_{r,r+1} & \cdots & S_{r-n}\\ \cdots & & & & & & & \cdots\\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{n,r-1} & 0 & S_{n,r+1} & \cdots & S_{nn}\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}1 & -1/S_2 & \cdots & -1/S_n\\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n}\\ \cdots & & & \cdots\\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn}\end{vmatrix}$$

(3.9)

この右辺は(3.7)の右辺と全く同型であり，唯符号が異る丈であるから，

$$\frac{\mathfrak{D}_{rr}}{\mathfrak{D}} = -\frac{dx_r}{dp_r} = -\frac{dS_r}{dp_r} \times \frac{dx_r}{dS_r} \qquad (3.10)$$

此の様に dS_r を分母子に乗じてもその値は変らず，且つ p_1 一定という条件の下では r 財の限界代替率 S_r は p_r だけの函数であるから dS_r/dp_r と dx_r/dS_r とは何れも一義的に確定される。

所で

$$\frac{dS_r}{dp_r} = \frac{d(-p_1/p_r)}{dp_r} = \frac{p_1}{p_r^2} > 0\ ;\ \mathfrak{D} > 0\ ;\ \mathfrak{D}_{rr} > 0$$

であるから (3.2) の安定条件は次の如く縮約的に表現される。

$$\frac{dx_r}{dS_r} < 0 \qquad (r=2,3,\cdots,\ n) \qquad (3.11)$$

斯様に簡単明瞭な形に書き改められることにより(3.2)の複雑な形では直観的に理解し難かつた所の経済的意味が非常にはつきりとしてくる。(3.11) の安定条件を言葉で言い表わすならば「均衡購入点が同一無差別曲面に沿つて移動する場合，任意の1財の限界代替率 S_r が増加するときはその購入量 x_r は減少し，S_r が減少するときは反対に x_r が増大するならば，その点に於ける均衡は安定である」となるであろう。

第4節 安定条件式の展開

(3.9) の式のの分母，則ち $\mathfrak{D}$ をその第 r 行の総ての元素に就て展開すれば，(3.9) の式の右辺の分母の行列式の (i,k) 元素の余因子を A_{ik} で表わして，

$$\frac{dx_r}{dp_r} \frac{p_1/p_r^2}{S_{r1}\dfrac{A_{r1}}{A_{rr}} + S_{r2}\dfrac{A_{r2}}{A_{rr}} + \cdots\cdots + S_{rn}\dfrac{A_{rn}}{A_{rr}}}$$

所で，A_{ri}/A_{rr} は次の聯立方程式の解である。則ち，

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dx_r} + \text{-}1/S_2\dfrac{dx_2}{dx_r} + \cdots + \text{-}1/S_{r-1}\dfrac{dx_{r-1}}{dx_r} + \text{-}1/S_{r+1}\dfrac{dx_{r+1}}{dx_r} \\ + \cdots\cdots + \text{-}1/S_n\dfrac{dx_n}{dx_r} = 1/S_r \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&S_{21}\frac{dx_1}{dx_r}+S_{22}\frac{dx_2}{dx_r}+\cdots\cdots+S_{2,r-1}\frac{dx_{r-1}}{dx_r}+S_{2,r+1}\frac{dx_{r+1}}{dx_r}+\cdots\\
&\quad\cdots+S_{2n}\frac{dx_n}{dx_r}=-S_{2r}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&S_{r-1,1}\frac{dx_1}{dx_r}+S_{r-1,2}\frac{dx_2}{dx_r}+\cdots\cdots+S_{r-1,r-1}\frac{dx_{r-1}}{dx_r}+S_{r-1,r+1}\frac{dx_{r+1}}{dx_r}+\cdots\\
&\quad\cdots+S_{r-1,n}\frac{dx_n}{dx_r}=-S_{r-1,r}\\
&S_{r+1,1}\frac{dx_1}{dx_r}+S_{r+1,2}\frac{dx_2}{dx_r}+\cdots\cdots+S_{r+1,r-1}\frac{dx_{r-1}}{dx_r}+S_{r+1,r+1}\frac{dx_{r+1}}{dx_r}+\cdots\\
&\quad\cdots+S_{r+1,n}\frac{dx_n}{dx_r}=-S_{r+1,r}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&S_{n1}\frac{dx_1}{dx_r}+S_{n2}\frac{dx_2}{dx_r}+\cdots\cdots+S_{n,r-1}\frac{dx_{r-1}}{dx_r}+S_{n,r+1}\frac{dx_{r+1}}{dx_r}+\cdots\\
&\quad\cdots+S_{nn}\frac{dx_n}{dx_r}=-S_{nr}
\end{aligned}\right.$$

を解けば，

$$dx_i \,/\, dx_r = A_{ri} \,/\, A_{rr} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \tag{3.14}$$

これは，x_r 財の価格 p_r が変化するにつれて均衡購入点が同一無差別曲面上を移動する場合の軌跡（それは一つの空間曲線をなす）の方向係数に外ならない。従つて (3.12) は，

$$\frac{dx_r}{dp_r}=\frac{p_1 \,/\, p_r^2}{\sum_{i-1}^{n} S_{ri}\dfrac{dx_i}{dx_r}} \tag{3.15}$$

と書き改められる。更に dx_i を微分と考えて，

$$\begin{aligned}\frac{dx_r}{dp_r}&=\frac{dS_r}{dp_r}\times\frac{dx_r}{\sum_{i=1}^{n} S_{ri}\;dx_i}\\
&=\frac{dS_r}{dp_r}\times\frac{dx_r}{dS_r}\end{aligned} \tag{3.16}$$

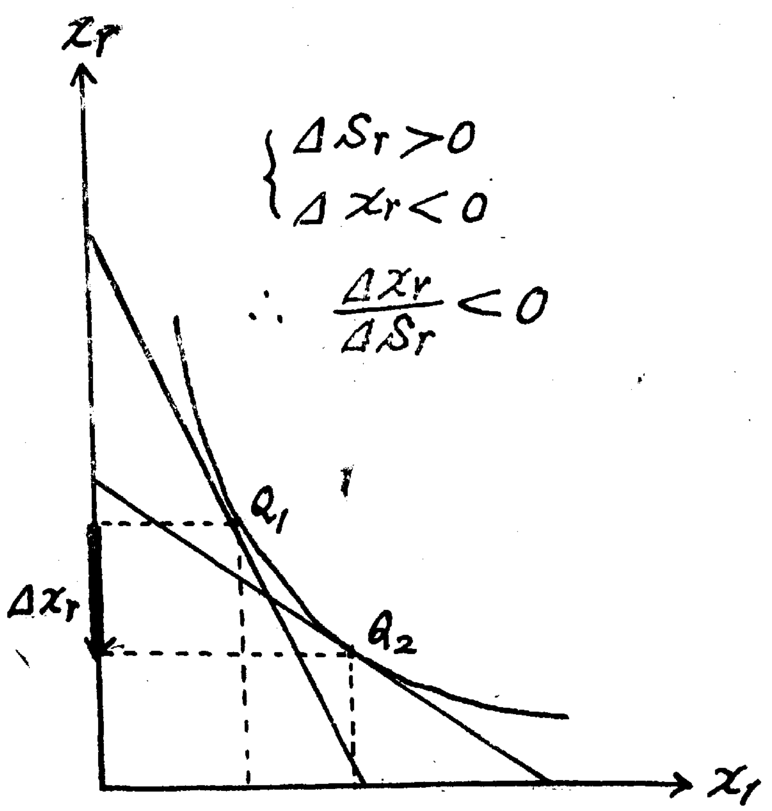
と変形することが出来，(3.10) と一致する。

第５節　安定条件式の幾何学的解釈

上記の安定条件式は，其の幾何学的解釈を考えることによつて，その経済的

意味を，より良く理解することが出来る。

安定条件式（3.11）の幾何学的意味は次の通りである。点 Q_1 を一つの均衡購入点とし，この点から出発して同一無差別曲面上の他の点 Q_2 へ移動する場合，x_r 財の限界代替率だけが変化して，他の財の限界代替率を変えない様にするならば，其の軌跡は一つの空間曲線を描くであろう。此の空間曲線（限界代替率消費曲線と名附ける）を n 次元選択空間内の（x_1, x_r）平面に投映するならば，その曲線が原点に向つて凸であるか凹であるかによつて，次図の如くなるであろう。

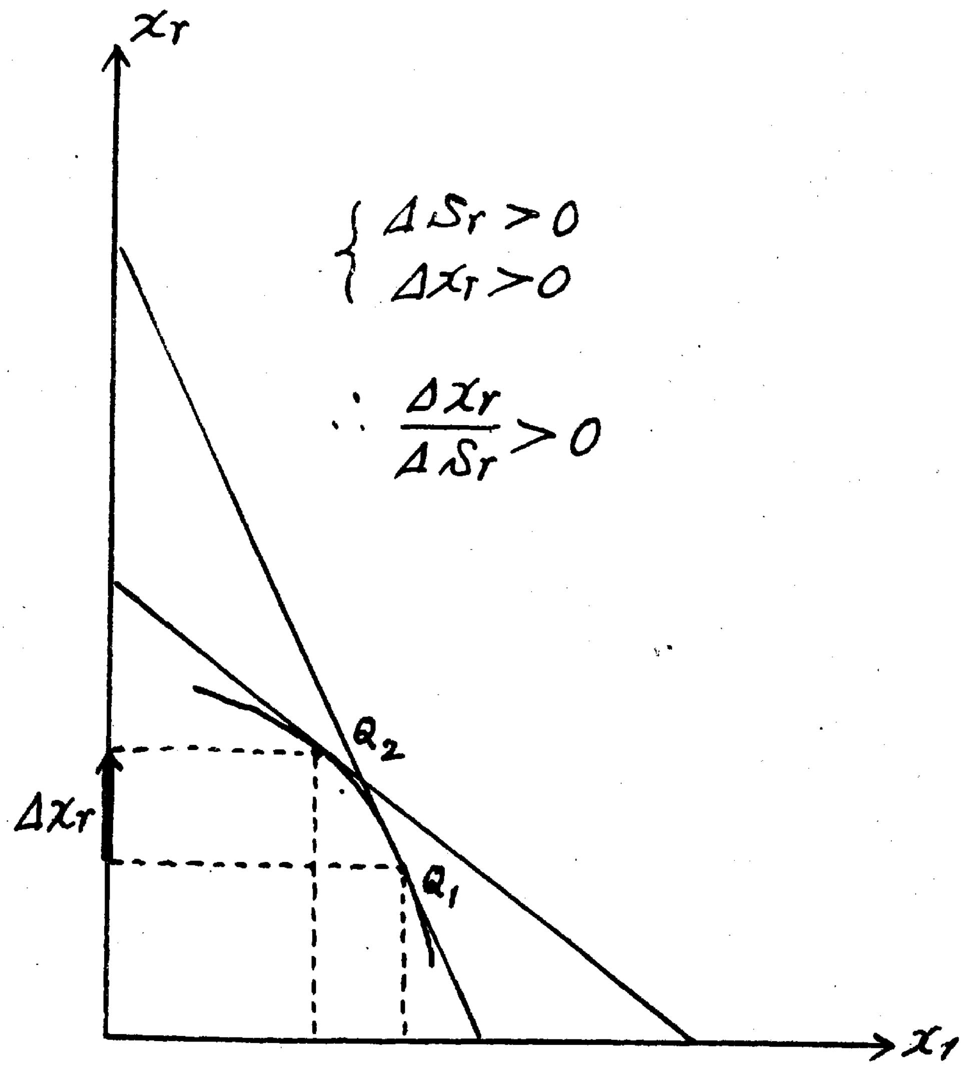


第一図

安定条件(3.11)は第1図の如く，無差別曲線が原点に向つて凸である場合は，成立つけれども，第2図の如く凹なる場合には，成立たない。従つて，安定条件を幾何学的に表現すれば，それは，「無差別曲線が原点に向つて凸であること」である。

これを更に静力学的に表わすならば，無差別曲面を n 次元の皿と考え，原点の側に重力の中心があるものとし，等支出面を水平面と見做すならば，その皿の上を自由に移動する質点は，その皿の最低部で停止する，ということと同義的である。その皿が第1図の如く上向きである場合は，その質点は完全に均衡点で静止し，たとい指で押してその位置を変えたとしても再び元の点へ戻るであろう。然し第2図の如く皿が下向きに置かれている場合にはその上に置かれた質点はその天辺で停止することが出来

たとしても，僅かの外力でも滑り落ちてしまい，更にそれを元の点に引戻す為

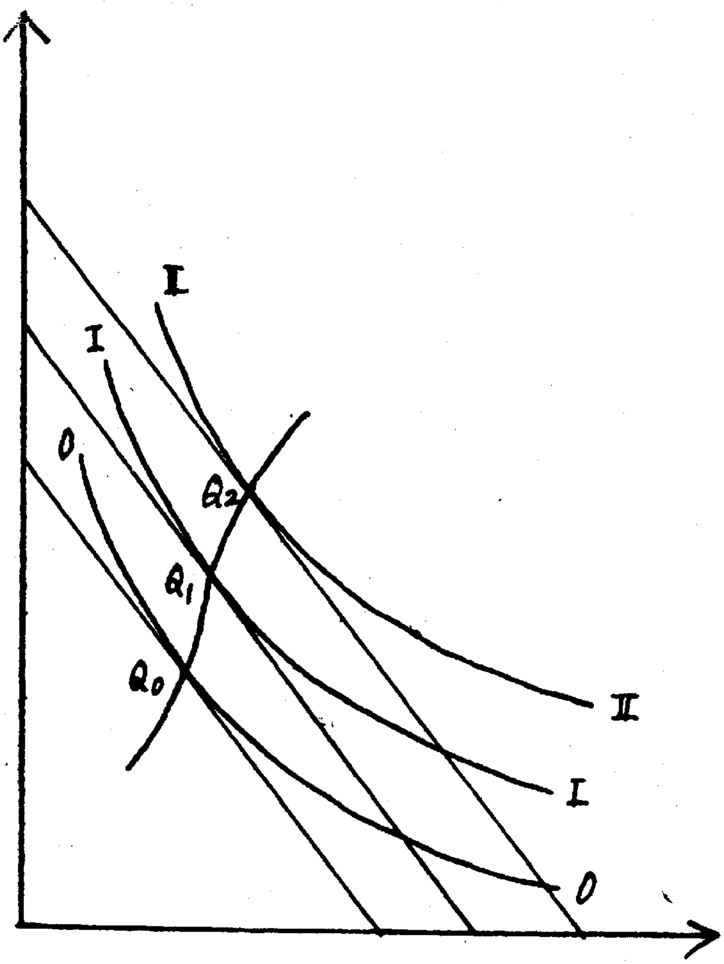


オ二図

の外力が加えられぬ限り，その質点は再び元の均衡点には復帰しないであろう。

以上の論議は総て同一無差別曲面上の移動に就てのみ考えたものであつたから，その推論過程に於ては，限界代替率だけが使用され，選択指標の性質，その単調増加性の有無には全然無関係であつた。然し現実的な均衡過程に於ては，右の様な束縛条件は全然存在しない。

そこで第3図の如く，無差別曲線Ｉが原点に向つて凸であるとしても，これよりも原点に近い側に在る他の一つの無差別曲線０の選択指標の方が若しＩのそれよりも大であるとするならば，同一価格体系の下に於ける０の上の均衡点



オ三図

Q_0 は Q_1 よりも少額の貨幣支出であり乍ら而もより多くの満足を与える結果となり，その消費者は必ず Q_1 点には落着かずに Q_0 点の方に移動するであろう。従つて Q_1 点は必ずしも安定点ではなくなつて終う。

従つて序文に於ても述べた通り，安定条件としては(3.11)だけでは不充分であつて，更に選択指標函数が各財の単調増加函数であることを必要とする。然しこれは単に「財の量はに多いほど好ましい」という極めて自明な人間慾望の本性を示す丈けのものであつて，別に取立てて述べる必要は殆ど認められない。これだけのことをわざわざ面倒な数学的函数で表わすことは，労多くして功少し，というだけでなく，却つて多くの誤謬の源泉となるものであるから，数学的表現は之を避けるべきであろう。

第6節　効用函数行列式と限界代替行列式との換算関係

最後に，効用函数による安定条件と，限界代替率によるそれとが果して同じものであるかどうかを直接的に確めて置こう。行列式の一般的性質，則ち，任意の一行に任意の数を乗じて他の任意の行に加へても，行列式の値は変らない，という性質を利用すれば，次の如き変形が可能である。

$$U=\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \cdots\cdots u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \cdots\cdots u_{1n} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \cdots\cdots u_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n & u_{n1} & u_{n2} \cdots\cdots u_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(u_1)^{n-1}}\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots\cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots & u_{1n} \\ u_1 u_2 & u_1 u_{21} & u_1 u_{22} & \cdots\cdots & u_1 u_{2n} \\ u_1 u_3 & u_1 u_{31} & u_1 u_{32} & \cdots\cdots & u_1 u_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ u_1 u_n & u_1 u_{n1} & u_1 u_{n2} & \cdots\cdots & u_1 u_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(u_1)^{n-1}}\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_1 u_2 - u_2 u_1 & u_1 u_{21} - u_2 u_{11} & u_1 u_{22} - u_2 u_{12} & \cdots & u_1 u_{2n} - u_2 u_{1n} \\ u_1 u_3 - u_3 u_1 & u_1 u_{31} - u_3 u_{11} & u_1 u_{32} - u_3 u_{12} & \cdots & u_1 u_{3n} - u_3 u_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ u_1 u_n - u_n u_1 & u_1 u_{n1} - u_n u_{11} & u_1 u_{n2} - u_n u_{12} & \cdots & u_1 u_{nn} - u_n u_{1n} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(u_1)^{n-1}}\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots\cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots & u_{1n} \\ 0 & u_1 u_{21} - u_2 u_{11} & u_1 u_{22} - u_2 u_{12} & \cdots\cdots & u_1 u_{2n} - u_2 u_{1n} \\ 0 & u_1 u_{31} - u_3 u_{11} & u_1 u_{32} - u_3 u_{12} & \cdots\cdots & u_1 u_{3n} - u_3 u_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & u_1 u_{n1} - u_n u_{11} & u_1 u_{nr} - u_n u_{12} & \cdots\cdots & u_1 u_{nn} - u_n u_{1n} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{-u_1}{(u_1)^{n-1}}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots\cdots & u_n \\ u_1 u_{21} - u_2 u_{11} & u_1 u_{22} - u_2 u_{12} & \cdots\cdots & n_1 u_{2n} - u_2 u_{1n} \\ u_1 u_{31} - u_3 u_{11} & u_1 u_{32} - u_3 u_{12} & \cdots\cdots & u_1 u_{3n} - u_3 u_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ u_1 u_{n1} - u_n u_{11} & u_1 u_{n2} - u_n u_{12} & \cdots\cdots & u_1 u_{nn} - u_u u_{1n} \end{vmatrix}$$

$$
= \frac{-(u_1 u_2 \cdots u_n)^2}{(u_1)^{n-1}} \begin{vmatrix} u_1 / u_1 & u_2 / u_1 & \cdots\cdots & u_n / u_1 \\ \dfrac{u_1 u_{21} - u_2 u_{11}}{(u_2)^2} & \dfrac{u_1 u_{22} - u_2 u_{12}}{(u_2)^2} & \cdots & \dfrac{u_1 u_{2n} - u_2 u_{1n}}{(u_2)^2} \\ \dfrac{u_1 u_{31} - u_3 u_{11}}{(u_3)^2} & \dfrac{u_1 u_{32} - u_3 u_{12}}{(u_3)^2} & \cdots\cdots & \dfrac{u_1 u_{3n} - u_3 u_{1n}}{(u_3)^2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{u_1 u_{n1} - u_n u_{11}}{(u_n)^2} & \dfrac{u_1 u_{n2} - u_n u_{12}}{(u_n)^2} & \cdots\cdots & \dfrac{u_1 u_{nn} - u_n u_{1n}}{(u_n)^2} \end{vmatrix}
$$

然るに定義により，

$$
S_{rs} = \frac{\partial(-u_1 / u_r)}{\partial x_s} = \frac{u_1 u_{r1} - u_r u_{1s}}{(u_2)^2}
$$

であるから，

$$
U = \frac{-(u_1 u_2 \cdots u_n)^2}{(n_1)^{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & -1/S_2 & \cdots\cdots & -1/S_n \\ S_{21} & S_{22} & \cdots\cdots & S_{2n} \\ S_{31} & S_{32} & \cdots\cdots & S_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & & S_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{-(u_1)^{n+1}}{(S_2 S_3 \cdots S_n)^2} \begin{vmatrix} 1 & -1/S_2 & \cdots\cdots & -1/S_n \\ S_{21} & S_{22} & \cdots\cdots & S_{2n} \\ S_{31} & S_{32} & \cdots\cdots & S_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & & S_{nn} \end{vmatrix}
$$

これに (3.5) の関係を代入すれば，

$$
\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \cdots\cdots u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \cdots\cdots u_{1n} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \cdots\cdots u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & u_{n1} & u_{n2} \cdots\cdots u_{nn} \end{vmatrix} = \frac{-(u_1)^{n+1}}{(-p_1)^{n-1}} \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \cdots\cdots E_{2n} \\ E_{32} & E_{33} \cdots\cdots E_{3n} \\ \cdots & \cdots \\ E_{n2} & E_{n3} \cdots\cdots E_{nn} \end{vmatrix}
$$

この関係式を利用して (3.1) の安定条件式を書き直せば，

$$\frac{-(u_1)^3}{(-p_1)^1}E_{22}\;;\;\frac{-(u_1)^4}{(-p_1)^2}\begin{vmatrix}E_{22} & E_{33}\\ E_{32} & E_{33}\end{vmatrix}\;;\cdots\cdots;\;\frac{-(u_1)^{n+1}}{(-p_1)^{n-1}}\begin{vmatrix}E_{22} & E_{23}\cdots\cdots E_{2n}\\ E_{32} & E_{33}\cdots\cdots E_{3n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ E_{n2} & E_{n3}\cdots\cdots E_{nn}\end{vmatrix} \tag{3.19}$$

が左から交互に正負の値を取る，ということに等しい。然るに (3.19) の ($r-1$) 番目の行列式の係数の符号は，

$$\begin{aligned}-(u_1)^{r+1}/(-p_1)^{r-1} &= -(u_1)^{r+1}/(-1)^{r-1}\times p_1{}^{r-1}\\ &=(-1)^r\times u_1{}^{r+1}/p_1{}^{r-1}\gtrless 0\begin{pmatrix}r\text{が偶数ならば}>0\\ r\text{が奇数ならば}<0\end{pmatrix}\\ &\because\; p_1>0,\; u_1>0\end{aligned}$$

であるから，(3.19) の総ての行列式の符号は何れも正でなければならない。斯くして吾々は，(3.1) から出発して論理学的繹繹だけにより必然的 (3.2) にに到達することが出来た。效用函数行列式 (3.1) は，斯くして，その效用函数的外見にも拘らず，その真の経済的意味は (3.2) と全く同一であることが証明されたのである。

第4章　所　得　效　果

第1節　限界代替率函数による所得效果

限界代替率函数による静態的消費者均衡条件は (2.4) により，

$$\begin{cases}\sum_{1}^{n} p_i\,x_i = E_1 \\ S_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) = -p_1/p_i \qquad (i=2,3,\cdots,n)\end{cases} \tag{4.1}$$

である。吾々は此の ($2n+1$) 個の文字 $p_1, p_2,\cdots, p_n\,;x_1, x_2,\cdots, x_n\,;E$ の中の任意の n 個を常数にとることにより，残りの ($n+1$) 個の変数の間の均衡状態の下に於ける関係を確定することが出来る。本節に於ては，その中で最も現実的な場合，則ち，総ての価格が一定不変である場合に，総ての財の均衡購入量と所得 E とが如何なる函数関係に立つかを計算してみよう。総ての価格 $p_1, p_2,\cdots,p_n$ 一定の条件の下に，(4.1) の各方程式を所得 E でで微分すれば，

$$\begin{cases} p_1 \dfrac{dx_1}{dE} + p_2 \dfrac{dx_2}{dE} + \cdots\cdots + p_n \dfrac{dx_n}{dE} = 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} S_{ij} \dfrac{dx_j}{dE} = 0 \qquad (i=2,3,\cdots,\ n) \end{cases} \qquad (4.2)$$

となる。この方程式の数は n 個であり，未知数 dx_i/dE $(i=1,2,\cdots,n)$の数も同じ n 個であるから，x_r を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の中の任意の一つとすれば，聯立方程式 (4.2) を解くことによつて，dx_r/dE を価格と限界代替率との函数として求めることが出来る。則ち，

$$\frac{dx_r}{dE} = \begin{vmatrix} p_1\ p_2 & \cdots & p_{r-1} & 1 & p_{r+1} & \cdots & p_n \\ S_{21}\ S_{22} & \cdots & S_{2,r-1} & 0 & S_{2,r+1} & \cdots & S_{2n} \\ S_{31}\ S_{32} & \cdots & S_{3,r-1} & 0 & S_{3,r+1} & \cdots & S_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1}\ S_{n2} & \cdots & S_{n,r-1} & 0 & S_{n,r+1} & \cdots & S_{nn} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \cdots p_n \\ S_{21} & S_{22} \cdots S_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} \cdot S_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.3)$$

この解の行列式の各元素は総て可測的であるから，これに実測値を代入することによつて，dx_r/dE の値を単にその正負だけでなく，数量的に確定することが出来る。

第2節 所得効果式の展開

(4.3) の解は，n^2 個の元素を含み，それを全部実測するということになると極めて面倒である。又，(4.3) のまゝの形では，その経済的意味の把握にも困難を感ずる。そこで，変数の数を減らして，その経済的意味をもつと明瞭にするために，次の如き変形を加える。

(4.3) の解の分母の行列式の元素 p_r の余因子を A_{1r} とすれば，

$$\frac{dx_r}{dE} = \frac{A_{1r}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i A_{1i}} = \frac{1}{\sum p_i \dfrac{A_{1i}}{A_{1r}}} \qquad (4.4)$$

他方，静態的均衡条件式 (4.1) を，全価格一定の条件の下に，任意の財の購入量 x_r で微分すれば，

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \dfrac{dx_i}{dx_r} = \dfrac{dE}{dx_r} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} S_{ij} \dfrac{dx_j}{dx_r} = 0 \qquad (i=2,3,\cdots,\ n) \end{cases}$$

となるが，dx_r/dx_r は1に等しく，従つて未知数の数は1個を減じて $(n-1)$ 個となるので，上記の聯立方程式は過剰決定になつてしまう。そこで，上記の聯立方程式のうち，所得関係を表わす第1式を除いて，残りの $(n-1)$ 個の方程式を聯立させて dx_r/dx_s を求めれば，

$$\sum_{j=1}^{n} S_{ij}\frac{dx_j}{dx_r}=0 \qquad (i=2,3,\cdots,n) \tag{4.5}$$

$$\therefore \quad \frac{dx_s}{dx_r}=\frac{A_{1s}}{A_{1r}} \tag{4.6}$$

斯様にして求められた dx_s/dx_r は一体如何なる経済的意味を持つであろうか。(4.1) の聯立方程式は均衡購入点を表わすものであり，(4.5) は，それを価格一定の条件の下に x_r で微分したものであるから（所得 E は従属的に定まる），それは所謂支出拡張線或は所得支出線の微分方程式に外ならず，dx_1, $dx_2,\cdots$，dx_n は夫々この支出拡張線上の1点に於けるヴェクトル成分を表わすものに外ならない。従つて dx_s/dx_r は (x_s, x_r) 平面上に投映された支出拡張線の方向係数である。

そこで，(4.6) の解を (4.4) に代入すれば，

$$\frac{dx_r}{dE}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i\dfrac{dx_i}{dx_r}} \tag{4.7}$$

この支出拡張線の方向係数は之を直接に家計調査資料から求めることが出来，その数も僅かに $(n-1)$ 個にしか過ぎないから，所得効果を計算するには (4.3) よりも (4.7) の方が遙かに便利である。

(4.7) の関係式は又，右の様な廻りくどい方法によらずとも，直接に之を求める事も出来る。則ち，総ての価格一定の場合の所得 E の微分 dE を求めれば，

$$dE=\sum_{i=1}^{n} p_i\,dx_i$$

更に，両辺を dx_r で除してその逆数を取れば，

$$\frac{dx_r}{dE}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i\,dx}$$

となつて，(4.7) と同じ結果に到達する。dx_r/dE の値の正負に就ての先験的判断は不可能であり，正負何れの値をも取り得るから，その判定には実測を必要とする。所得が増した場合にも，あらゆる商品の購入量が増加するとは限らず，中には反対に減少する品目もあることは，吾々の日常経験するところである。

第3節　効用函数による所得効果

同じ問題を，効用指標函数を使用して解く為には，均衡条件式(2.1)を，総ての価格を固定させた上で，所得 E に就て微分すればよい。則ち，

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i \dfrac{dx_i}{dE} = 1 \\ p_i \dfrac{d\mu}{dE} + \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \dfrac{dx_j}{dE} = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

これから dx_r/dE を求めれば，

$$\frac{dx_r}{dE} = \begin{vmatrix} 0 & p_1 \cdots p_{r-1} & 1 & p_{r+1} \cdots p_n \\ p_1 & u_{11} \cdots u_{1,r-1} & 0 & u_{1,r+1} \cdots u_{1n} \\ p_2 & u_{21} \cdots u_{2,r-1} & 0 & u_{2,r+1} \cdots u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & u_{n1} \cdots u_{n,r-1} & 0 & u_{n,r+1} \cdots u_{nn} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \cdots p_n \\ p_1 & u_{11} & u_{12} \cdots u_{1n} \\ p_2 & u_{21} & u_{22} \cdots u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & u_{n1} & u_{n2} \cdots u_{nn} \end{vmatrix}$$

然るに均衡点に於ては $p_r/u_1 = p_i/u_i$ であるから，

$$\frac{dx_r}{dE} = \left(\frac{p_1}{u_1}\right)^2 \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_{r-1} & u & u_{r+1} \cdots u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{1,r-1} & 0 & u_{1,r+1} \cdots u_{1n} \\ u_2 & u_{21} & u_{2,r-1} & 0 & u_{2,r+1} \cdots u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & n_{n1} & u_{n,r-1} & 0 & u_{n,r+1}\ u_{nn} \end{vmatrix} \div \left(\frac{p_1}{u_1}\right)^2 \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \cdots g_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \cdots u_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & u_{n1} & u_{n2} \cdots u_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.8}$$

この効用指標函数を (3.12) の換算式によつて限界代替率函数に改めれば，

$$\frac{dx_r}{dE} = \frac{-(u_1)^2}{(S_2,S_3 \cdots S_n)^2} \begin{vmatrix} 1 & -1/S_2 \cdots & -1/S_{r-1} & u & -1/S_{r+1} & -1/S_n \\ S_{21} & S_{22} \cdots & S_{2,r-1} & 0 & S_{2,r+1} & \cdots S_{2n} \\ S_{31} & S_{32} \cdots & S_{3,r-1} & 0 & S_{3,r+1} & \cdots S_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} \cdots & S_{n,r-1} & 0 & S_{n,r+i} & S_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\div \frac{-(u_1)^{n+1}}{(S_2\cdots S_n)^2}\begin{vmatrix} 1 & -1/S_2 & \cdots & -1/S_n \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1/S_2 & \cdots & -1/S_{r-1} & 1/p_1 & -1/S_{r+1} & \cdots & -1/S_n \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2,r-1} & 0 & S_{2,r+1} & \cdots & S_{2,n} \\ S_{31} & S_{32} & \cdots & S_{3,r-1} & 0 & S_{3,r+1} & \cdots & S_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{n,r-1} & 0 & S_{n,r+1} & \cdots & S_{nn} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & -1/S_2 & \cdots & -1/S_n \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{vmatrix}$$

均衡点に於ては $-1/S_i = p_i/p_1$ であるから，

$$\frac{dx_r}{dE}=\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_{r-1} & 1 & p_{r+1} & \cdots p_n \\ S_{21} & S_{22} & S_{2,r-1} & 0 & S_{2,r+1} & \cdots S_{2n} \\ S_{31} & S_{33} & S_{3,r-1} & 0 & S_{3,r+1} & \cdots S_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & S_{n,r-1} & 0 & S_{n,r+1} & \cdots S_{nn} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \cdots p_n \\ S_{21} & S_{22} & \cdots S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots S_{nn} \end{vmatrix}$$

となつて，結局 (4.3) と全く同一の結果に到達することが証明された。

第5章　価　格　効　果

第1節　限界代替率函数による価格効果式

静態に於ける消費者均衡条件 (2.4) の中に現れる $(2n+1)$ 個の文字の中，前章では総ての価格を一定としたが，本章に於ては，その価格の中の任意の一つ p_r を自変数に取り，その代りに所得 E を常数とする。その結果常数の数は前同様 n 個であるから，残りの変数の数も矢張り$(n+1)$個で，従つて均衡条件聯立方程式 (2.4) によつてその中の $(n+1)$ 個を消去して，p_3 ; $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の中の任意の 2 変数の間の静態均衡の下に於ける関係を一義的に確定することが出来る。

斯くして，任意の 1 財の価格 p_r だけが変化して，他の総ての価格と所得 E とが一定に保たれる場合に，価格 p_r の変化が各財の均衡購入量に与える影響を確定することが出来る。此の関係を，所得効果の命名法に倣つて，価格効果

と名附ける。

価格効果の大きさを数学的に求める為に，(2.4) を上記の条件の下に p_r で微分すれば，

$$\left\{\begin{array}{l} p_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial p_r} + p_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + p_n \dfrac{\partial x_n}{\partial p_r} = -x_r \\ S_{21} \dfrac{\partial x_1}{\partial p_r} + S_{22} \dfrac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + S_{2n} \dfrac{\partial x_n}{\partial p_r} = 0 \\ S_{31} \dfrac{\partial x_1}{\partial p_r} + S_{32} \dfrac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + S_{3n} \dfrac{\partial x_n}{\partial p_r} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{r1} \dfrac{\partial x_1}{\partial p_r} + S_{r2} \dfrac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + S_{rn} \dfrac{\partial x_n}{\partial p_r} = p_1/(p_r)^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{n1} \dfrac{\partial x_1}{\partial p_r} + S_{n2} \dfrac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + S_{nn} \dfrac{\partial x_n}{\partial p_r} = 0 \end{array}\right. \qquad (5.1)$$

となる。そこで，任意の1財の均衡購入量に与える影響 $\partial x_s / \partial p_r$ を求めれば，

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r} = \begin{vmatrix} p_1\ p_2 \cdots p_{s-1} & -x_r & p_{s+1} \cdots p_n \\ S_{21}\ S_{22} \cdots S_{2,s-1} & 0 & S_{2,s+1} \cdots S_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ S_{r1}\ S_{r2} \cdots S_{r,s-1} & p_1/p_r^2 & S_{r,s+1} \cdots S_{rn} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ S_{n1}\ S_{n2} \cdots S_{n,s-1} & 0 & S_{n,s+1} \cdots S_{nn} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} p_1\ p_2 \cdots p_n \\ S_{21}\ S_{22} \cdots S_{2n} \\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots \\ S_{n1}\ S_{n2} \cdots S_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-x_r \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \cdots p_{s-1} & 1 & p_{s+1} \cdots p_n \\ S_{21} & S_{22} \cdots S_{2,s-1} & 0 & S_{2,s+1} \cdots S_{2n} \\ S_{31} & S_{32} \cdots S_{3,s-1} & 0 & S_{3,s+1} \cdots S_{3n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ S_{n1} & S_{n2} \cdots S_{n,s-1} & 0 & S_{n,s+1} \cdots S_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1\ p_2 \cdots p_n \\ S_{21}\ S_{22} \cdots S_{2n} \\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots \\ S_{n1}\ S_{n2} \cdots S_{nn} \end{vmatrix}}$$

$$+\frac{p_1/p_r^2\begin{vmatrix} 1 & -1/S_2 & \cdots & -1/S_{s-1} & 0 & -1/S_{s+1} & \cdots & -1/S_n \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2,s-1} & 0 & S_{2,s+1} & \cdots & S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{r1} & S_{r2} & \cdots & S_{r,s-1} & 1 & S_{r,s+1} & \cdots & S_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{n,s-1} & 0 & S_{n,s+1} & \cdots & S_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1/S_2 & \cdots & -1/S_n \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{vmatrix}} \qquad (5.2)$$

此の (5.2) 式の右辺第1項は (4.3) によつて，$-x_r\,dx_s/dE$ に等しく，又第2項は (3.7) と (3.10) とにより $(p_1/p_r)^2\times(dx_s/dS_r)$ に等しい。又 $x_r=\partial E/\partial p_r$; $p_1/p_r^2=\partial S_r/\partial p_r$ であるから，

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=-\frac{\partial E}{\partial p_r}\times\frac{dx_s}{dE}+\frac{\partial S_r}{\partial p_r}\times\frac{dx_s}{dS_r} \qquad (5.3)$$

の如く表現することが出来る。但し E は実際は常数であるから，∂E, dE を夫々所得の微分と考えるならば，$\partial E+dE=0$ 則ち $\partial E=-dE$ でなくてはならない。そこで (5.8) の式を次の通りに改めることが出来る。(1)

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=\frac{dE}{\delta p_r}\times\frac{dx_s}{dE}+\frac{\delta S_r}{\delta p_r}\times\frac{\delta S_s}{\delta S_r}$$

これは，ヒックスの所謂「スルツキーの基本方程式」の変形されたものに外ならない。ヒックスの与えたまゝの形では，その中に選択指標函数を含んでいるので，その経済的意味の把握に困難を感ずるが，此の様な形に書き改められ

（註 1） サミュエルソンはスルツキーの基本方程式を次の様な形で与えている。

$$K_{ji}=\frac{\partial x_j}{\partial p_i}+x_i\,\frac{\partial x_j}{\partial I}$$

これをそのまゝ吾々の符号に改めるならば，

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=-x_r\,\frac{dx_s}{dE}+\frac{\delta x_s}{\delta p_r}$$

となる。これはヒックスの場合よりも確かに理解し易い形に改められてはいるが，どうせ改めるならば，$-x_r$ をも $dE/\delta p_r$ で表わして置いた方が，より理解を助けることになるであろう。

(Samuelson : Foundations of Economic Analysis. p.102.)

ることによつて，その経済的意味を直観的に容易に把握することが出来るであろう。

その右辺第1項は，x_r 財の価格変化 δp_r が所得 E に与える假想的所得変化 dE を考え，この假想的所得変化（virtual income displacement）が p_r を含めての総ての価格一定の条件の下に，財 x_s の均衡購入量に与える変位 dx_s を表わすものであるから，正に所得効果（income effect）と呼ばるべきであり，又その第2項は，同じ x_r 財の価格変化 δp_r が同一無差別曲面上に於ける限界代替率 S_r に与える変化 δS_r を考え，その δS_r が更に x_s に与える影響 δx_s を示すものであるから，代替効果（subslitution effect）と呼ばれてよいであろう。斯くして，価格効果は所得効果と代替効果との和として表わされることになる。

所得効果に就ては既に先の第4章で充分述べたし，又代替効果に就ては第3章の安定条件論に於て説明したので，詳しい説明は省略する。所得効果の値は既述の如く正負何れの値をも取り得るし，又代替効果の方も必ずしも負とは限らないので，その合成効果としての価格効果を量的に確定するには(5.4)の各項に夫々の実測値を代入してみなければ判らない。

第2節 効用函数による価格効果

同じ価格効果を効用函数或は選択指標函数を使つて求めるには(2.1)の消費者均衡条件式を，p_r 以外の総ての価格と所得 E とを常数として p_r で微分すればよい。則ち，

$$
\left\{
\begin{array}{l}
p_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial p_r} + p_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + p_n \dfrac{\partial x_n}{\partial p_r} = -x_r \\
-p_1 \dfrac{\partial \mu}{\partial p_r} + u_{11}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r} + u_{12}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + u_{1n} \dfrac{\partial x_n}{\partial p_r} = 0 \\
-p_2 \dfrac{\partial \mu}{\partial p_r} + u_{21}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r} + u_{22}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + u_{2u} \dfrac{\partial x_n}{\partial p_r} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-p_r \dfrac{\partial \mu}{\partial p_r} + u_{r1}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r} + u_{r2}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + u_{rn} \dfrac{\partial x_n}{\partial p_r} = \mu \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-p_n \dfrac{\partial \mu}{\partial p_r} + u_{n1}\dfrac{\partial x_1}{\partial d_r} + u_{n2}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r} + \cdots\cdots + u_{nn} \dfrac{\partial x_n}{\partial p_r} = 0
\end{array}
\right. \qquad (5.5)
$$

を $\partial x_s/\partial p_r$ について解けば，

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \cdots p_{s-1} & -x_r & p_{s+1}\cdots p_n \\ -p_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots u_{1,s-1} & 0 & u_{1,s+1}\cdots u_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_r & u_{r1} & u_{r2} & \cdots u_{r,s-1} & \mu & u_{r,s+1}\cdots u_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_n & u_{n1} & u_{n2} & \cdots u_{n,s-1} & 0 & u_{n,s+1}\cdots u_{nn} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \cdots p_n \\ -p_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots u_{1n} \\ -p_2 & u_{21} & u_{2,} & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_n & u_{n1} & u_{n2} & \cdots u_{nn} \end{vmatrix}$$

然るに均衡状態に於ては $p_i/p_1=u_i/u_1$ であるから，

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=-x_r\frac{U_{1r}}{U}+\mu\frac{U_{rs}}{U} \tag{5.6}$$

この右辺第1項は (4.8) により $-x_r\,\partial x_r/\partial E$ に等しい故，

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=-x_r\frac{\partial x_r}{\partial E}+\mu\frac{U_{rs}}{U} \tag{5.7}$$

ヒックスは変形をこゝまでで中止してしまつているために，その経済的意味の追及が不徹底なまゝで放置されている。則ち，右辺第1項の $-x_r$ は一体何を意味するのか，又，第2項は何故に代替項と呼ばれるのか，このままの形では全く理解に苦しむ。代替項を X_{rs} と書き換えてみた所で，何等新しい解釈は得られない。又，代替項と安定条件とが全く同じものであることの理解が他く得られない。

然し，効用函数を使用した場合は，これ以上の変形が不可能だというのではなく，分母分子が同次の効用函数行列式は必ず之を限界代替率函数に変換し得る筈であるから，(5·7) を更に効用指標函数のまゝで変形して (5.4) と同型にすることが出来る。

そこで，効用函数による均衡条件聯立方程式 (2.1) を，p_r 以外の総ての価格を一定として，p_r で微分すれば，所得は可変であるから，

$$\left\{\begin{aligned} &p_1\frac{\delta x_1}{\delta p_r}+p_2\frac{\delta x_2}{\delta p_r}+\cdots\cdots+p_n\frac{\delta x_n}{\delta p_r}=\frac{\delta E}{\delta p_r}-x_r \\ -p_1\frac{\delta\mu}{\delta p_r}&+u_{11}\frac{\delta x_1}{\delta p_r}+u_{12}\frac{\delta x_2}{\delta p_r}+\cdots\cdots+u_{1n}\frac{\delta x_n}{\delta p_r}=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -p_r\frac{\delta\mu}{\delta p_r}&+u_{r1}\frac{\delta x_1}{\delta p_r}+u_{r2}\frac{\delta x_2}{\delta p_r}+\cdots\cdots+u_{rn}\frac{\delta x_n}{\delta_r}=\mu \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -p_n\frac{\delta\mu}{\delta p_r}&+u_{n1}\frac{\delta x_1}{\delta p_r}+u_{n2}\frac{\delta x_2}{\delta p_r}+\cdots\cdots+u_{nn}\frac{\delta x_n}{\delta p_r}=0 \end{aligned}\right. \tag{5.8}$$

所で (5.7) のx_rは $\partial E/\partial p_r$ に等しく，その ∂E を一つの微分と考えて dE と置けば，結展所得は不変でなくてはならないから，$dE+\delta E=0$ でなくてはならず，又 ∂p_r を dp_r と置けば，$dp_r = \delta p_r$ であるから，

$$\frac{\delta E}{\delta p_r}=\frac{-dE}{dp_r}=-(-x_r)=x_r$$

$$\therefore \quad \frac{\delta E}{\delta p_r}-x_r=x_r-x_r=0$$

となり，従つて (5.8) の聯立微分方程式の第1番目の式は次の如く書き改められる。

$$p_1\frac{\delta x_1}{\delta p_r}+p_2\frac{\delta x_2}{\delta p_r}+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_n\frac{\delta x_n}{\delta p_r}=0 \qquad (5.9)$$

斯く改められた (5.8) 式を $\delta x_s/\delta p_r$ に就て解けば，

$$\frac{\delta x_s}{\delta p_r}=\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \cdot & p_{s-1} & 0 & p_{s+1}\cdots p_n \\ p_1 & u_{11} & u_{12}\cdots & u_{1,s-1} & 0 & u_{1,s+1}\cdots u_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_r & u_{r1} & u_{r2}\cdots & u_{r,s-1} & \mu & u_{r,s+1}\cdots u_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & u_{n1} & u_{n2}\cdots & u_{n,s-1} & 0 & u_{n,s+1}\cdots u_{nn} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2\cdots p_n \\ p_1 & u_{11} & u_{12}\cdots u_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & u_{n1} & u_{n2}\cdots u_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\mu U_{rs}}{U}$$

これを (5.7) に代入して，

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=\frac{dE}{\delta p_r}\times\frac{dx_s}{dE}+\frac{\delta x_s}{\delta p_r}$$

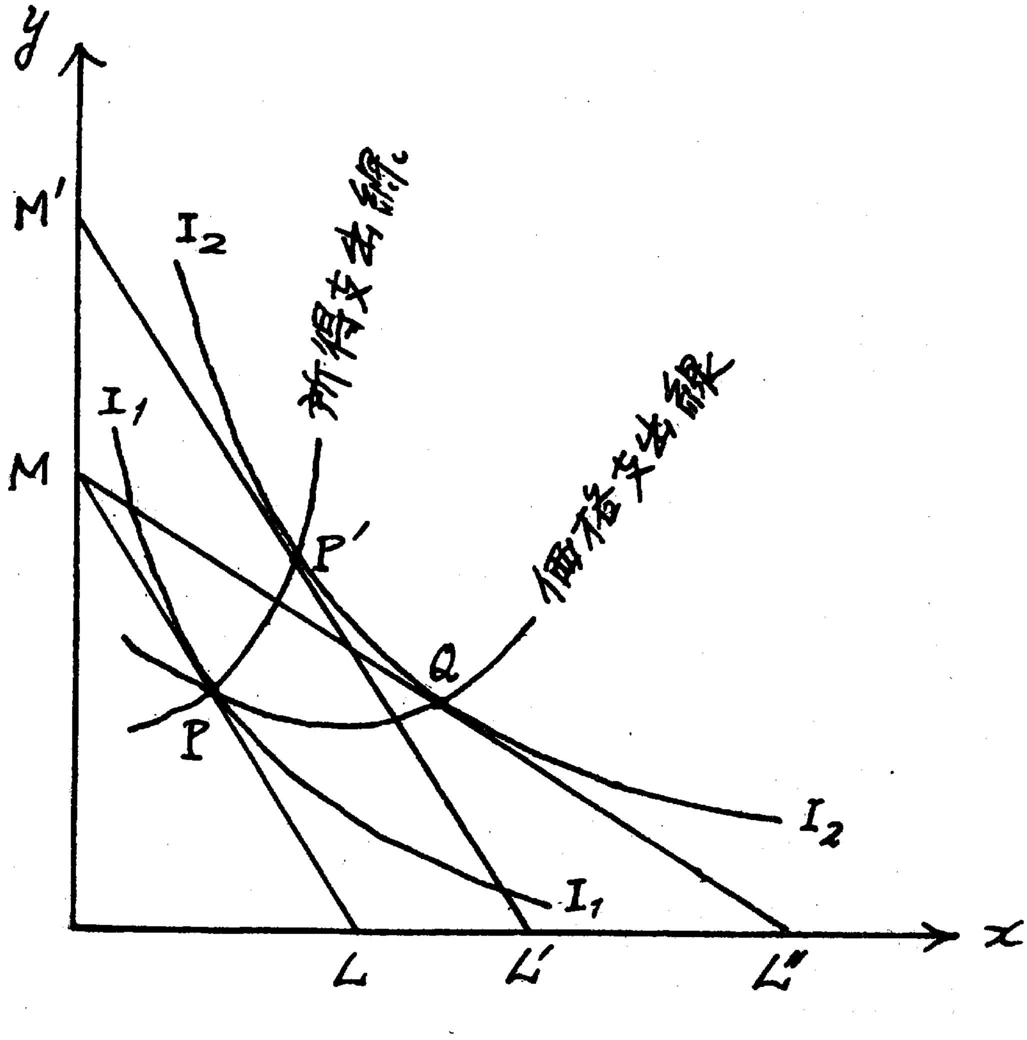
$$=-\frac{\partial E}{\partial p_r}\times\frac{dx_s}{dE}+\frac{\delta S_r}{\delta p_r}\times\frac{\delta x_s}{\delta S_r}$$

となつて，限界代替率函数による解 (5.4) と全く同じ結果に到達することが証明される。

第3節　価格効果の幾何学的解釈

スルツキーの基本方程式は，以上の様な複雑な聯立微分方程式によらなくても，微分を使用することによつて，より簡単に，而もより直観的にこれを求めることが出来る。

代替効果による変位の微少量を $\delta p_r\,;\delta S_r\,;\delta x_1,\ \delta x_2,\cdots,\ \delta x_n\,;\delta E$ とし，所得効果による変位の微少量を $dx_1, dx_2,\cdots, dx_n\,; dE$ とする。価格効果を，所得効果と代替効果との合成として考えるならば，価格効果は，先ず総ての価格一定の条件の下に所得が dE だけ増すことによつて同一支出拡張線上の他の点で新しい均衡に達し（所得効果），然る後 r 財の限界代替率 S_r が，p_r の変化 δp_r を通じて δS_r の変化をすることにより同一無差別曲面上の他の新しい点で



第四図

$P\ (x,\ y)$

$P'\ (x+dx,\ y+dy)$

$Q\ (x+dx+\delta x,\ y+dy+\delta y)$

$p_y \times \overline{MM'} = dE$

$p_y \times \overline{M'M} = \delta E = -dE$

$$\delta S_x = \frac{\overline{OM} \times \overline{L''L}}{\overline{OL'} \times \overline{OL}}$$

再び均衡に到達する（代替効果）という二つの過程に分けて考えることが出来る。但し，第1の過程による所得変化 dE は，第2過程に於ける所得変化 δE によつて丁度打消されなくてはならない。

最初の出発点を P とし，所得効果による中間均衡点を P'，更に代替効果が加つた最終的均衡点を Q とすれば，ヒックスに従つて之を次の如く図示することが出来る 。

従つて

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=\frac{dx_s+\delta x_s}{\delta p_r}=\frac{dx_s}{\delta p_r}+\frac{\delta x_s}{\delta p_r} \qquad (5.11)$$

この右辺の各項にそれぞれ

$$-\delta E/dE\,;\,\delta S_r\,/\,\delta S_r$$

を乗じても値は変らないから，

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=\frac{-\delta E}{\delta p_r}\times\frac{dx_s}{dE}+\frac{\delta S_r}{\delta p_r}\times\frac{\delta x_s}{\delta S_r}$$

となつて，聯立微分方程式による解 (5.4) と全然同じ結果に到達する。

更に又，

$$\begin{cases} dE=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\cdots\cdots+p_n\,dx_n \\ \delta S_r=S_{r1}\delta x_1+S_{r2}\delta x_2+\cdots\cdots+S_{rn}\delta x_n \\ \delta E/\delta p_r={}_r \\ \delta S_r\,/\,\partial p_r=p_1\,/\,p_r^2 \end{cases}$$

を代入すると

$$\partial x_s/\partial p_r=\frac{-x_r\,dx_s}{\sum_{i=1}^{n}p_i\,dx_i}+\frac{p_1\,/\,p_r^2\cdot\delta x_s}{\sum_{i=1}^{n}S_{ri}\,\delta x_i}$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}p_i\,\frac{dx_i}{dx_s}}+\frac{p_1\,/\,p_r^2}{\sum_{i=1}^{n}S_{ri}\,\frac{\delta x_i}{\delta x_s}} \qquad (5.13)$$

となる。玆に $dx_i\,/\,dx_s$ は一定の価格体系（$p_1, p_2, \cdots, p_n$）の下に於ける所得消費曲線の傾斜であり，$\delta x_i\,/\,\delta x_s$ は価格 p_r だけが変化する場合の限界代替率消費曲線の方向係数であつて，何れも統計資料による実測が可能である。

第4節 多数価格変化による価格効果

以上3節に亙つて考察して来た価格効果は，常に1財の価格だけが変化する場合のみを取り扱つて来た。然し，現実に於ける物価変動は必ず二つ以上の価格が同時に変化するのを常とするので，1価格の変動だけしか考えに入れないスルツキー基本方程式は，その応用の範囲を極度に限定されざるを得ない。

ヒックスは，多数の価格が同一比例で変化する場合として，次の式を掲げている。即ち，$p_r, p_{r+1}, \cdots, p_{r+m}$ が悉く同一割合で変化する場合は，それによつて惹起される S 財の均衡購入量の変化は次の式で表わされる。(1)

$$\sum_{i=0}^{m} p_{r+i}\frac{\partial x_s}{\partial p_{r+i}}=-\left(\sum_{i=0}^{m} p_{r+i}\ x_{r+i}\right)\frac{\partial x_s}{\partial M}+\sum_{i=0}^{m} p_{r+i}\ X_{r+i,s}$$

多数財の価格変化を取上げたことは，確かに現実への一歩接近ではあるが，然し同一比例という条件は全く非現実的である。而も，彼は右の式の証明を与えてはいない。本節に於ては，これを更に一般化して，多数価格が個々別々に変化する場合の基本方程式を求め，ヒックスの場合をその一特殊例として証明することとしたい。

扨，$p_r, p_{r+1}, \cdots, p_{r+m}$ の総てが個々別々に変動する場合，即ち，その悉くが独立変数であるとすると，変数が m 個増加する結果，求める $\partial x_s/\partial p_r$ は p_r と x_s との他に更に m 個の独立変数 $p_{r+1}, p_{r+2}, \cdots, p_{r+m}$ を含むこととなり，その値を一義的に確定することが出来ない。そこで，以上の如き $(m+1)$ 個の価格変化を伴いながらも $\partial x_s/\partial p_r$ を一義的に確定する為には，p_r と $p_{r+1}, p_{r+2}, \cdots, p_{r+m}$ との間に m 個の関係式を与えることが必要である。この関係式を，時間 t をパラメーターとして表わせば，

$$p_{r+i}=f_i(t) \qquad (i=0,1,2,\cdots, n)$$

$$\therefore\ \frac{dp_{r+i}}{dp_r}=\frac{dp_{r+i}}{dt}\div\frac{dp_r}{dt}\varphi_i(t)=\theta_i(p_r) \qquad (5.15)$$

となり，総ての価格変化は p_r の従属変数として表わすことが出来る。

静態的消費者均衡条件式 (2.4) を (5.15) の束縛条件の下に p_r で微分すれば，

（註 1） Hicks : Value and Capital, p.312.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}+{}^{-1}\!\big/_{S_2}\,\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}+\cdots\cdots \\
\qquad\qquad +{}^{-1}\!\big/_{S_n}\,\dfrac{\partial x_n}{\partial p_r}=-\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\dfrac{\partial p_{r+i}}{\partial p_r}x_{r+i} \\
S_{21}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}+S_{22}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}+\cdots\cdots+S_{2n}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_r}=0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{r-1,1}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}+S_{r-1,2}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}+\cdots\cdots+S_{r-1,n}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_r}=0 \\
S_{r1}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}+S_{r2}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}+\cdots\cdots+S_{rn}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_r}=1 \\
S_{r+1,1}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}+S_{r+1,2}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}+\cdots\cdots+S_{r+1,n}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_r}=\dfrac{\partial p_{r+1}}{\partial p_r} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{r+m,1}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}+S_{r+m,2}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}+\cdots\cdots+S_{r+m,n}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_r}=\dfrac{\partial p_{r+m}}{\partial p_r} \\
S_{r+m+1,1}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}+S_{r+m+1,2}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}+\cdots\cdots+S_{r+m+1,n}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_r}=0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{n1}\dfrac{\partial x_1}{\partial p_r}+S_{n2}\dfrac{\partial x_2}{\partial p_r}+\cdots\cdots+S_{nn}\dfrac{\partial x_n}{\partial p_r}=0
\end{array}
\right.
\tag{5.16}
$$

となり，これを $\partial x_s / \partial p_r$ に就て解けば，

$$
V=\begin{vmatrix}
1 & {}^{-1}\!\big/_{S_2} & \cdots & {}^{-1}\!\big/_{S_n} \\
S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn}
\end{vmatrix}
$$

と略記することにより，

$$
\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=-\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{\partial p_{r+i}}{\partial p_r}x_{r+i}\right)\frac{V_{1r}}{V}+\sum_{i=0}^{m}\frac{\partial p_{r+i}}{\partial p_r}\times\frac{V_{r+i,s}}{V}
$$

$$
\therefore\ \frac{\partial x_s}{\partial p_r}=-\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{\partial p_{r+i}}{\partial p_r}x_{r+i}\right)\frac{\partial x_s}{\partial E}+\sum_{i=0}^{m}\frac{\partial p_{r+i}}{\partial p_r}\times\frac{\partial S_{r+i}}{\partial p_{r+i}}\times\frac{\partial x_s}{\partial S_{r+i}}
\tag{5.16}
$$

これがスルツキーの基本方程式の最も一般的な形である。

価格変化が悉く比例的である場合は，

$$\frac{\partial p_{r+i}}{\partial p_r}=\frac{p_{r+i}}{p_r}\qquad (i=1,2,\cdots,m)\qquad (5.17)$$

となるから，これを（5.16）に代入すれば，

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=-\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{p_{r+i}}{p_r}x_{r+i}\right)\frac{\partial x_s}{\partial E}+\sum_{i=0}^{m}\frac{p_{r+i}}{p_r}X_{r+i,s}$$

$$\therefore\quad p_r\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=-\left(\sum_{i=0}^{m}p_{r+1}\,x_{r+i}\right)\frac{\partial x_s}{\partial E}+\sum_{i=0}^{m}p_{r+i}X_{r+i,s}\quad (5.18)$$

となつて，ヒックスの与えた式（5.14）と完全に一致する。左辺の形が異るようであるが，（5.18）の左辺は $p_r, p_{r+1},\cdots,p_{r+m}$ の総ての変化に基く x_s の変動割合を示すものであるから，（5.14）の左辺と全く同じ内容を意味している。

第5節　集団財の価格効果

前節に於ては，1群の価格変化が任意の1財の均衡購入量に及ぼす影響を考察した。本節に於ては更に，此の多数価格の変化が，その多数財全体の均衡購入金額に如何なる影響を及ぼすか，に就て考えてみたい。

1財の価格変化がそれ自身の均衡購入量に与える影響は（5.4）により，

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=\frac{dE}{\delta p_r}\times\frac{dx_r}{dE}+\frac{\delta S_r}{\delta p_r}\times\frac{\delta x_r}{\delta S_r}=-x_r\times X_{rr}$$

$$\therefore\quad \delta p_r\frac{\partial x_r}{\partial p_r}=-\delta p_r\,x_r\times\frac{dx_r}{dE}+\delta p_r\,X_{rr}\qquad (5.19)$$

$$\therefore\quad p_r\,\delta p_r\frac{\partial x_r}{\partial p_r}=-\delta p_r\,x_r\times\frac{p_r\,dx_r}{dE}+p_r\,\delta p_r\,X_{rr}\qquad (5.20)$$

（5.19）式は価格変化 δp_r によつて生ずる r 財均衡購入量の変化を示すものであり，（5.20）式は，これに価格 p_r を乗ずることにより，r 財えの支出金額の変化量を示している。

次に，一般化された基本方程式（5.16）に就て同様の操作を施せば，

$$\delta p_r\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=-\left(\sum_{i=0}^{m}\delta p_{r+i}\,x_{r+i}\right)\frac{dx_s}{dE}+\sum_{i=0}^{m}\delta p_{r+i}X_{r+i,s}\quad (5.21)$$

$$p_s\,\delta p_r\frac{\partial x_s}{\partial p_r}=-\left(\sum_{i=0}^{m}\delta p_{r+i}\,x_{r+i}\right)\frac{p_x\,xx_s}{dE}$$

$$+p_s\sum_{i=0}^{m}\delta p_{r+i}X_{r+i,s}\qquad (5.22)$$

となる。更に（5.22）を一般化して，x_s 財だけでなく，$x_r, x_{r+1},\cdots,x_{r+m}$ の

総ての購入金額に与える影響を見るために，s を r から $(r+m)$ まで変化させて，その累計を取れば，

$$\sum_{j=0}^{m} p_{r+j}\,\delta p_r \frac{\partial x_{r+j}}{\partial p_r} = -\left(\sum_{j=0}^{m}\delta p_{r+i}\; x_{r+i}\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{p_{r+j}\,dx_{r+j}}{dE}\right)$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} p_{r+j}\,\delta p_{r+i}\,X_{r+i}\,X_{r+j} \qquad (5.23)$$

は，一群の財の価格変化が，同じ一群の財の均衡購入金額に与える変化を示すことになる。これを単一財の場合 (5.20) と比較すると，両者はその総和記号を除けば全く相等しい。

従つて，一群の財は消費者均衡に於ては単一財と同様な行動を取る，と言うことが出来る。則ち，単一財の假想的所得変化は，$(-\delta p_r\, x_r)$，一群の財のそれは，$\sum(-\delta p_r\, x_r)$ であつて，夫々に $(p_r \cdot dx_r / dE)$ 或は $\sum(p_r \cdot dx_r / dE)$ を乗じた値が夫々の所得効果による支出金額の変化を表わす。両者の支出拡張線は同一であり，出発点も同一であるから，その所得効果の大きさは假想的所得変化量の大小によつて一義的に義的に定まること，単一財・複合財の如何を問わず，何等の相異もない。

代替効果に就ても同様である。特に，価格が比例的に変化する場合は (5.17) により，代替項の値は

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} p_{r+i}\,p_{r+j}\,X_{r+j,\,r+j}$$

に等しくなり，従つて単一財の場合と同じくその値は必ず負であつて，価格が上れば，その一群への支出合計金額は減じ，下れば増すこととなる。

第6節　所得変化を伴う価格効果

第4節に於ては多数財の価格変化による所得効果を説明したが，その際，所得 E は常数として取扱われた。然し現実の価格変動は必らず何等かの所得変化を伴うものであるから，本節に於ては所得も変るものとして基本方程式を更に一般化してみたい。

p_1 を numéraire として，それ以外の総ての価格と，所得 E とを時間の函数と考える。こゝ条件の下に消費者均衡条件聯立方程式 (2.4) を t で微分すれば，

$$\left\{\begin{array}{l} p_1\dfrac{\partial x_1}{\partial t}+p_2\dfrac{\partial x_2}{\partial t}+\cdots\cdots+p_n\dfrac{\partial x_n}{\partial t}=-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{dp_i}{dt}x_i+\dfrac{dE}{dt} \\ S_{21}\dfrac{\partial x_1}{\partial t}+S_{22}\dfrac{\partial x_2}{\partial t}+\cdots\cdots+S_{2n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t}=\dfrac{p_1}{p_2^2}\times\dfrac{\delta p_2}{\delta t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{n1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t}+S_{n2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t}+\cdots\cdots+S_{nn}\dfrac{\partial x_n}{\partial t}=\dfrac{p_1}{p_n^2}\times\dfrac{\delta p_n}{\delta t} \end{array}\right. \tag{5.24}$$

これを $\partial x_r/\partial t$ に就て解けば

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_r}{\partial t}&=\left(-\sum_{i=2}^{n}\frac{\delta p_i}{\delta t}x_i+\frac{dE}{dt}\right)\frac{V_{1r}}{V}+\sum_{i=2}^{n}\frac{p_1}{p_i^2}\times\frac{\delta p_i}{\delta t}\times\frac{V_{ir}}{V}\\ &=\left(-\sum_{i=2}^{n}\frac{\delta p_i}{\delta t}x_i+\frac{dE}{dt}\right)\frac{dx_r}{dE}+\sum_{i=2}^{n}\frac{p_1}{p_i^2}\times\frac{\delta p_i}{\delta p_i}\times\frac{\delta x_i}{\delta p_i}\end{aligned} \tag{5.25}$$

この両辺に δt 及び $p_r\delta t$ を乗ずれば,

$$\delta t\frac{\partial x_r}{\partial t}=\left(-\sum_{i=2}^{n}\delta p_i\,x_i+dE\right)\frac{dx_r}{dE}+\sum_{i=2}^{n}\frac{p_1}{p_i^2}\,\delta p_i\,X_{ir} \tag{5.26}$$

$$\delta t\frac{p_r\,\partial x_r}{\partial t}=\left(-\sum_{i=2}^{n}\delta p_i\,x_i+dE\right)\frac{p_r\,dx_r}{dE}+p_r\sum_{i=2}^{n}\frac{p_1}{p_i^2}\,\delta x_r \tag{5.27}$$

更にこれの r を 1 から n まで変化させて合計すれば,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\delta t\,\frac{p_j\cdot\partial x_j}{\partial t}&=\left(-\sum_{j=2}^{n}\delta p_i\,x_i+dE\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j\,dx_j}{dE}\\ &\quad+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{p_1}{p_i^2}\times\frac{\delta x_j}{p_j}\end{aligned} \tag{5.28}$$

(5.27) の経済的意味は次の通りである。

基準時点から δt 経過する間に，価格が $p_1, p_2, \cdots, p_n$ から $p_1, p_2+\delta p_2, \cdots, p_n+\delta p_n$ に変化し，同時に所得が E から $E+dE$ に変化したとすると，それによつて惹起される r 財の均衡購入量の変化量は，所得効果 dx_r と，代替効果 δx_r との合計として表わされる。その中，所得効果の大きさは，実際の所得変化 dE と，各財の価格変動による假想的所得変化 $(-\sum\delta p_i x_i)$ との和に等しい所得増加が，基準時点の価格体系の下で生じた場合に生ずべき均衡購入量の変化に等しい。従つてそれは，基準時点の所得階級別生計費資料があれば，之を統計的に確定する事ができる。更に合成効果たる (δx_r+dx_r) の値

は容易に統計的確定が可能であり，従つて代替効果 δx_r の大きさも経験的に之を求めることが出来る。

此の様な手続きを総ての財に就て行えば，$\delta x_1, \delta x_2 \cdots, \delta x_n$ の具体的数値が求められるが，$(x_1+dx_1, x_2+dx_2\cdots, x_n+dx_n)$ と $(x_1+dx_1+\delta x_1, x_2+dx_2+\delta x_2, \cdots, x_n+dx_n+\delta x_n)$ とは同一無差別曲線上の二つの消費組合せ点であるから，前者には基準時点の価格，後者には比較時点の価格をそれぞれ乗じて，その比を求めることにより，両時点の間の函数的物価指数を計算することが出来る。

補論 1　独立財の仮定に就て

本文中にも既に述べた如く，内省心理学的概念である効用は本質的に非可測的量であつて，総ての効用測定理論は，その結論として証明すべき可測性を假設として予め持ち込むという論理的誤謬を侵しているのである。

価格と購入量とに関する統計的知識は，限界代替率函数を一義的に確定し，従つて選択指標函数（その単調増加変換群を含む）を確定するけれども，それから効用函数（その常数倍をも含む）を確定することは出来ない。又，内省的観察自体から効用測度を確定することは勿論不可能である。

然らば，フィッシャー，フリッシュ等の測定法は一体何を根拠としているのであろうか。それは既に何度も繰返した如く，所謂エッヂワース的独立財の假定なのである。

以上の論議を更に数学的により厳密に論ずるならば，左の如くなるであろう。

エッヂワース的独立財の假定とは，選択指標が左の如き形を持つことに外ならない。勿論それに任意の常数 a を乗じた指標もまた適格である。何となれば，a を乗ずることは単に測定単位を変更するだけであつて，測度自体を変えるものではないから。

$$\varphi=a\{f(x)+g(y)\} \qquad (1)$$

他方，統計的に確定された選択指標函数群（単調増加変換を含む）を，

$$H(x, y) \qquad (2)$$

とした場合，これを(1)の形に変換する単調増加変換が必ず存在するならば，斯様な変換を採用することは何等新しい假定を導入することにはならない。然し，斯様な変換が存在し得るのは(2)が或る特殊な型を持つ一群の函数に属することを必要とする，とサミュエルソンは言う。(1)

その特殊な函数群とは，左の如きものである。

$$S_y=\frac{k\ (x)}{h\ (y)} \tag{3}$$

経済的に与えられた無差別野が右の型に属するか否かは，勿論これを経済的に確定することが出来る。然し果して(3)が成立すれば，必らずその指標は(1)の如き形を取らねばならぬであろうか？　彼は(3)の解として，左の如き指標函数を与えている。(2)

$$\varphi=\int_a^x h(x)dx+\int_b^y k(y)dy=f(x)+g(y) \tag{4}$$

然し，此の解法には疑問がある。何となれば，(3)は之を左の如き形に改めても，少しも経験的事実には矛盾しない筈である。

$$S_y=\frac{F'\{f(x)+g(y)\}\ f'(x)}{F'\{f(x)+g(y)\}\ g'(y)} \tag{5}$$

これを解けば，

$$\varphi=F\{f(x)+g(y)\} \tag{6}$$

となり，従つて

$$\begin{aligned}\varphi_x&=F'\{f(x)+g(y)\}f'(x)\\ \varphi_y&=F'\{f(x)+g(y)\}g'(y)\\ \varphi_{xy}&=F''f'(x)g'(y)\end{aligned} \tag{7}$$

となつて，$F''\neq 0$ なる場合は(3)は必ずしも独立財たることを保証するものではない。而も $F''=0$ であることを経験的に確める手段は全く存在しないのであるから，統計的に確定された無差別函数の形から，それが独立財であるか否かを検証する手段も亦全く存在しない，と言うことが出来る。

然らばフィッシャー，フリッシュ等の效用測定論者は此の点を如何に処置するか

（註 1）　Samuelson: Foundations of Ecouonic Analysis, p.172.
（註 2）　Do., p.177.

? 彼等は，サミュエルソンの如き数学的検討を全く行わずに，頭から(1)の成立を假安しているのである。

この(1)の假定は，指標の或る特定の値

$$f(x)+g(y)$$

とそれに任意常数を乗ずる変換以外の指標は之を認めない，ということであり，それは取りも直さず，可測量的な，カーディナルな指標だけを採用することに外ならない。則ち(1)の假定を認めることは，效用の可測性を假定することと同義的である。

斯くして証明すべき命題は，(1)を假定することによつて，予めこつそりと持込まれていたのである。

若し将来再び效用測定法を考察しようとする人々が現れるならば，斯様な独立財の假定を使用することなしにこれを考えることを必要とするであろう。

補論 2　二重価格制度下の消費者均衡

現在（昭和23年）吾国においては，大部分の種類の財に就て，公定価格による一定の配給量と，闇価格による不足分の補充的購入とが存在する。此の場合既述の消費者均衡条件は如何に改められるべきであろうか？

i 財の公定価格と配給量とを夫々 p_i, q_i とし，その闇価格と闇購入量とを夫々 π_i，x_i とし，その合計量を Q_i とすれば，一定所得 E を有する消費者の均衡条件は，

$$\sum p_i q_i + \sum \pi_i x_i = E \qquad (1)$$

なる条件の下に

$$u\ (Q_1, Q_2, \cdots, Q_n) \qquad (2)$$

の極大条件を求めることに帰着する。(1)の中，p_i，q_i，π_i，E は所与であり，変数は x_i 丈けであるから，ラグランジュの未定常数 λ を使用すれば，極大条件は

$$u\ (Q_1, Q_2, \cdots, Q_n)+\lambda\{\sum p_i q_i + \sum \pi_i x_i - E\} \qquad (3)$$

を x_i で偏微分して零と置いた聯立方程式

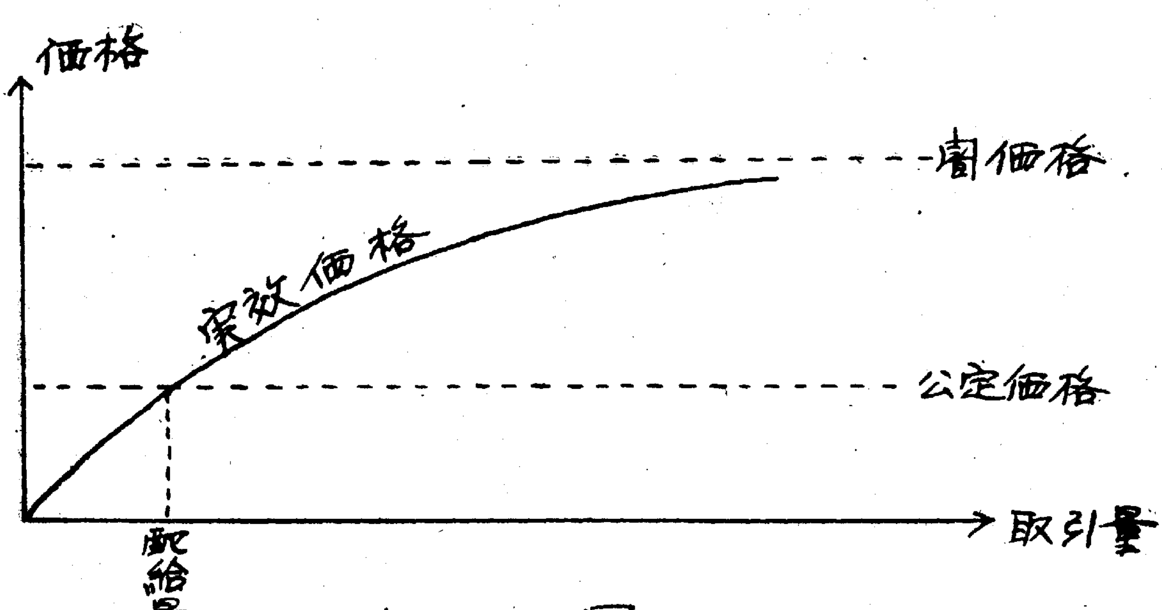
$$u_{xi}(Q_1, \cdots, Q_n) + \lambda\pi_i = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\therefore \quad \frac{u_{xi}(Q_1, \cdots, Q_n)}{\pi_i} = -\lambda \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (4)$$

で表わされる。これを言葉で表現すれば，二重価格制度下の消費者均衡は，各種の財のそれぞれの配給量と闇買量とを合計した量の与える限界効用を，当該商品の闇価格で除した比が均等になる点に於て達成される，ということに外ならない。

従つて右の均衡点は，同じ効用函数を持つ消費者が $\sum Q_i\pi_i$ 則ち，$E+\sum q_i(\pi_i - p_i)$ なる所得を持つて，π_i なる所与価格の市場に於て極大効用を求める場合の，通常の均衡点と全く一致する。則ち二重価格制度の均衡を通常の1物1価の場合に還元するには，各消費者は現実的所得 E の外に假想的所得（補助金）$\sum q_i$（$\pi_i - p_i$）を受けた上で，全購入量を闇市場に於て闇価格1本で購入するものと考えればよい。生産者均衡に於ても同様の考え方が可能である。

これから一つの政策的結論が生れる。則ち，闇値と公価との差額に配給量を乗じた金額を受配者に交付し，又それを供給者から取立てた上で，公定価格を全部撤廃するならば，各財の生産量・購入量は今迄の二重価格制度下のそれと全く変らないであろう。



第五図

又，これは，生産費指数の計算法に対しても一つの示唆を与える。所謂フィッシャーの理想算式は，消費者均衡理論の上に立つているのであるから，そこに

使用される価格は自由価格本でなくてはならず，又その所得も $E+\sum q_i(\pi_i-p_i)$ を使用しなければならない。現在統計局が発表しているＣＰＳは，取引量加重平均価格である所謂実数価格を使用しているが，これは右の観点から見て明かな誤りである。基準時点の実效価格を P_0 とした場合，P_0Q_0 は意味を持つても，P_0Q_1 は無意味である。何となれば P_0 は Q の函数であり，Q_0 が Q_1 に変れば P_0 自身が変らなければならぬこと，上図により明かであるからである。

従つて，フィッシャーの算式も正しくは左の如く改めらるべきである。

$$P_{01}=\frac{\sum\pi_0Q_0\sqrt{\dfrac{\sum\pi_1Q_0}{\sum\pi_0Q_0}\times\dfrac{\sum\pi_1Q_1}{\sum\pi_0Q_1}}-\sum q_1(\pi_1-p_1)}{\sum\pi_0Q_0-\sum q_0(\pi_0-p_0)}$$

(1948年)

(後記) これは8年前，昭和23年に書かれた未発表の論文である。その当時は，ゲーム理論の立場からする新しい效用測定法は未だ知られていなかつた。従つて，今日から見れば原論文に大修正を加えなければならないかもしれない。また，行列式による安定条件と凸性とが恒等的である，ということも，数学者の間には古くから知られていることであつて，何等眼新しい貢献ではない。然し，筆者にとつては，最初の経済学の論文として想い出深いものであり，また，新しく経済学を学ぼうとする学生諸君にとつて，一つの解説的役割を果すことができるであろうと考え，敢えて掲載した次第である。

(昭和31年6月)