

146. 都市領域における距離分布の導出とその応用

Distance distribution in an arbitrary region and its application to the daily trip in Tokyo

腰塚武志*・大津 晶**

Takeshi Koshizuka and Shou Ohtsu

In the present paper, we discuss the measure of the point pairs whose distance are less than a distance r in a given area. By differentiating this measure with respect to r , we get the function $f(r)$ which is called by distance distribution. Using a formula in Integral Geometry, we calculate the distance distribution numerically in an arbitrary region such as governmental districts. Therefore we estimate the distance distribution for the daily trip in Tokyo to compare this with the ordinary method which is measured by center points of districts.

Keywords: distance distribution, uniformly distributed line, distance distribution in an arbitrary region, distance distribution of daily trip in urbanized area

距離分布, 一様な直線, 一般的な領域における距離分布, 都市内移動距離分布

1. はじめに

筆者は, 都市空間を人間が利用するという点から根本的に考察し, 得られた基礎的概念を用いて改めて空間を調べることが必要であると考えている. 詳しい議論は文献 [1] 等にあるので詳述しないが, 中でも基本的なものの一つは距離分布と呼んでいるもので, これは与えられた空間のあらゆる2地点の移動を前提とした距離の全体分布ということになる. 数式で表現すれば, 与えられた空間のすべての平面の任意の2地点を p_1, p_2 (ともにベクトル) とし, その距離を $D(p_1, p_2)$ で表示すれば, 距離 r 以下の2地点のペアの量 $F(r)$ は

$$F(r) = \iint_{D(p_1, p_2) < r} dp_1 dp_2 \quad (1)$$

と表現できる. ここでいう「距離分布」とは, 上記 $F(r)$ を r で微分した

$$f(r) = \frac{dF(r)}{dr} \quad (2)$$

をさすものとする. すなわちこれは距離が丁度 r の2地点ペアの量を, 密度 (4次元量を距離で割ったもの) で表現したものである.

上記の式 (1) における表現は, 概念的にははっきりとして分かり易いが, 実際にこれを計算することは容易ではない. 式 (1) や (2) を陽に関数として表すことができない場合は限られており, 2点 p_1, p_2 が動く領域の形が円や長方形といった単純な場合がこれにあたる. 実際の都市領域は角数の多い多角形で表される不定形なので, この距離分布を不定形でも算出できないいくつかの工夫が必要になる.

そこで本論文では, まずどのような状況でも, 式 (2) を計算できるように, 2章で一般的な議論の枠組みを呈示し, つぎにそれに基づき3章で非凸領域における距離分布の計算法を示す. これには2点 p_1, p_2 がそれぞれ相異なる不定形の領域に存在する場合の計算法も含まれているので, これについても言及する.

以上により, 与えられた領域を分割して, それぞれの領域の内々移動や領域にまたがる移動の距離分布の計算が可能となる. 第4章では, この理論的結果を現実の東京23区に応用し, ODデータを基に東京23区内の現実の移動距離分布を推定し, 従来から行われている方法と比較してみる.

2. 平面の2点と直線上の2点

もしも対象とする空間が平面ではなく次元を落とした線分であれば, (1次元の) 空間における2点は2次元空間における1点と考えられ, これによって結果の理論的な距離分布の導出は比較的簡単である (文献 [2]). これと同じような考え方で, 平面上の2点は4次元空間の1点に対応させて考えることができるものの, 我々は4次元空間を認識できないため平面における距離分布の計算は1次元における計算よりも見通しをたてづらい.

そこで様々な特殊な方法, 例えば Crofton の微分方程式を用いて前章の式 (2) 等を計算できる (文献 [4]) のだが, この方法では円というやさしい図形でしか距離分布を議論できず, 都市や地域の分析に利用するには適当ではない. したがって, 一般的図形すなわち頂点数の多い多角形でも, 距離分布のような4次元量を取り扱うこと

* 正会員 筑波大学 副学長

** 正会員 筑波大学 社会工学系

ができるような道具を探さなければならない。素直に考えつくのは領域 D 内に一樣にランダムに配置した点を基に式 (1) を計算する方法で、点の生成に一樣乱数ではなく準乱数を用いれば、比較的良好な分布が計算できることが文献 [3] に示されている。しかしながらこの方法も、4次元空間の容量を乱数より求めるものであるから、本章で述べる4次元計算を2次元の計算に帰着させる方法と比較すればかなり劣った方法と言わざるを得ないのである。

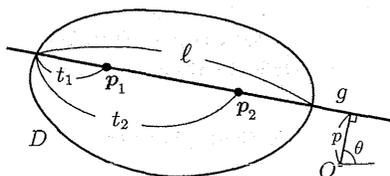


図1: 一樣な直線とその上の2点

ところで積分幾何学分野で Crofton が導いた公式の拡張を議論するとき、次のような変数変換が用いられる。すなわちそれは平面領域 D の2点 p_1, p_2 に関する積分は、図1のようにこの領域 D を通る一樣な直線 g を固定したとき、この直線上の2点の座標 t_1, t_2 で

$$[dp_1, dp_2] = |t_1 - t_2| [dG, dt_1, dt_2] \quad (3)$$

と変換することができる、というものである。ただし dG はこの分野固有の表記法で、この直線 g に原点 O から下ろした垂線の長さを p 、垂線の角度を θ としたときの $dG = [dp, d\theta]$ を表わしている。このように直線ごとにその上の2点について距離の重み $|t_1 - t_2|$ を考え、これを領域に交わる直線についてもれなく求めれば、2次元上の2点を計算したことになる(文献 [5],[6])。

そこで、まず領域 D を通るある直線を固定し、この直線上の領域内での距離の累積分布を $F_g(r)$ とすれば、固定された直線のこの領域 D の内部の長さを ℓ として

$$\begin{aligned} F_g(r) &= \iint_{|t_1 - t_2| < r} |t_1 - t_2| dt_1 dt_2 \\ &= r^2 \ell - \frac{2}{3} r^3 \end{aligned} \quad (4)$$

が導かれる。これを r で微分すれば、この固定された直線上の距離の分布が

$$f_g(r) = 2r(\ell - r) \quad (5)$$

と得られる。これを領域 D を通る一樣な直線すべてに関して積分してやれば、この領域 D 内の2点間の距離の分布を導出することができる。

さて式 (5) について、これが成立するのは $0 < r < \ell$ の範囲であり、これ以外では $f_g(r) = 0$ となっている。

逆に、ある r を固定したとき、この r より小さい ℓ (弦) において求めた距離分布は $f_g(r) = 0$ としておかねばならない。そこで図1において、一樣な直線のこの領域内での長さ ℓ が r よりも大きい直線の集合を G_r で表し式 (5) をこの範囲で積分してやれば、距離分布 $f(r)$ を

$$f(r) = \int_{G_r} 2r(\ell - r) dG, \quad G_r = \{G | r < \ell\}$$

と求めることができる。ここまでの議論は凸領域について成り立つものだが、長さ ℓ も G の関数なので上式を実際に求めるのはそれほど簡単ではない。ただし領域 D が円のときは以下のように比較的容易に議論できる。

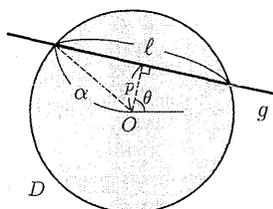


図2: 領域が円の場合

領域の半径を α とすると図2から明らかなように、一樣な直線を考える点 O を円の中心に取れば、弦の長さ ℓ は直線に下ろした垂線の足の長さ p で

$$\ell = 2\sqrt{\alpha^2 - p^2}$$

と表すことができる。また $\ell = r$ のとき

$$p = \sqrt{\alpha^2 - r^2/4}$$

であることから $r < \ell$ において p の範囲は

$$0 < p < \sqrt{\alpha^2 - r^2/4}$$

となる。ゆえに G_r に関する積分は、 p のこの範囲と $0 < \theta < 2\pi$ で

$$\begin{aligned} &\int_{G_r} 2r(\ell - r) dG \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\alpha^2 - r^2/4}} 2r(2\sqrt{\alpha^2 - p^2} - r) dp d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

と書くことができる。そしてこれを計算すると円内の距離分布である

$$f(r) = 4\pi\alpha^2 r \arccos \frac{r}{2\alpha} - 2\pi\alpha r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha}\right)^2} \quad (7)$$

が得られ、Crofton の微分方程式で得られた結果(文献 [4])と一致する。

つぎにこの方法を利用して、不定形領域における距離分布の近似計算を考えよう。近似の程度を見るために半

径 α の円を考え、一様な直線の代表として図3のように半径 (p の範囲) を3分割し、3本の直線 g_i , ($i = 1, 2, 3$) をとる。これらの直線の円内の長さを l_i とすると、式(5)よりそれぞれの直線上の距離分布が得られる。そしてこの円を通過する直線の全長 $2\pi\alpha$ (領域の周長) の $1/3$ の重みをつけてこれを図示すると図4の f_1, f_2, f_3 のようになり、これを足しあわせれば図4の $f^*(r)$ が得られる。これを理論式(7)の $f(r)$ と比較すると、この近似はかなり良いことが分かるだろう(もっともこれは円が角度 θ について一様であることに依るのではあるが)。

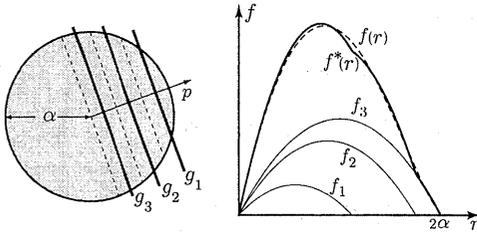


図3: 一様な3直線

図4: 距離分布の近似

3. 非凸領域における距離分布

前述の式(5)は、計算に用いる直線の領域をよぎる部分がすべて領域に含まれる場合のものであった。しかし図5のように対象領域が非凸のとき、直線 g の部分が領域の外に出てしまう場合がある。このような場合についても式(3)を用いて距離分布を導出できることを示そう。

図5のように直線が領域によって2つの線分に分割される場合を考える。起点 O を定め、直線と領域の交点を順番に E_1, E_2, E とし、線分 OE_1 を s_1 , E_1E_2 を s_2 , E_2E を s_3 と名付ける。

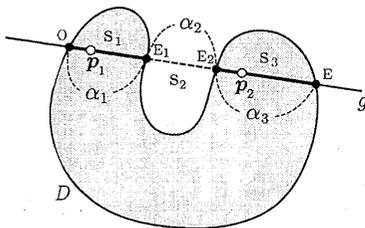


図5: 非凸領域と直線 g

このとき式(3)における p_1, p_2 がそれぞれどこにあるかで場合分けをする。まず p_1, p_2 共に s_1 にあるときは、式(5)より s_1 の長さを α_1 として、 $0 < r < \alpha_1$ で

$$f_{13}(r) = 2r(\alpha_1 - r) \quad (8)$$

となる。同様に p_1 と p_2 が共に線分 s_3 にあれば、 s_3 の

長さを α_3 とし、 $0 < r < \alpha_3$ で以下が得られる。

$$f_{33}(r) = 2r(\alpha_3 - r). \quad (9)$$

さて、問題は p_1 が s_1 に p_2 が s_3 にあるような場合である。ここで s_2 の長さを α_2 とすれば、起点 O より E_1, E_2, E の座標はそれぞれ $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ となり、このとき積分範囲は図6のように $0 < t_1 < \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 < t_2 < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ となっている。ところで、この図6は $\alpha_1 < \alpha_3$ の場合である。 $\alpha_1 > \alpha_3$ の場合は、起点 O を E のところに定めて座標の取り方を逆にし、 t_1 と t_2 を入れ換えれば、 $\alpha_1 < \alpha_3$ の場合と同じ議論ができるので $\alpha_1 < \alpha_3$ として一般性を失わない。

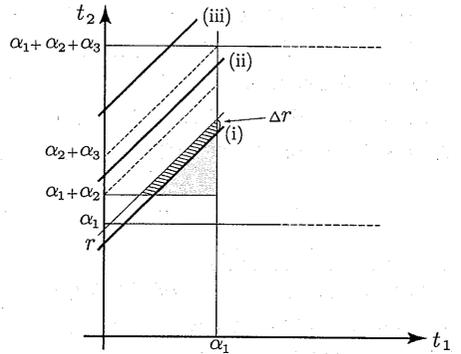


図6: 積分領域

まず (i) $\alpha_2 < r < \alpha_1 + \alpha_2$ のとき、式(4)に相当する積分は、図6の塗りつぶされた領域において

$$F_g(r) = \iint_{p_1 \in S_1, p_2 \in S_3, t_2 - t_1 < r} (t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \quad (10)$$

と表すことができる。これは3次元円形の体積として表現できるが、あとで r で微分することを考慮して、 $r + \Delta r$ の領域から引けば図6の斜線部分となり、 Δr の幅に注意すると、

$$F_g(r + \Delta r) - F_g(r) \simeq \Delta r \int_{\alpha_1 + \alpha_2 - r}^{\alpha_1} r dt_1$$

となり、以下のようなになる。

$$f_{13}(r) = \frac{dF_g(r)}{dr} = r(r - \alpha_2). \quad (11)$$

つぎに (ii) $\alpha_1 + \alpha_2 < r < \alpha_2 + \alpha_3$ のときには、図6で明らかなように以下が得られる。

$$f_{13}(r) = \int_0^{\alpha_1} r dt_1 = r\alpha_1. \quad (12)$$

さらに (iii) $\alpha_2 + \alpha_3 < r < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ のときは、やはり図6から

$$f_{13}(r) = \int_0^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - r} r dt_1 = r(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - r) \quad (13)$$

となる。 p_1 が s_3 に、 p_2 が s_1 にある場合は図6で t_1, t_2 について対称なところに同じ領域が存在するので、 $f_{13} = f_{31}$ が成り立つから、式(8)、式(9)、式(11)、式(12)、式(13)を加えて、

$$f_g(r) = f_{11}(r) + f_{33}(r) + 2f_{13}(r) \quad (14)$$

(ただし $f_{11}(r), f_{33}(r), f_{13}(r)$ は、それぞれ r が定められた範囲以外では0とする)

として非凸領域についても様な直線を介して距離分布を求めることができる。

冒頭にもふれたが、 f_{13} と式(5)を導く考え方をいけば、2点がそれぞれ異なる領域に属したりあるいはそれぞれの点に異なる密度(人口など)を考慮するような場合でも、それぞれ重みを付ければ距離分布が求められることが分かるだろう。そこで、式(11),(12),(13)で表される $f_{13}(r)$ も、様な直線上の距離分布(式(5),(15))の仲間であることを示す意味でつぎのようにしておく。

$$f_g(r) = f_{13}(r). \quad (15)$$

4. 都市内移動距離分布の推定

本章では東京23区の通勤ODの移動距離分布を推定する。用いたデータは平成7年度国勢調査(文献[9])から東京23区内の通勤OD(総数3,463,502人)を抽出したもので、276ODペアに集計してある。

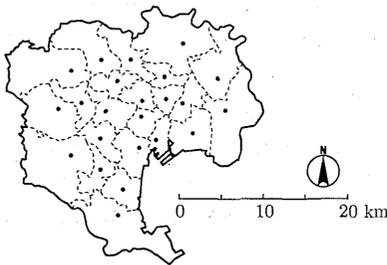


図7: 東京23区の代表点(区役所)

4.1. 代表点間距離を用いた推定法

与えられたODデータの通勤移動距離分布を得るには、図7に示したすべての区の組み合わせについて代表点間の距離を測り、対応するODペア数を乗じて度数分布を推定する方法が最も単純であるが、この方法では区の内々移動の距離が0として計算されるという問題点がある。文献[7]によれば区内の移動の発生・集中が領域内で偏りがなくと仮定したときの平均移動距離 $E_{内々}(r)$ は、図8に示す対象領域の凸包 C の周長 L_C に比例し、以下の関係が成り立つ。

$$E_{内々}(r) \approx 0.13 L_C. \quad (16)$$

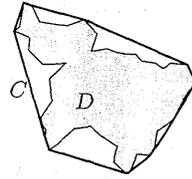


図8: 領域Dと凸包C

さらに文献[8]では、相対的に近接する領域間の平均移動距離 $E_{近接}(r)$ は、図9のように代表点間距離を h 、それぞれの領域と面積を同じくした円の半径を α_i, α_j として、

$$E_{近接}(r) \approx h + \frac{\alpha_i^2 + \alpha_j^2}{8} \cdot \frac{1}{h} \quad (17)$$

でかなり程度の良い近似ができることが示されている。

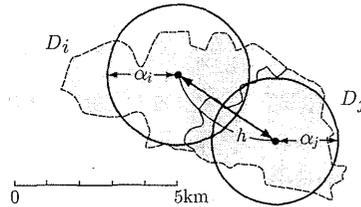


図9: 等面積円を用いた近接領域間の平均移動距離

代表点間距離をそのまま用いた移動距離分布と、内々移動については式(16)、隣接する領域間の移動については式(17)を用いて補正した移動距離分布を比較すると、図10のようになり、短い移動距離の不自然さが解消されることが分かる。

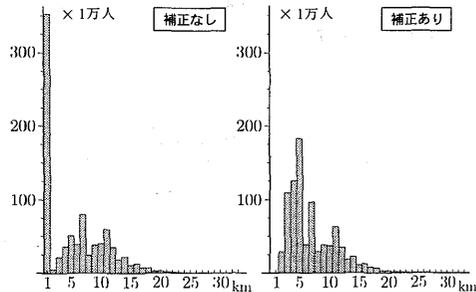


図10: 補正の有無による移動距離分布の比較

4.2. 様な直線を用いた推定法

つぎに第2,3章で述べた、様な直線を用いた計算方法による移動距離分布の推定を示そう。

第1章で述べたように、一般の多角形領域などを分析対象とした場合、式(6)が表す距離の全体分布を陽に計算する事ができない。したがって、この領域を“適切な本数”の様な直線について総量で調整した重みをつけ

て距離分布を計算し、これらを足しあわせることで全体の移動距離分布を近似的に得ることにしよう。しかしながら“適切な本数”は、領域の形状に依存し先験的には与えられないので、図11のような(理論分布式が得られる)長辺 a 短辺 b の矩形領域を例に、相対誤差に注意しながらもっともらしい分布が得られる直線の本数に“あたり”をつけておこう。

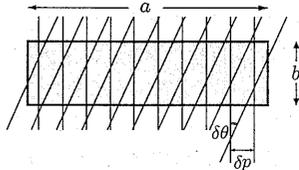


図 11: 直線の間隔と角度

直線の配置には様々な方法があるが、ここでは最も素朴に 2π を等分する一定の角度で回転させた等間隔の平行線を用いることにする。直線の間隔を δp 、角度の刻みを $\delta\theta$ とする。計算機を用いて $\delta p = a/10, a/20, a/50$ 、 $\delta\theta = \pi/4, \pi/8, \pi/16, \pi/32$ のように変化させて求めた近似分布 $\hat{f}(r)$ と真の分布 $f(r)$ の相対誤差 ϵ を

$$\epsilon = \int \frac{|\hat{f}(r) - f(r)|}{f(r)} dr \quad (18)$$

と定義し、すべての $\delta p, \delta\theta$ で近似距離分布を求め誤差を計算すると図12のようになる。図の横軸は(結果的に)領域に交わった直線の本数である。

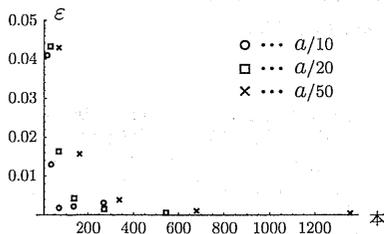


図 12: 相対誤差の分布

図12を見ると、直線の間隔および角度の刻みを小さくするほど大域的に誤差が小さくなる傾向があることが分かる。直線の本数に対して誤差が単調に減少してないところがあるが、これは領域形状と直線配置の相対的な位置関係によるものであり、実はこの例のような対称性を持つ領域に対してはこの直線配置は好ましくない。つまり、同程度の本数の直線配置でも直線の間隔・角度いずれかを極端に“粗く”してしまうと領域形状と直線配置の関係で誤差が大きく出る可能性があることが予想される。実際に計算する領域形状は長方形より複雑であることを考慮して、今回は $\delta p = a/20, \delta\theta = \pi/16$ の

規則的に配置した直線群を用いる。このときの近似分布と理論分布を描くと図13のようになり、図4と見比べても十分な精度と考えると良いだろう。

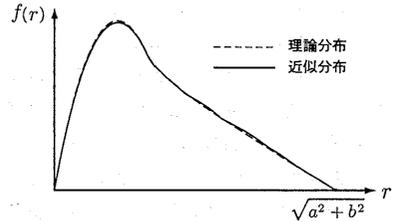


図 13: $\delta p = a/20, \delta\theta = \pi/16$ のときの近似分布

a については図14のように、計算対象地域を覆うことができる長方形のうち、長辺が最も短くなるものの長辺の長さを用いる。

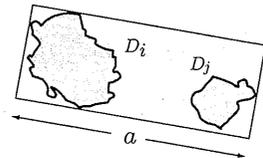


図 14: 領域間の距離分布を数値計算する方法

以上で様な直線を紹介して移動距離分布を計算するための準備はすべて揃ったことになる。前述の東京23区の通勤ODの重みをつけた276ペア(内々移動も含む)の領域間の移動距離の分布を重ねて図示すると図15のようになる。図中の太線で表した分布は、A) 足立区内々の通勤ODとB) 杉並区千代田区間の通勤ODである。

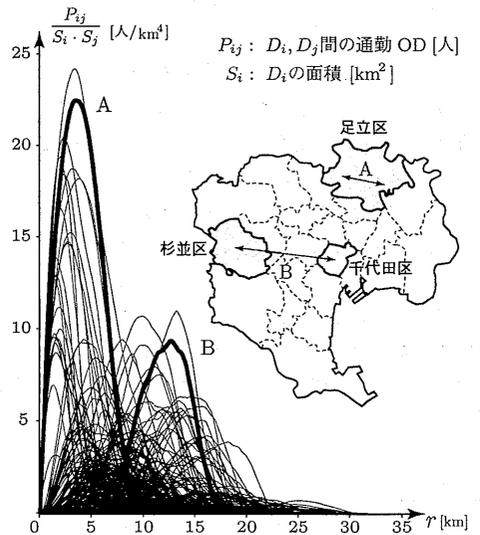


図 15: ODペアごとの距離分布

図15のすべての分布を足し合わせ、これを全ODペアの量で基準化すれば東京23区全体の通勤移動距離分布が得られることになる。図16は、このようにして導

出した移動距離分布のグラフと、図10で示した補正済み代表点間距離分布のヒストグラムを、総量が1になるように標準化して重ねたものである。これを見ると、平均値の違いはあまり無いものの、連続分布の方が滑らかで且つ裾野が広い分布をしていることが分かる。従来の方法で得られる分布は、図16のヒストグラムのように実際より短い方に頻度が高く出る傾向がある。東京都における区を単位とした地域分割は、図15を見ても明らかかなように、大きさにかなりばらつきが存在する。そして大きい区同士のペアの（全体の）距離分布を考える場合、代表点間の距離に縮約することによって省略されてしまう部分を無視できないことが分かるだろう。

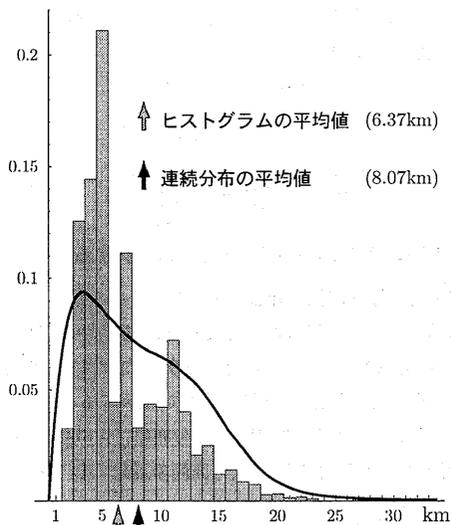


図16: 移動距離分布の比較

一方、連続分布にも問題がないわけでない。区内や区をまたぐ移動の起終点は現実には一様ではないことである。この方法では、起終点が一様に分布するとしても差しつかえない程度に細かく対象地域を分割すれば、正しい分布が得られることは議論の過程から明らかなので、逆に言えば図16に示した分布はこの一様性が保証されない点において真の分布と異なっていることになる。とはいえ、より真の分布に近いものとして連続分布を導き、これをもとに従来の方法を評価できたことは収穫だと思っている。

5. おわりに

本論文では、これまで単純な図形でしか求められなかった距離分布について、数値的ではあるが厳密に導出する方法を呈示した。式(1)と変数変換の式(3)を用いれば、距離分布は一様な直線を介した関数型として式(5)、あるいは式(11),(12),(13)のように簡潔な2次式と1次

式の足し算（厳密には積分）で表現できるのである。このことは、つまるところ4次元の計算を次元を落として2次元の計算にできるということを示しており、我々の分野の多くの人達が活用すべきものと考えられる。

第4章では本来、式(1)に対応するものとして地点 p_1 から p_2 に移動する量を密度 $\mu(p_1, p_2)$ で表し、

$$F(r) = \iint_{D(p_1, p_2) < r} \mu(p_1, p_2) dp_1 dp_2 \quad (19)$$

として議論すべきものであった。前半で $\mu(p_1, p_2) = 1$ としたのは、現実をシミュレートするものではなく、文献[1]や[2]などで論じられているように、あくまで移動から見た空間そのものの性質を論じるという意図によるものである。東京23区の例は、点 p_i が i 区、点 p_j が j 区にあるとして $\mu(p_1, p_2) = C_{ij}$ と置いた式(19)を計算したことになり、別な言い方では4次元の領域をいくつかの部分領域に分け、実際の調査データを用いてそれぞれに C_{ij} という重みをつけたことに他ならない。結果として得られた予想外に滑らかな分布の2つの“こぶ”は、全体で一様に近い移動と、都心3区（あるいは新宿も含む）への通勤移動の合成により生じるものと推察でき、従来の方法ではとてもこのような予想はできないと考えられる。紙面の都合もあるので、この厳密な分布を基にした展開は今後の課題としておきたい。

なお本研究は、文部科学省科学研究費補助金基盤(B)(2)12480103の助成を受けた。また第4章で示した東京23区のODデータを用いた近似移動距離分布の計算と結果の図は、傍島久弥氏（株式会社 三井情報開発）の手によるものである。

参考文献

- [1] 腰塚武志 (1998): 移動からみた都市空間の分析. 日本学術会議第1回生活環境設計シンポジウム講演論文集, pp5-10.
- [2] 腰塚武志 (1999): 移動からみた放射状と格子状ネットワークの比較. 日本都市計画学会学術研究論文集, 第34号, pp.763-768.
- [3] 腰塚武志, 出水田智子 (1997): 不定形と内々距離分布. 形の科学会報, 第12巻第3号, pp.26-27.
- [4] 谷村秀彦, 腰塚武志他 (1986): 都市計画数理, 朝倉書店.
- [5] 腰塚武志 (1976): 積分幾何学について (3): オペレーションズ・リサーチ, 11月号, pp.654-659.
- [6] L.A. Santaró (1976): *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley, Massachusetts.
- [7] 腰塚武志 (1978): 地域内距離. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.21, No.2, pp.302-319.
- [8] 栗田 治, 腰塚武志 (1988): 領域間平均距離の近似理論とその応用. 日本都市計画学会学術研究論文集, 第23号
- [9] 総務庁統計局 (1996): 平成7年度国勢調査.
- [10] 腰塚武志 (1998): 一様な直線を介して4次元を2次元から見る. 日本OR学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp.30-31.
- [11] 傍島久弥 (2000): 距離分布を用いた都市内移動距離の推定. 筑波大学社会工学研究科修士論文.