最小二乗法をめぐつての若干の覚書

竹内　清

1

統計的手法を種々の分野へ応用する場合，われわれは，まずそこに設定されている前提条件が現実の場において果して妥当しているかどうかを吟味しなければならない。もしその前提条件が現実の場において満たされていない場合には，その統計的手法を利用して得たところのもつともらしい形をした分析結果は，形式的な皮相的なものとなり，実際目的のためには価値の少いものとなるかもしれず，或は時にはかなりの危険を伴う場合も少くはないであろう。

その様な場合，その前提条件を満す様な現実の場を作りだすことが可能であることもあり得るであろう。実験計畫において randomization 等の考案によつて確率の場を作り出すのは，その一例である。しかしそれが可能でない場合も存在する。その殆んどが非実験的データより成る経済データを用いての経済分析の場合はそうである。経済分析に統計的手法を応用する際は，経済理論並びに過去の一般的経験を援用して，実験計畫の場合との類似性を確保した上でそれを用いることが必要となる。

およそいかなる理論も，その前提条件が緩ければ緩い程，その適用範囲は広くなる。そこで上述の問題も，前提条件を緩めることによつて解決の方向へもつていくのは一つの方法である。しかしこゝに一つのジレンマがある。例えば non-parametric な方法は parametric な方法よりも，一般的な性格をもつている。しかしもし parametric な方法における前提条件が満たされている場合には，parametric な方法にもとづく分析結果の方が，non-parametric な方法にもとづく分析結果よりも，一般に精度がよく，無駄が少い。そこでわれわれの態度は，理論的な一般化への道を指向すると共に，問題とするそれぞれの特定分野に関して，理論面と実際面との対決を通じて，必要情報の究明により

理論の特殊化を狙うことが必要となるであろう。

この覚書は，統計的手法を実際に応用する場合の前提条件の吟味ということを頭におきながら，計量経済学における最小二乗法をめぐる若干の問題点を素描したもので，今後の展開の手がかりを求めたものである。

2

近代統計学は，今世紀前半 R. A. Fisher を基点とし，J. Neyman, E. S. Pearson を経，更に A. Wald 等を通じて輝かしい発展の道を歩んできた。近代統計学発展の背後には歴史的，社会的要請が存在していたのであるが[1]，なかんずくそこには実験の場があり，実験的データを素材としての理論構成並びに応用がなされてきたことを忘れてはならない。従つて，それは生物学，遺伝学等の自然科学の分野で大部分培われてきた。ところで経済学等の社会科学の分野で得られる大部分のデータの性格は非実験的なものであるところに，近代統計学において展開された極めて精巧な武器たる統計的手法を形式的にそのまゝ適用した場合の危険が内蔵されているものと考えることができるであろう。

近代統計学の思考方法はいかなる論理構造をもつているか，R. A. Fisher の線に沿つてみれば，統計的推理は，仮説の規定，推定の問題及び仮説検定の三つに分けて考えることができるであろう。[2] A. Wald の統計的決定函数論の立場からは，危険という概念を導入し，推定，検定の問題を二段階の問題としてゞなく，単一の問題として統計的推理の問題をより一般的に取り扱うことができるが[3]，こゝでは直接的に関係しないので以下においては触れないことにする

仮説の規定では，データが生成されるところのメニズムをモデル化する。これはデータを統計的に処理分析するための基礎を形成する。そこでは，問題の理論的な関係を構成する因果的な仮定と，誤差項に関する仮定との二つの構成部分から成つている。実験の場においては，何が原因変数であり，何が結果変数であるかその因果関係は，実験の設計からして明確に把握される性質のもの

1) 例えば，A. Wald の sequential analysis は今次大戦を契機とし，また品質管理は大量生産方式にその発生発展の母胎を汲みとることができるであろう。

2) R. A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, 1950, 11th ed., p.8,

3) A. Wald, *Statistical Decision Functions*, 1950.

である。因果的な仮定は，問題の主題を形成するものであり，これは通常対象に関する実質科学の観点，或は過去の一般的経験等をもとにして設定される。実験的な状況の下においては，実験のメカニズムは，その様な因果的仮定を検定ないし証明する様に設計される。コントロールできない要因，或は取り上げなかつた要因の影響は randomization 等の考案により中立化される。これは非実験的データを取り扱う社会科学の殆んどの場合と根本的に相違するところである。

誤差項に関する仮定は，観測値と理論値の間の偏差についての解釈を与えるので，これもまた主題の内容を構成する一部である。同時にそれらは，推定及び仮説検定のための統計的手法の理論的基礎を与え，因果的仮定を補充するものである。誤差項の性格は，結果変数に影影を及ぼすと考えられる要因のすべては取り上げなかつたことに基因する誤差——これは方程式の誤差或は規定の誤差と呼ばれる——の外に，観測の誤差が考えられるであろう。従つて誤差項に関する仮定には，この両者が同時に取り入れられなければならぬであろうが現段階における統計的手法の不完全さの故に，規定の誤差だけを取り上げて論ずる場合が多い。

誤差項の性質が，因果的仮定を表現する方程式のパラメーターの推定，検定，並びに目的変数の推定，予測に基本的な役割を演ずるのであるから，誤差項が仮定した性質をもつているかどうか，標本データをもとにして検証した上で使う必要がある。既述の如く，この誤差項の性質が一般的であればある程，それの適用範囲は広く，それが厳しければ厳しい程，その適用範囲は狭くなる。仮定された誤差項の性質が厳しい場合，もしそれが実際に満たされているならば，それを使つて分析した結果は，それより緩い仮定のもとに導出される結果より一般に望ましいものが得られる。

こゝで因果的仮定といつたのは，実験的な状況の下でそれが設定されたからである。非実験的な状況をも含めてならば，理論的仮定といつた方がより適切であろう。理論的仮定を表現したモデルを理論的モデル，それに誤差項を附加したものを統計的モデルと呼ぶことにしよう。これを経済学の場に適用するならば，理論的モデルの段階は数理経済学に対応し，統計的モデルの段階は計量

経済学に対応する。

3

経済変数間の相互関係の計量経済学的把握の仕方には，その因果的関係に重点をおいて逐次体系を構成する H.Wold を中心とする立場[4]と，その相互依存関係に重点をおいて構造方程式体系を構成する T.C.Koopmans 等を中心とする Cowles Commission 流の立場[5]の二つを区別することができるであろう。この様な立場の相違は，必然的にモデルを表現する方程式体系の内容の相違をもたらす。形式的には，前者は後者の特別の場合とみなすことができるが，変数間の具体的内容関係が異る。すなわち，逐次体系においては，変数は一方的因果関係によつて結ばれているが，構造方程式体系では，体系内で決定される内生変数間の関係は因果関係ではなくして相互依存関係によつて結ばれている。

方程式のパラメーター推定に関し，逐次体系においては，各方程式に対し，因果関係の順序に対応し，単独に逐次最小二乗法を適用する。構造方程式体系では，最尤法を用いてパラメーターの推定を行うのが持論である。

理論的モデルとして逐次体系をとるか，構造方程式体系をとるかは今なお論争中のところであるが[6]，一般的抽象的な水準においてこれは論議できないのではなかろうか。ある場合には逐次体系の方がより，適切であろうし，またある場合には構造方程式体系の方がより適切であろう。

こゝでは前節で触れた誤差項の性質と関連した理論的モデルのパラメーターの推定に焦点を合わせるのが目的であるから，何れの理論的モデルがよいかという問題には深く立ち入らないことにする。

こゝで，以下の論議を明確にし，敍述を簡単化するために，最小二乗法に関する若干の定理の結果とその前提条件をあげておこう[7]。

---

4) 例えば，H. Wold, *Demand Analysis*, 1953.

5) 例えば，Wm. C. Hood & T. C. Koopmans, ed., *Studies in Econometric Method*, 1953.

6) 例えば，H. Wold,「Causual Inference from Observational Data」, *Journal of the Royal Statistical Society* (*A*) Vol.119, Part 1, 1956, pp.28—60 参照.

7) 例えば，T. C. Koopmans & Wm. C. Hood,「The Estimation of Simultaneous Linear Economic Relationships」, Wm. C. Hood & T. C. Koopmans ed., ibid., pp.132—133参照.

條　件

(1.a)「残差は互に独立に，平均0，分散 σ^2 をもつて正規分布をする。」

次は（1.a）の正規分布という条件を落し，条件を緩めてある。

(1.b)「残差は互に独立に，平均0，分散 σ^2 をもつた確率変数である。」

従つて（1.a）は（1.b）の特別の場合として含まれる。

次は残差と独立変数（説明変数）との間の関係を規定したものである。

(2.a)「説明変数は外生変数だけを含み，従つて各残差は外生変数と独立に布分する。

次は説明変数として外生変数だけでなく時差を伴つた内生変数を含む場合である。」

2.b)「説明変数は既決変数（すなわち，外生変数と時差を伴つた内生変数）を含み，そして残差は独立に分布しているので，既決変数の同時値或は先行値とは独立に分布する。」

従つて（2.a）は（2.b）の特別の場合として含まれる。

定　理　の　結　果

(1)「条件（1.a）が満たされる場合には，最小二乗推定値は最尤推定値と一致する。」

(2)「条件（1.a）と条件（2.a）が満たされる場合には最小二乗推定値は，一致・不偏・有効推定値であり，従つてまた最良線型不偏推定値となる。」

(3)「条件（1.b）と条件（2.a）が満たされる場合には，最小二乗推定値は一致推定値である。それらはまた最良線型不偏推定値でもある。」

(4)「条件（1.a）と条件（2.b）が満たされる場合には，最小二乗推定値は一致推定値であり，また漸近的に有効である。」

(5)「条件（1.b）と条件（2.b）が満たされる場合には，最小二乗推定値は一致推定値である。」

4

Cowles Commission 流の連立方程式接近の立場からする，単独に単一方程式に適用された最小二乗法に対する批判の一つは，そのモデル構成法と関連し

て最小二乗推定値が偏りをもつという点にある。これに対する反批判の急先鋒は H. Wold であり，彼は経済諸変数間にみられる因果関係を強調し，たとい方程式の形は連立方程式であるにせよ，逐次モデルを構成し，各方程式に逐次最小二乗法を適用してパラメータの推定を行つても，最小二乗法適用の前提条件が満されている限り，その推定値は Cowles Commission 流の意味での偏りはもつていないとする。

連立方程式接近におけるパラメーターの推定法としては，最尤法が最良のものと考えられている。しかし最尤法を適用するためには，誤差項並びに内生変数に関する分布を規定した上で，尤度函数を構成し，それが最大になる様にパラメーターが推定されなければならない。すなわち，誤差項並びに内生変数に関する分布函数が陽表的に分つていなければ，尤度函数を陽表的には構成できない。この意味において最尤法は distribution-free の方法ではない。通常最も多くなされる仮定は，誤差項の分布に関する正規分布のそれである。しかし経済量の場合これはかなりきつい条件となる場合が少くはないであろう。たといその仮定が成立するとしても，実際に最尤法を適用してパラメーターの推定をなすには，かなり計算手続が面倒で複雑となる。

そこで実際上の観点から，誤差項の正規分布に関する仮定をもつと緩いものにすると同時に，計算の簡単化を狙つた方式が実際には多く用いられることになる。

普通なされる方式は，連立方程式——構造方程式——をそれぞれ内生変数に関して解いた，所謂誘導形式を導き，それについて最小二乗法を適用して誘導形式のパラメーター——それは構造母数の函数になつている——を推定し，それらの推定値間の関係を利用して元の構造母数の推定値が求められる。この場合構造方程式が適度認定の条件を満しているならば，誘導形式を通じて推定された構造母数の推定値は一致推定値となる。

更に，同時には元の構造方程式の情報を全部は利用せず，問題とする方程式のみを分離して取り扱う制限情報最尤推定法もしばしば使われる。

われわれがある統計的手法を用いる場合，その前提条件が応用の場において果して妥当するかどうかを吟味し検証した上で使わなければならないが，この

様な検証を行わずに，形式的に応用し，もつともらしい分析結果を出している例を往々にして見うける。例えば，正規分布の仮定が許容されない場合において，パラメータの推定値に関する，正規分布をもとにした種々の検定を行つたり，或は信頼限界を出したとしても，その様な結果に対して，われわれはどこまで妥当なもので信頼のおけるものか客観的な判定を下すことはできないであろう。これは distribution-free でない推理法のすべてに共通する問題である。勿論，完全情報最尤推定値についても，また制限情報推定値についてもいえることである。

正規分布に関連しては中心極限定理の果す役割は極めて大きい。算術平均の如き統計量は，たといもとの分布が何であろうと，中心極限定理の条件を満す限りその正規分布への収斂の速度はかなり速い。従つてこの様な場合にはかなり小さな標本でもその様な統計量に関し，正規分布の仮定をおいて分析してもその結論はかなり客観的に保証されたものと考えることができる。

最尤法適用に当つて最もしばしばなされる誤差項の正規分布の仮定とも関連し，**H. Chernoff** 及び **H. Rubin**[8]は，通常の制限情報最尤法を拡張し，誤差項の分布に関しては次の様な条件の緩和を行う。

(1) 線型体系の係数，(2) これらの推定値の共分散行列，(3) 誤差項の共分散行列，の推定に関連した制限情報最尤推定において，誤差項 u_t に関する条件は通常(1) u_t は既決変数とは独立に分布する，(2) u_t の分布はすべての t に対して同じである，(3) u_t の分布は平均 0 の正規分布である，(4) u_t は $t \neq \tau$ なる u_τ とは独立に分布している，(5) $\Sigma = E(u'_t u_t)$ は nonsingular である，ということである。ところでこれらの条件は実際にはしばしば成立しない。そこで彼等は，これらの条件を緩める様，8個の条件をおく，その中第7の条件として次のものを設定する。

$\sqrt{T}M_{qz}$ の要素は漸近的に正規分布をする。

こゝに

8) H. Chernoff & H. Rubin,「Asymptotic Properties of Limited Information Estimates under Generalized Conditions」, *Studies in Econometric Method* 1953, pp.200—212.

$$M_{qz}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}q'_t z_t$$

で，z_t は既決変数，q_t は問題とする方程式群の誤差項。z_t も q_t も共にベクトルで，q_t のダッシュは転置を表わす。第7の条件は，中心極限定理の見地からすれば，q 及び z に関してかなり弱い制限であるとする。しかし漸近的ということは，任意の n について成り立つのではなく，大標本の場合にその妥当性が保証されるものである。t 分布も $n\to\infty$ の時は正規分布になる。だからといつて t なる統計量が恰も正規分布するかの如くに小標本を取り扱えば誤りであることは周知のことである。経済時系列の場合，われわれはこの様な漸近性によつて保証されるに充分な程多くのデータをもたないのが普通といえるだろう。通常漸近性に関連した定理を利用する際は，収斂の速度を吟味すると共に，一般には大標本の場合における保証が与えられているにすぎないことを忘れてはならないであろう。

多くの人が，経済関係式の場合の誤差の正規分布という仮定に疑問を持ちながらも，実際上の操作，その他の便宜性から，これを深く反省することなしに用いて分析を行つている。最尤法を用いる場合の誤差項の分布の仮定は殆んど正規分布で，それをもとにして尤度函数を構成している。もし誤差項が仮定通りの分布を実際にしているならば，最尤推定値は，現在のところでは統計的に最も望ましい性質を有するものである。もしこの仮定が満たされない場合にはこの仮定が満たされる様にモデルを再構成するか，或は正規分布という仮定を取り除いたもつと緩い仮定——例えば前節の条件（1.b）の如き——を設定することである。

そこで distribution-free の方法としてのこの様な最小二乗法は，この意味においてはより一般的な方法ということができるであろう。

5

構造方程式体系中の任意の構造方程式の係数——構造母数——を最小二乗法を用いて推定した値は一般に一致性をもたないとされる。例えば，次の例を考えよう。[9]

9) T. C. Koopmans & Wm. C. Hood, ibid., pp. 134—135.

(1)　$y_{1t}+\beta_{12}y_{2t}+\gamma_{11}z_{1t}\qquad+\gamma_{10}=u_{1t}$（需要）

(2)　$y_{1t}+\beta_{22}y_{2t}\qquad+\gamma_{22}z_{2t}+\gamma_{t0}=u_{2t}$（供給）

$(t=1,\ 2,\cdots\cdots,T)$

但し，$\beta_{12}\neq\beta_{22}$。

こゝに，yは内生変数，zは外生変数，β,γは構造母数，uは誤差項とする。こゝでは y_{1t} = 農産物数量，y_{2t} =価格，z_{1t} =所得，z_{2t} =降雨量で，(1)は需要方程式，(2)は供給方程式を表わしている。

上式をyに関して解けば，次の誘導形式が得られる。

(3)　$y_{1t}-\pi_{11}z_{1t}-\pi_{12}z_{2t}-\pi_{10}=v_{1t}$

(4)　$y_{2t}-\pi_{21}z_{1t}-\pi_{22}z_{2t}-\pi_{20}=v_{2t}$

但し，

(5)

$$\pi_{11}=\frac{-\beta_{22}\gamma_{11}}{\beta_{22}-\beta_{12}},\quad \pi_{12}=\frac{\beta_{12}-\gamma_{22}}{\beta_{22}-\beta_{12}},\quad \pi_{10}=\frac{\beta_{12}\gamma_{20}-\beta_{22}\gamma_{10}}{\beta_{22}-\beta_{12}},$$

$$\pi_{21}=\frac{\gamma_{11}}{\beta_{22}-\beta_{12}},\quad \pi_{22}=\frac{-\gamma_{22}}{\beta_{22}-\beta_{12}},\quad \pi_{20}=\frac{\gamma_{10}-\gamma_{20}}{\beta_{22}-\beta_{12}},$$

$$v_{1t}=\frac{\beta_{22}u_{1t}-\beta_{12}u_{2t}}{\beta_{22}-\beta_{12}},\quad v_{2t}=\frac{u_{2t}-u_{1t}}{\beta_{22}-\beta_{12}}\ 。$$

(4)を験べてみると，(5)から分る様に，v_{2t} はu_{1t} と u_{2t} の一次結合であるので，y_2 は一般に u_{12} に統計的に依存している。従つて(1)の構造方程式に着目した場合，y_{2t} と u_{1t} が独立でないから，3節で述べた様に，最小二乗法に関する定理の条件（1.b）がかりに満たされていても，条件（2.a）が満たされていないので，この場合，最小二乗推定値が一致性をもつための充分条件を満たしていないことになる。同様にして，(3)と(5) から分る様に，y_2 もまた u_2 に一般に統計的に依存している。従つて(1)の構造方程式と同様，(2)の構造方程式に関しても最小二乗推定値の一致性をもつための充分条件を満たしていないとする。

また推定値の偏りに関しては次の様な論法で進む。[10] こゝでは(1)のβ_{12}の推定に関し，(1)を単独に用いた場合の最小二乗推定値の偏りについて考える。β_{12}の最

10)　例えば，J. Bronfenbrenner,「Sources and Size of Least-Squares Bias in a Two-Equation Model」, *Studies in Econometric Method*, 1953, pp. 221—235, 参照

小二乗推定値 $\overset{(1)}{b}_{12}$ は，y_1 を従属変数として選べば，次の値に確率収斂する（記号で $\operatorname*{plim}_{T\to\infty}$ と表わす）。

$$(6)\quad \overset{(1)}{\beta}_{12} = \operatorname*{plim}_{T\to\infty} \overset{(1)}{b}_{12} = \operatorname*{plim}_{T\to\infty} - \frac{\overset{0}{m}_{y1y2}}{\overset{0}{m}_{y2y2}},$$

但し，

$$(7)\quad \overset{0}{m}_{y_1y_j} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{1t}\,y_{jt} - \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} y_{1t}\sum_{t=1}^{T} y_{tj}\,。$$

これに(3)，(4)の誘導形式の結果を代入して整頓すれば，β_{12} の最小二乗推定値の確率極限として次の結果を得る。

$$(8)\quad \overset{(1)}{\beta}_{12} = \frac{\beta_{22}\sigma_1{}^2 - (\beta_{12}+\beta_{22})\,\sigma_{12} + \beta_{12}\sigma_2{}^2 + \beta_{12}\gamma_{22}{}^2\mu_{z_2{}^0 z_2{}^0}}{\sigma_1{}^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2{}^2 + \gamma_{22}{}^2\,\mu_{z_2{}^0 z_2{}^0}}$$

但し，

$$\mu_{z_2{}^0 z_2} = \mu_{z1z1} - \frac{\mu^2{}_{z1z2}}{\mu_{z1z1}}$$

は z_2 の z_1 に対する最小二乗回帰からの残差 $z_2{}^0$ の分散を表わす。

従つてこの場合における漸近的な偏りとして次の結果が得られる。

$$(9)\quad \overset{(1)}{\beta}_{12} - \beta_{12} = \frac{(\beta_{22}-\beta_{12})\ (\sigma_1{}^2 - \sigma_{12})}{\sigma_1{}^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2{}^2 + \gamma_{22}{}^2\,\mu_{z_2{}^0 z_2{}^0}}\ 。$$

この様な偏りの生じた原因としては，y_2 の変動が決定的な役割を演じている。それは y_2 の変動がどの様な変動群から成るかを見れば明らかになる。z_2 を z_2 及び $z_2{}^0$ で表わせば，(4)から

$$(10)\quad y_2 = \frac{1}{\beta_{22}-\beta_{12}}\left[\left(\gamma_{11} - \gamma_{22}\frac{\mu_{z1z2}}{\mu_{z1z1}}\right) z_1 - \gamma_{22} z_2{}^0 - (u_{1t} - u_{2t})\right] + \eta$$
$$= \overset{(z_1)}{y_2} + \overset{(z_2{}^0)}{y_2} + \overset{(u)}{y_2} + \eta$$

但は，η は定数部分を表わす。

(10)は y_2 を変動源別に分解したものと考えることができよう。(9)の分母子を $(\beta_{22}-\beta_{12})^2$ で割ると，分子は $(\sigma_1{}^2 - \sigma_{12})\,/\,(\beta_{22}-\beta_{12})$ となり，これは u_1 と $y_2{}^{(u)}$ —— y_2 の説明されない成分——の共分散の絶対値を表わす。従つて偏りは，u_1 と y_2 の成分で u_1 と u_2 に依存する部分との間の共分散 cov $(u_1,\ y_2{}^{(u)})$ に比例する。$y_2{}^{(u)}$ はその成分をみると分る様に，u_1 と u_2 の一次結合である。

従つてこれら二つは偏りへの寄与をなしている。但し，u_2 の場合は$\sigma_{12} \neq 0$ の場合に限る。これら二つの偏りの源泉も，(9)から明らかな様に，$\sigma_{12}=\sigma_1{}^2$ の場合に限つて，互に相殺する。

また y_2 の定数部分を除いた三つの成分は相互に独立であるので，y_2 の分散は次の様に分解される。

(11)　$\mathrm{var}\,(y_2) = \mathrm{var}\,(y_2{}^{(z_1)}) + \mathrm{var}\,(y_2{}^{(z_2{}^0)}) + \mathrm{var}\,(y_2{}^{(u)})$ 。

(9)の分母を $(\beta_{22}-\beta_{12})^2$ で割つたものは，$y_2{}^{(z_2{}^0)}+y_2{}^{(u)}$ の分散であるから，偏りは，$\mathrm{var}\,(y_2{}^{(z_2{}^0)}+y_2{}^{(u)})$ に反比例することが分る。

かくして偏りは，次の公式にまとめられる。

(12)　$$\hat{\beta}_{12}-\beta_{12}=\frac{-\mathrm{cov}\,(u_1,\,y_2{}^{(u)})}{\mathrm{var}\,(y_2{}^{(z_2{}^0)}+y_2{}^{(u)})}=\frac{-\,\mathrm{cov}\,(u_1,\,y_2{}^{(u)})}{\mathrm{var}\,(y_2{}^{(z_2{}^0)})+\mathrm{var}\,(y_2{}^{(u)})}$$ 。

この様にして方程式体系内の一方程式に単独に直接的に最小二乗法を適用した場合の偏りを算出し，方程式体系を同時的に考慮した上での最尤法によるパラメーター推定の優越性に対しての統計的な面からする主張の一つの根拠としている。

6

前節における如き批判に答え，かつ自論の優越性を主張する H. Wold の議論は次の様なものである。[11)]

H. Wold は，経済関係の動態的な分析手法としては，構造方程式系体よりも，一方的因果関係にもとづく逐次モデルの方が一般的なものとして，逐次体系を構成する。その様な逐次体系においては，体系内の各関係式に最小二乗回帰を形成すればよく，この回帰における偏りは，理論的な残差と説明変数の間の相関々係に由来するもので，その関係式が体系内の一部であろうとなかろうと，本質的な相違はない。逐次体系においては，それがいくつかの関係式から成つていても，一つの関係式における規定の誤差は，他の関係式に影響を及ぼさない。

11）例えば，H. Wold (1953)，更に新しいところでは H. Wold (1956) 参照。

逐次体系の簡単なモデルは次の様なものである。こゝでは三変数とし前節と同じ記号を用いることにする。

(13)　$y_{1t} = o + o + L_{1t} + u_{1t}$

(14)　$y_{2t} = c_{120}\, y_{1t} + o + L_{2t} + u_{2t}$

(15)　$y_{3t} = c_{130}\, y_{1t} + c_{230}\, y_{2t} + L_{3t} + u_{3t}$

但し，L は既決変数の一次結合。

u_{1t} が相互に独立であれば，まず(13)に最小二乗法を適用して L_{1t} におけるパラメーターと y_{1t} の推定値y'_{1t}を決定し，次に(14)の y_{1t} のところへ y'_{1t} を代入し，既決変数と同様に取り扱い，これに対しても最小二乗法を適用してパラメータ並びに y_{2t} の推定値 y'_{2t} を導く。次いで，y'_{1t} と y'_{2t} を(15)の y_{1t}，y_{2t} にそれぞれ代入して，前と同様な手続をふめばよい。この様な逐次解の求められる必要充分条件は，内生変数の係数の作る行列が三角行列を構成することである。
すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 & -c_{120} & -c_{130} \\ 0 & 1 & -c_{230} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列式の値は 1 となる。

上述の逐次モデルにおいては，説明変数と誤差項とが相互に独立である限り不偏一致推定値を与える。この独立性の条件がくずれる場合はどうであろうか。これは前節での構造方程式体系よりする単一方程式への直接的な最小二乗法の適用に対する批判への一つの回答を構成する。

y は次の関係によつて表わされるものとしよう。

(16)　$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots\cdots + \beta_n x_n + u^*$ 。

誤差項 u^* は，小さな標準偏差，例えば，$\sigma(u) \leq \theta_1$（θ_1 は定数）をもち，x_1，$x_2 \cdots\cdots$，x_n とは小さな相関係数，例えば，$r(u_1, x_i) \leq \theta_2 \cdot \sigma(u)\,\sigma(x_i)$（$\theta_2$ は定数）をもつているものとする。
そうすると，最小二乗回帰

(17)　$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots\cdots + b_n x_n + u$

における回帰係数 b_i は(16)の真の値 β_i に，小さいオーダー $\theta_1 \theta_2$ の範囲内で近

似する。すなわち

(18)　$|b_1-\beta_i| \leq c \cdot \theta_1 \theta_2$，$(i=1, 2, \cdots\cdots h)$

但し，cはu＊に依存しない。これを言葉で表現するならば，残差が小さく，附加される変数が他の説明変数とほんの僅かの相関しかもたないならば，この二つの条件は相互に補強的に作用し，規定の誤差をより小さなオーダーの限界内にとゞめる。[12] これは最小二乗回帰に対する proximity theorem 或は robustness theorem と呼ばれるものである。われわれは，説明変数を適切に選択することにより，残差の分散を適当に小さくでき，また残差と説明変数の相関を適当に小さくできるので，非実験データを取り扱つて最小二乗法を適用しても安全な場合が多いことがこの定理によつて保証される。

また相互依存関係式——構造方程式——による接近に対し，特にモデルのオペレーショナルな意義に関し，若干のあいまいな点があるとする。そのパラメーターが推定されたとしても，そのモデルについてどの様な応用がなされ得るか？体系中の一関係式は他の変数を用いての一変数の推定に用いられ得るか？この様な疑問を投げかけた後，彼は，その様な接近法は「説明過多」に陥る可能性のあることを指摘する。これが起る場合，それは，相互依存体系のパラメーターは，概して，同じ現象に対する因果的モデルにおけるよりも絶対値がより大きいことを意味する。[13]

7

3節で若干触れたが，理論的モデルとして逐次体系をとるか，或は構造方程式体系をとるか，という問題は一般的抽象的な段階での論議で何人をも承服せしめる様な結論は出ないであろう。それに対応して，前提条件の実際の場における吟味を経なくては最小二乗法がよいか最尤法がよいかの結論も下すことは

12）これは H.Wold (1953) の定理 12.1.3 及び 12.3.2—4. の結果として導出される。説明変数1個の場合についてみると

$$b_1 = \frac{\Sigma x_1 y}{\Sigma x_1{}^2} = \frac{\Sigma x_1 \ (\beta_1 x_1 + u*)}{\Sigma x_1{}^2} = \beta_1 + \frac{\Sigma x_1 u*}{\Sigma x_1{}^2} \sim \beta_1 + r_{x_1 u*} \frac{\sigma_u *}{\sigma_{x_1}}$$

これに上の条件を入れれば (18) に対応する結果が得られる。

13）例えば，C.Hildreth & F.G.Jarrett, *A Statistical Study of Livestock Production and Marketing*, 1955, p.115 参照。

できないであろう。

実際目的からして，一部が逐次的で一部が連立方程式的な混合モデルを構成する場合も見られる。[14] これは，計算の簡単化のためもあるが，基本的には最尤法による同時推定のための仮定が実際に満たされないことが原因している。すなわち，この場合三本の方程式からなる連立方程式体系を考えているのであるが，三本の方程式を同時推定するためには，誤差項がランダムであることが必要である。しかし実際には四半期別のデータの場合，この仮定は妥当しないのである。この困難を回避するために完全逐次モデルと今述べた混合モデルの二つのモデルを構成して分析を行つている。

また C. Hildreth とF. G. Tarrett は，家畜類の生産及びマーケッティングについて統計的研究をなしたが，彼等の接近法は，基本的には Cowles Commission 流の連立方程式接近であり，パラメーターの推定に関して制限情報推定値を求め，それとの比較において最小二乗推定値をそれぞれ求めている。ところでこの覚書に関連して，次の様な叙述は興味のあるものである。[15]

「もしある方程式が同時内生変数1個と数個の既決変数を含み，そしてその同時内生変数が最小二乗法を適用する場合に従属変数と考えられるならば，その時は最小二乗法と制限情報方式は，それらが導出される仮定からして，同じものとなる。もしある方程式が数個の同時内生変数を含むならば，これらの中の一つを除いた他のすべては，最小二乗法の適用に当つて独立変数とみなされなければならない。……

この仮定が正当化されない程度に，係数の最小二乗推定値及びそれらの計算された標準誤差は附加的な偏りを含む。しかし，もし最小二乗法の仮定が近似的に正しければ，最小二乗推定値のより大なる効率の方がそれよりも重要であり得るであろう。……農業商品を含む多くの関係式に対しては，最小二乗法の仮定は充分に実際的であるということは，しばしば主張されてきたことである。この様な理由により，また制限情報推定値の小標本での性質については殆んど

14) 例えば，H. Bărger & L.R. Klein,「A Quarterly Model for the United States Economy」, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.49, No.267, 1954, pp.413—437 参照。

15) C. Hildreth & F. G. Jarrett, ibid., p.70—71.

知られていないために，両方の方式を用いて係数を推定することが，本研究においては望ましい様に思われた。」