古典確率論における諸問題（I）

武　隈　良　一

序

古典確率論の基礎については以前に述べたことがあるが（1*）（2），もう一度系統的に取調べてみよう。というのは現代確率論に深入りするときつねに古典確率論の結果が反省されるにもかかわらず，それらが消化されておらないために議論が曖昧となり後味のわるい結果になり勝ちである。それというのも過去の文献がよく読とられないため正しく創始者のアイデアが伝えられないからである。そこで出来得る限り原典に目を通しその真髄を伝える必要があると思い稿を起した次第である。Todhunter の1865年における著書（3）が1949年に復刊される現状から考えて古典確率論をしつかり把握しようとする意向は内外ともに強いように思われる。

I　カルダノとガリレイ

19世紀の数学史家リブリとグーローの著書によると，骰子を投げたとき如何なる目が出るかの予想はダンテ神曲のディモラによる註釈本（1477）にあるという。おそらくこれが確率論の数学的問題としては最古の記録であろう。

ダンテ神曲煉獄篇第6曲（4）は次のように書きはじめられている。

* 後掲文献の番号をあらわす。

ツァラの賭のはねた時
負けたものは憂ひてのこり
繰返し投げて悲しくも習ふ。
勝つたものと共に人々は皆歩みゆく。
ひとりは前に一人は後より彼を捉へ
またひとりは側より彼に挨拶する。
然し彼は止まらずに此者彼の者に耳を傾く。
彼は手を伸ばして人を寄せしめず
かくて身を群よりふせぐ。
………………………………………

この最初の語ツァラ (Zara) とは3つの骰子で行う賭博のことで当時盛んに行われたものである。ディモラがこの賭博についての種々の計算を註釈本にしるしたものと思われる。

次に我々の注目をひくものはカルダノ (G. Cardano, 1501—1576) の著書 De Ludo Aleæ (運まかせの勝負ごとについて) である。これは彼の死後におそく出版された全集の第1巻 (1663) において公表された。彼は長年の賭博師であつたので著書は賭博師たちの手引として書かれた。それは賭博に関する雑多なこと，例えば勝負の仕方 不正賭博師に対する用心の仕方などが書かれてあるが，偶然に関する論争については僅かしか触れておらない。

1つの見本として第13章をあげてみると，彼は2つの骰子を投げたとき目の和が2，3，…… 12 になる場合が何通りあるかをしめしている。これと同様のことを3つの骰子について述べ，また次の表を与えている。

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12
108,	111,	115,	120,	126,	133,	33,	36,	37,	36,	33,	26,

しかしこれが何を意味するかはいろいろ考えられているが不明である。

さてガリレイ (Gaqileo Galilei, 1564—1642) の小論文 Considerazione sopra il Gioco dei Dadi (骰子の賭博に関する考察) は出版年月が不明であるが重要なものである。これには次の問題が含まれている。一友人がガリレイに次のことを相談した。3つの骰子を投げるとき目の和が9になるのと10になる

のとはともに6つの場合しかないのに，実際には10の方が多く出るのは何故だろうと。ガリレイは注意深く精確に計算して10の場合は216に対して27,9の場合は25であるから前者の方がよけいに出ると答えた。ガリレイのこの小論文はフィレンツェで1718年に出版された全集のなかに始めて公表された。

なお1855年にフィレンツェで出版されたガリレイの全集15巻に Lettere intorno la stima di un cavallo（馬の評価に関する手紙）というのがある。これによると当時の文化人の集りにおいて次のことが問題となつた。実際に百フラウンの値のある馬を，拾クラウンと評価した人と千クラウンと評価した人とでは如何なる相違があるかと。文化人の仲間の一人であつたガリレイは両方とも法外であるという点においては等しいといつた。何故なら千の百に対する比は百の拾に対する比に等しいからであると。これに対して Nozzolini という司祭が千の評価の方が拾の評価より法外であるといつた。何故なら千の百を超える分は百の拾を超える分より大きいからと。両者の手紙は印刷されており，論争は激しかつたが科学的興味も科学的価値もないものである。

II　パスカルとフェルマ

前章で述べたように確率の概念が数量的にはじめて取扱われたのはイタリアにおいてであつたが，これを更に理論的に解明したのはフランスのパスカル（Blaise Pascal, 1623—1662）とフェルマ（Pierre de Fermat, 1601—1665）である。通常この2人が古典確率論の端緒をひらいた人と見なされる。

ことの起りは賭博師とみなされたメレがパスカルに2つの問題を提出したことにはじまる。これをパスカルがフェルマにも知らせ両者が別個に異なつた方法で解決した。2人の間にとりかわされた手紙は一部分今日そのまゝ残つている。それらの詳細については（1）（2）において述べたのでここでは簡単に概観しておこう。

パスカルからフェルマへの手紙（1654年7月29日）には先ずメレの提出した点の問題が取扱われている。点の問題というのは，2人の競技者があつて先きにn点を獲得したものが勝つというゲームにおいて中途で中止したら互いの

賭金を如何に分配したらよいかというのである。

「いま3点問題において両者が32ピストルずつ賭け甲が2点をとり乙が1点とつたところで中止したら賭金を如何に分配したらよいか」

これに対する答は甲48ピストル，乙16ピストルである。

「次に甲が2点をとり乙が1点もとらないところで中止したら如何」

答は甲56ピストル，乙8ピストル。

「最後に甲が1点をとり乙が1点もとらないところで中止したら如何」

答は甲44ピストル，乙20ピストル。

これに続いてパスワルは証明なしに次の一般の結果を与えている。これを今日の式でかくと，

(1) 2人の賭金はAずつで，点の数を $n+1$ とし，甲がn点とり乙が1点もとらないならないところで中止すれば，甲の分は $2A-\frac{A}{2^n}$ となる。

(2) また甲が1点とり乙が1点もとらないところで中止すれば，甲の分は

$$A+A\frac{1.\ 3.\ 5\cdots\cdots(2n-1)}{2.\ 4.\ 6\cdots\cdots\cdots 2n}$$

となる。

このあとやはりメレの提出した次の問題にふれている。それは1つの骰子で6の目を出そうと4回試みることは利益であり（出る率の方が大きい），2つの骰子で6の目を同時に2つ出そうとして24回試みることは不利益（出ない率の方が大きい）である。これは $\frac{4}{6}$ と $\frac{24}{36}$ が等しいのに何故であろうかというのである。

パスカルはこの解決を後に秩序立ててしようと述べている。

以上のパスカルの手紙に対するフェルマの返事の手紙は現存しておらない。しかし次のパスカルの手紙（1654年8月24日）から内容を知ることができる。

これによるとフェルマの方法は2人の競技者のときは成立するとして次の例をあげている。すなわち甲があと2点とれば勝ち，乙があと3点とれば勝つという問題の解決を述べている。ところがこのフェルマの方法をパスカルがロベルヴァル（Roberval, 1602—75）に伝えたところ反対されてしまつた。ロ

ベルヴァルは頑迷でパスカルの説得が理解できずまた理解しようともしなかつた。

ついでパスカルはフェルマの方法は3人の場合には適用できないと例を以て説明しているがこれにはパスカルの誤解である（ことが後に分つた）。

これに対してはフェルマからパスカルへの手紙2通（1654年8月29日と9月25日）によつて誤解がとけた。前の手紙で一寸ふれ，後の手紙で詳細に述べている。フェルマはロベルヴァルの説得のためにも3人の場合を懇切に述べている。

このフェルマの手紙に対するパスカルの返事（1654年10月27日）には誤解がとけた喜びを表わしている。

なお日附不明のフェルマからパスカルへの手紙がある。これには「6の目を出そうとして骰子を8回投げる勝負において，途中で投げる権利を放棄したらどうなるか，例えば3回ともの6目が出ないとき，4回目を中止したとしたら賭金をいくら貰えるであろうか」という問題が論ぜられている。

以上で両者の間に取交わされた6通の手紙の説明を終るが，次に「パスカルの三角形」の出典について述べよう。これは Traité du triangle arithmétique（算術三角形論）（5）（6）に表われたもので1654年ごろ印刷されたが1665年まで出版されなかつた。この算術三角形論は数の序位，組合せ，確率論（点の問題），2項式に用いられた。

このうち点の問題を算術三角形を用いて如何に解いたかをしめそう。

先ず算術三角形とは次頁のような数の排列から各行各列同数だけとつて左下と右上とを結んだ三角形を意味する。

例えば第6三角形といえば，横行縦列は1が6個ならび底辺は1，5，10，10，5，1，とならぶものである。

2人の賭博者があつて勝つまでには甲はm点不足，足乙はn点不足しているとき，第（m+n）三角形を考えその底辺の数の左下からn個の数の和と残りのm個の数の和を計算すると，その比が両者の分け前の比になるとパスカルは解決している。

横　　行

		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
	2.	1.	2.	3.	4	5.	6.	7.	8.	9.	
	3.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.		
縦	4.	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.		底	
	5.	1.	5.	15.	35.	70.	126.				
列	6.	1.	6.	21.	56.	126.					
	7.	1.	7.	28.	84.						
	8.	1.	8.	36.		辺					
	9.	1.	9.								
	10.	1.									

これを今日の記号でかくと，$m+n-1=k$ とおくとき

$$甲：乙=({}_kC_0+{}_kC_1+\cdots\cdots+{}_kC_{n-1})$$
$$:({}_kC_0+{}_kC_1+\cdots\cdots+{}_kC_{m-1})$$

となる。

例えば甲が2回不足乙が4回不足しているとき，第（2＋4）三角形の底辺は 1，5，10，10，5，1，なので

$$甲：乙=(1+5+10+10):(5+1)=26:6$$

となる。

以下にパスカルの解いた問題を述べておこう。

1．2人の賭博者があつて，そのいずれかが上りに達するまでには，いずれにもそれぞれまだ幾回かの勝が不足しているときに，（もし彼等が勝負をせずに別れることを欲するならば）各々になお不足している勝の回数に応じて行わるべき分け前を，算術三角形によつて見出すこと。

2．2人の賭博者があつて，或る一定の回数の勝負をすることを申合せ，各々がこれに同額の金を賭けたとする。その場合，負けている方の賭金について最後の回の勝負の値を算術三角形で求めること。

（これは甲があと1回勝てばよく，乙はn回勝たねばならぬ場合である。）

3.　2人の賭博者があつて，或る一定の回数の勝負をすることにし，各々が同額の金を賭けたとする。その場合，負けている方の賭金について，最初の回の勝負の値を算術三角形で求めること。

（これは甲があとn－1回，乙がn回勝たねばならぬ場合である。）

4.　2人の賭博者があつて，或る一定の回数の勝負をすることにし，各々がこれに同額の金を賭けたとする。その場合，負けている方の賭金について，第2回目の勝の値を算術三角形で求めること。

（これは甲があとn－2回，乙がn回勝たねばならぬ場合である。）

III　ホイヘンス

確率論に関する論文ではじめて印刷物となつたものはホイヘンス（Christian Huygens，1629—1695）のものである。題名は De Ratiociniis in Ludo Aleæ（運まかせの勝負ごとにおける計算について）で，それはスホーテン（Frans. van Schooten，1615—1661）の著書Exercitationum mathematicarum Libri quinque（1657）にのつている。スホーテンはライデン大学の数学教授でホイヘンスを教えた。この論文ははじめオランダ語で書かれたがスホーテンによつてラテン語に訳されたものである。ウォリスとライプニッツはこの論文を賞讃している。これは後にヤコブス・ベルヌーイ（Jacobus Bernoulli，1654—1705）の著書 Ars Conjectandi（推論法，1713）のなかに註釈づきで再刊された。それはこの書物の4部のなかの第1部をなすものである。この書物の全貌については後に述べよう。

ホイヘンの論文は14の命題を含んでいる。

第1の命題は，競技者が金額aを得るチャンス（運又は機会）と金額bを得るチャンスを等しくもつとき，彼の期待値は $\frac{1}{2}$（a+b）である。

第2の命題は，競技者がa又はb又はcを得る等しいチャンスをもつとき彼の期待値は $\frac{1}{3}$（a+b+c）である。

第3の命題は，競技者がaを得るpチャンスとbを得るqチャンスをもつ

とき，彼の期待値は $\frac{pa+qb}{a+b}$ である。

以上のように「期待値」は彼に負うものである。

第4，第5，第6，第7の命題は点の問題の単純な場合で競技者が2人のときを論じている。方法はパスカルのもの（1654年7月29日の手紙）と似ている。

第8，第9の命題は同じく競技者が3人のときを論じている。方法は2人のときと似ている。

その後は骰子に関する問題へと進み，第10の命題においては，1つの骰子を投げるとき6の目が何回出るかを研究している。

第11の命題では，1対（2つ）の骰子を投げるとき12の目が何回出るかを研究している。

第12の命題では，1回の投げで少くとも2つの6の目が表われるためにはいくつの骰子をふらなければならないかを研究している。

第13の命題は次の問題を論じている。AとBとが2つの骰子で勝負する。7が投げられたらAは勝ち，10が投げられたらBが勝ち，その他の数が投げられたら賭金は折半される。AとBのチャンスを比較せよ。それは13対11である。

第の14命題は次の問題を論じている。AとBとは次の条件の下に2つの骰子で勝負する。Bが7を投げる前にAが6を投げたら賭金が貰える。またAが6を投げる前にBが7を投げたら賭金が貰える。Aから始めて交互に投げる。AとBのチャンスを比較せよ。答は30対31である。

これらの命題のあとに5つの問題を解なしで読者に提出しているが，解はベルヌーイにより「推論法」において与えられた。

(1)　AとBは次の条件の下に2つの骰子で勝負する。Aが6を投げたら勝ち，Bが7を投げたら勝つ。Aが始めに1回投げ，次にBが2回投げる。それからAが2回投げるというようにしていずれか一方が勝つまで争う。AとBのチャンスは10355対12276であることをしめせ。

(2)　3人の競技者A，B，Cが12個の球をとる。その各々は8つが黒で4

つが白である。3人とも目隠しされて，白をつかんだ人が勝ちとする。Aから始めてA，B，Cの順で勝負をする。3人のチャンスを決定せよ。

ベルヌーイをこれを解くのに3つの場合に分けた。第1は各球が取出される毎に元へかえす。第2は12個の球が1組しかなくて取出してからは戻さないとする。第3は各人が12個の球をもち取出してからは戻さないとする。

(3) 10枚のカードが4組で40枚ある。A，Bが4枚ひいて各組の1枚づつが入つておれば勝とする。AとBのチャンスは1000対8139である。

(4) 12個の球があつて8つは黒4つは白である。AとBが目隠くして7つの球をとり3つが白になれば勝とする。AとBのチャンスを比較せよ。

(5) AとBが12個の模造貨幣をもつて3つの骰子で勝負する。11が投げられたらAがBに1枚の模造貨幣を渡す。14が投げられたらBはAに1枚の模造貨幣を渡す。かくして相手のすべての貨幣をとつたら勝ちとする。AとBのチャンスは244140625対282429536481である。

ホイヘンスの論文はベルヌーイ，モンモール，ド・モァヴルのものによつて置換えられるまでは最良のものであつた。これらの3人について述べる前に組合せの理論，死亡数の法則，生命保険の原理に関する歴史やその他の研究に触れなければならない。

Ⅳ 組合せについて

組合せの理論は確率論に関係が深いので，これに関して17世紀の終りまで一通り調べてみよう。

組合せに関する最初の注目はウォリス（John Wallis，1616—1703）の代数書（Algebra，1693）においてなされた。それはバックレイ（William Buckley）の業蹟を引証したものである。バックレイはケンブリッジのキング・カレッジの会員でエドワード6世時代の人である。彼はラテン語で算術の法則を含む小冊子の数学書をかいた。

バックレイの法則によると，4つの物から1度に1つ，2つ，3つ，4つとる組合せの数は $1+2+4+8=15$ であるという。この求め方は後に述べるスホーテンのものと同じである。

次に歴史的に評判の高かつた例として，プチャヌス (Erycius Puteanus) が著わした書物 Erycii Puteani Pietatis Thaumata in Bernardi Bauhusii è Societate Jesu Proteum Parthenium (1617, Antwerp) がある。これは組合せの理論とはあまり結びつきはないが，後にヤコブス・ベルヌーイが自著「推論法」において詳しく論じた程さわがれた書物である。

Bernardus Bauhusius が処女マリアを讃えた詩の一行に

Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera caelo.

というのがある。これを並べかえると1022通りあるといつて48頁も説明している。

組合せに関する最初の論文はパスカルの「算術三角形論」の本論とその附帯論文である。彼の得た主な結果を今日の記号で書いてみよう。「組合せに関する算術三角形の応用」という附帯論文において次の3つを述べてる。

1. 底辺がrの三角形においてp番目の横行の数を加えると，それはr個のものから1度にp個とる組合せの数 (multitude) になる。(命題第一)

例えば底辺10の三角形において8番目の横行の数を加えると，1+8+36=45 が10から1度に8個とる組合せの数になる。

2. 算術三角形の任意の数値は，その底辺より1だけ少ない数から，その横行より1だけ少ない数を取出す組合せの数に等しい。(命題第二)

3. 2数が与えられているとき，一方から他方を取出す組合せの仕方が幾通りあるかを，算術三角形によつて見出すと。(問題第一，命題第三)

このうち最後のものは本論において，r個のものから1度にp個とる組合せの数は

$$\frac{(p+1)\ (p+2)\ (p+3)\cdots\cdots r}{(r-p)!}$$

又は
$$\frac{r\ (r-1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots (r-p+1)}{p\ !}$$

と求めている。後者の式が今日親しみ深い。

次にスホーテンは自著Exercitationum において組合せに一寸触れている。彼は4つの文字 a, b, c, d を次のように並べた。

a,

b,　ab.

c,　ac, bc, abc.

d,　ad, bd, abd, cd, acd, bcd, abcd.

これにより4つのものから選び出す方法は15通りあるという。ついで5つの文字を取り，一般にn個のものから取出す方法は2^n-1通りあることを推測している。これは整数を素因数分解したとき，約数の個数を計算するのに用いられる。

ついで同じ文字が繰返されるときを論じている。例えば a, a, b, c と与えられたとき，

a,

a,　aa.

b,　ab, aab.

c,　ac, aac, bc, abc, aabc.

と並べて $2+3+6=12$通りあるという。そしてこれを再び整数の約数の問題に用いている。例えば「約数を16個もつ最小の整数はいくらか」などを解いている。

次にライプニッツ（G. W. Leibniz, 1646—1716）は1666年に「組合せ論」Disertatio de arte combinatoria を発表した。これは数学に関係ある彼の最も早い業蹟として興味深いものである。この論文の最初にパスカルの算術三角形に似た表を掲げ，定められた物の集合から2つ，3つ，4つ……全部をとる組合せの数を見出すのに応用している。論文の後の方では，定められた物の集合から全部をとり出す順列の数をいかにして求めるかを示している。そして最初の24の自然数の積を作つてみせた。

この論文は実は数学よりは哲学の面において重要な意味をもつている。彼の哲学の業蹟に含まれる Erdmann の判断の妥当性を裏付けるという性格の論文なので，例えば三段論法の様式の個数に関する長い研究がある。また神の存在の証明があるが，それは3つの定義と1つの公準，4つの公理，1つの観察の結果すなわち aliquod corpus movetur に基礎をおくものである。

いまこの論文から興味深いものを拾いあげると，

(1) 物の集まりから一時に2つのものをとるとき，com 2 natio (combinatio)，3つのものをとるとき，com 3 natio (conternatio)，4つのものをとるとき，con 4 natio，…… という記号をつくつた。

(2) 組合せについてはライプニッツはパスカルより遙かに劣る。それというのもパスカルのものを見ておらぬらしい。一時に2つのものをとる組合せの数は $\frac{n(n-1)}{2}$ と与え，これより3つ以上に進めてはいるが，3つ以上の組合せの数がいかになるかは与えておらない。それらはパスカルによつて既に得られている。

(3) パスカルの算術三角形に似た表を与えた後で，いくらか重要と思われるものは次の定理である。定理. n が素数ならばn個のものから一時にr個とる組合せの数はnで割切れる。

(4) 算術の記号として ＋，－，＝ を用いた外に乗法として⌒，除法として ⌣を用いた。また productum を和の意味で用いた。 例えば4を 3＋1 の productum とよんだ。

次にウォリスの代数書にある組合せ論について述べよう。これは英語版 (1685) にのせられたものでラテン語版 (1693) では485頁から529頁までにある。1795年の英語版の表題は次の通りである。The Doctorine of Permutations and Combinations, being an essential and fundamental part of the Doctorine of Chances.

第1章はいくつかのものから1つ又はそれ以上を取るか残すための選び方の数を述べている。パスカルの算術三角形と一致する表を掲げその用い方を示している。ウォリはパスカル以上のものを与えておらないし，またパスカルを引照したともいつてない。彼の不器用な筆致はパスカルの輝かしいそれとよい対照をなしている。第1章はバックレイの算術の抜粋とその説明でとじているがそれは既述の通りである。

第2章はいくつかのもののならべ方を述べている。今日の順列である。4つの文字の24の順列を与えた。また24個のものの順列の数である最初の24個の

自然数の積を作つた。

Roma の順列を24個つくり，そのうちラテン語として使えるのは Roma, ramo, oram, mora, maro, armo, amor の7つだけで他は意味がない語であると附加えた。さらに進んで繰返しのある場合を考え，その例として Messes をとりあげた。e が2回，s が3回あるので $1\times2\times3\times4\times5\times6=720$ を $2\times2\times3=12$ で割つた60が求める個数であるという。最後に次の詩の排列の数を決定しようと試みている。

Tot tibi sunt dotes, virgo, quot sidera cælo.

第3章は整除数について述べている。数の素因数分解を行い，与えられた数の除数の個数と与えられた個数の除数をもつ最小の整数について論じている。

第4章は整数に関するフェルマの問題について述べている。それはフェルマがウォリスと英国の数学者に挑戦した2つの問題の解法を含むものであるがいかなる問題であるかは原著を見ないと分らない。

以上で組合せの概観は終るが，これによるとパスカル以後彼をしのいだものはなく，飛躍的発展は後にのべるモンモールまで待たねばならなかつた。

V　死亡数と生命保険

死亡数と生命保険について述べるならばそれ丈で優に何冊もの書物ができる。ここではそれらの起原について一寸ふれておく。

死亡数に始めて注目した人はグラント (John Graunt, 1620—1674) である。ロンドンにおける毎年の死亡表が黒死病の流行した1592年から作られ，1594年から1603年までは中断されたが，以後連続している。これを利用してグラントは1662年に Natural and Political Observations mentioned in following index, and made upon the Bills of Motarity を著わした。この功労により一商人から王立協会の会員に選ばれた。

序言の巻頭に「私はロンドンの市内に生まれ育つて，毎週の死亡表を継続購読している人の大部分が，その下欄に目をやつて埋葬数がどれくらい増加したか減少したかを知り，また死因に目を通して，その週のうちにどのような珍

らしい異状なものがあつたかを見出し，以てそれらを次の会合の話題にしようとするのと，さらに黒死病の時には如何にこの病気が増加しまたは減少したかをみて，金持は転地の必要の有無を判断し，商人は各自の商売における取引の見込を推測する以外には，それらの表を殆んど利用しないことを常に見ていたので，私は市の賢者達がこれらの記録をとつて配布するという称讃すべき慣行を設定した本年の目的は，上述のものとは別な，もつと大きな利用にあつたに相違ないと考えた。……」とある。彼の優れた劃期的研究は広く知られているのでここには割愛しておく。

グラントはイギリスの政治算術学派の一人として著名であるが，他にペティ（William Petty, 1623—87）とハリ（Edmund. Halley, 1656—1742）がいる。この両者についてもよく知られているので詳細は省略するが後者については一寸ふれておこう。

ハリは元来天文学者であるが，統計学においても輝かしい足跡を残した。彼を有名ならしめた論文は1693年の Philosophical Transactions に発表された An estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascern the Price of Annuities upon Lives. である。

ハリの表は次の通りである。

現在年令	人数	現在年令	人数
1	1000	8	680
2	855	9	670
3	798	10	661
4	760	11	653
5	732	12	646
6	710	13	640
7	692	14	634

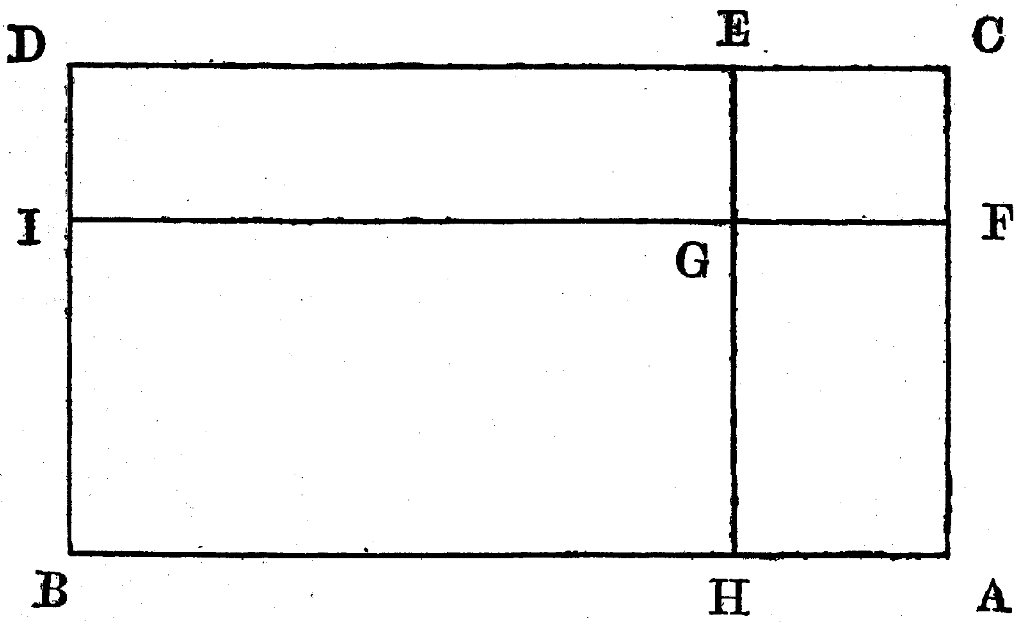
（以下略）

しかしこの表を読取ることが容易ではない。Montucla は1000人生れて855人が1年に到達し，そのうち798人が2年に到達すると理解した。Daniel

Bernoulli は1000人が1年に到達し，そのうち855人が2年に到達すると理解した。G. F. Knapp (1842—1926) もこの表の理解に努力したがついに失敗に終つた。これについては例えば（7）を参照されたい。

ハリはこの表を用いて生命保険の年金を次のように計算した。n年経過後に生きるチャンスを表によつて求めn年後に支払われる額にこれを掛けたものを1からその人の生きながらえる年nまで加えたものが年金である。これはハリも言う如く大変な計算である。彼は70才までに5年毎に支払われる年金の表を与えた。

次に2人が何年かの後に生存または死亡する確率を考えた。若い方が現在の年令における人数をNとし，何年か後の人数をRとすると，N=R+Y におけるYは死亡する人数となる。同様に年とつた方の人数を n, r, y とおく。そのとき2人ともが何年かの後に死ぬチャンスは $\frac{Yy}{Nn}$ であり，若い方が生存し年とつた方が死ぬチャンスは $\frac{Ry}{Nn}$ である。ハリは時間の形式を幾何学的説明で与えた。



ABとCDはNを，DEとBHはRを，したがつてECとHAはYを表わす。同様にAC, AF, CFはn, r, yを表わす。長方形ECFGはYyを表わすというように。

同様にハリは3人の場合を代数の形式や平行六面体による幾何学的説明で

述べている。

ハリの表は後年ド・モァヴルの著書に再刊された。

Ⅵ 1670年から1700年まで

ここではホイヘンスからJ．ベルヌーイまでの期間における種々の研究について述べよう。

イエズス会の修道士 John Caramuel が1670年に Mathesis Biceps を出版した。この書物に Combinatoria という章があるが，これによると彼が組合せを現代の意味で明らかにした最初の人であることが分る。組合せについて特別に述べたてることはないが，彼は例を以てしめし一般の記号では証明しなかつた。また Clavius や Jzquierdus を案内役としてしばしば引用している。

ニコラス・ベルヌーイはしきりに Caramuel について述べている。例えば「私の論文で引用している Caramuel というイエズス会修道士は………であるが，しかし彼の与えたすべては妄論のかたまりに過ぎないから私は何も得られなかつた」と。しかしこれは仕損じを誇張したもので実際 Caramnel は次の問題を正しく解いている。2つの骰子による投げのチャンス，2人の競技者の点の問題，2回又は3回投げたとき1の目が1度出るチャンス，3つの骰子を投げるゲームについて。

彼は3人の競技者の点の問題と他の2つの問題について誤りをおかした。1つはホイヘンスの第14番目の問題であり，他はそれと同種の問題である。

彼は第14番目の問題を次のように解いた。いま賭金を36とする。最初の投げでAのチャンスは $\frac{5}{36}$ なので，$\frac{5}{36}\times36=5$ がAのものである。従つて36から5を引いた31に対してBのチャンスは $\frac{6}{36}$ なので $\frac{6}{36}\times31=5\frac{1}{6}$ がBの最初の投げの値になる。Caramuel はここで残りの $25\frac{5}{6}$ をA，Bで等分すればよいといつたがこれは誤りである。この $25\frac{5}{6}$ の $\frac{5}{36}$ がAの第2回の投げの値となり，その残りの $\frac{6}{36}$ がBの第2回の投げの値になる。これを続けて無限幾何級数の和を求めると正解が得られる。

Joseph Sauveur が Journal des Sçavans (1679年2月) において Bassette というトランプ遊びの公式を証明なしに与えた。これの証明はベルスーイの

「推論法」の191頁から199頁までにある。公式は6つあつて最初の5つは難かしいが両者は一致している。最後は Sauveur が誤まつているがベルヌーイの答はきつすぎる。Sauveur は Fontenelle によつて賞讃され，また宮廷に呼ばれて王と女王の前に計算を説明する光栄に浴した。

J.ベルヌーイが1685年 Journal des Sçavans に次の2つの問題を提出した。

1. AとBが次の条件で骰子遊びをする。最初に1の目を投げた人を勝ちとする。先ずAが1回投げBが1回投げる。ついでAが2回投げBが2回投げる。ついで3回づつというように1の目が出るまで続ける。

2. まずAが1回投げ，次にBが2回投げ，Aが3回投げ，Bが4回投げ，……これを続ける。

この問題はベルヌーイ自身によつてその結果が Acta Eruditorum (1690) に発表されるまで解かれなかつた。後に同雑誌にライプニッツがその結果を与えた。チャンスは和のない無限級数に絡んでいる。ベルヌーイの解法は「推論法」の52頁から56頁にもある。

ライプニッツもまた確率論に大きな関心をもつていた。彼自身はその発展に貢献したとは言えないが重要さを痛感していたことは間違いない。彼の注意を特に引いたものはゲームに関する題目で，これに彼の創意ある力量をふるう場所を見出した。彼はゲームに関する系統的な論文を書こうとした。第1は数だけを含むもの，第2はチェスのように位置に関係あるもの，最後に玉突きのように運動に関係あるものについてである。これらは発明や思考の技術を完成するのに有用なものである。

ライプニッツは2つの骰子を投げたとき11が出るチャンスは12が出るチャンスの2倍であること，7が出るチャンスは12が出るチャンスの6倍であることを知つていた。

さて1692年ロンドンで Of the Laws of Chance という書物が出版された。著者は王立学会の秘書 Benjamin Motte といわれているが，このような人は名簿にはない。トドハンターは著者は Arbuthnot であると断言している。

内容は2部に分れ第1部はホイヘンスの論文の飜訳で第2部は種々の応用

を述べている。1頁から25頁までにホイヘンスが解かないで残した5つの問題がある。それに関してこう述べている。「読者がいまの方法を応用して解くという満足を得るであろう。それは困難というよりは面倒である。例えば私は第2と第3にとりかかつて見よう。何故なら残りは同じ方法で解けるから」と。そして著者は第2の問題をベルヌーイの「推論法」による3つの場合のうち最初のものとしてこれを解いた。結果は「推論法」58頁のものと一致している。

その後にゲームに関する計算を述べている。注目すべきものとして Royal-Oak Lottery があるが，これは後章に述べるド・モァヴルの著書 Doctorine of Chances「偶然論」の序文にあるものと類似している。3つの骰子でなされる種々の投げの数の表が与えられているが，パスカルの丸写しでそれ以上のものではない。

またカルタ遊びの一種である Whist についてふれているが，これもド・モァヴルの「偶然論」で厳密に研究された。

次にホイヘンスの問題よりも更に復雑なものを解くには次の定理が必要であるとこれを書加えている。即ち

「私がaに対してpチァンス，bに対してqチァンス，cに対してrチァンスをもつならば，私の賭けは $\frac{ap+bq+cr}{p+q+r}$ に値する。」

これを証明した後にdに対してsチァンスをもつ場合に拡張し，ついで賭けのゲームを考察している。これらはやはりド・モァヴルの「偶然論」の結果に導かれる。

以上第1部においてはチァンスが equal probability に起る場合のみを考えたが，然らざる場合には問題は違つた結果になりこれはあまり面白くないと述べている。例えばそのような問題として次のものを提出しているが解答は読者に委せている。

平行六面体の各棱の比が a, b, c の比になつているとき，与えられた a b 面にぶつかるような投げは如何程おこるか。

この解決は後年シンプソンの第27の問題として解かれるまでなされなかつた。

第2部についてはド・モァヴルの業績に触れるまで延期した方が好都合である。

さて次に Francis Roberts の著書「富籤のチァンスに関する算術の矛盾」(An Arithmetical Paradox, concerning the chances of Lotteries, 1693) に注目しよう。このなかに次の問題を論じている。

3つの空と3つの賞金よりなる富籤がある。賞金は各々16ペンスである。また4つの空と2つの賞金よりなる他の富籤がある。賞金は各々2シリングである。前者をひくと期待値は$16\times\frac{1}{2}=8$ペンスである（$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$が当る確率なる故）。後者をひくと期待値は$2\times\frac{1}{3}=24\times\frac{1}{3}=8$ペンスである（$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$が当る確率なる故）。即ち両者ともに期待値が等しい。

これで問題は起らないのに Roberts は odds という妙な概念を作つて矛盾が生ずるといつた。a個の空とb個の賞金があり，賞金がrシリングなるとき $\frac{a}{b}\ \frac{1}{r-1}$ を odds と名づけた。前者の富籤では odds は$\frac{3}{1}$となり後者は$\frac{2}{1}$となつて一致しないから矛盾するというのである。しかしこの odds の概念は彼自身のつくつた気ままなもので問題にならない。

この著者 Roberts はド・モァヴルの序文に Robertes となつている人に違いない。

最後に「人の証言の信頼性の計算」(A Calculation of the Credibility of Human Testimony, 1699) にある問題について述べよう。この書の著者は匿名となつているが Craig であるといわれている。

最初に連続した証人の場合を考える。いま或報告がn人の証人をつぎつぎと通して伝えられたものとする。各人の信頼性を p_1，p_2……，p_n とすれば伝えられた結果の確かさはそれらの積 $p_1 p_2 \cdots\cdots p_2$ になる。

次に共同の証人の場合を考える。2人があつて1人は$1-p_1$の不確かさで伝え，他はp_2で伝える。そのとき不確かさは$(1-p_1)(1-p_2)$で伝えられるから，結果として$1-(1-p_1)(1-p_2)$の確かさで証言される。3人共同の証言も同様にして$1\,(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$となる。

この理論はフランス百科全書の確率の項目に入れられた。項目には署名がないのでディドロに帰着させられる。

引 用 文 献

(1) 武隈良一，古典的確率論の基礎，小樽商大人文研究　第2輯（1951年10月）

(2) 武隈良一，パスカルとフェルマーとの往復書簡，科学史研究第26号（1953）

(3) I. Todhunter, A history of the mathematical theory of probability, From the time of Pascal to that of Laplace. (1949) Chelsea Publ.

(4) 中山昌樹訳，ダンテ神曲煉獄篇（1917）

(5) Pascal, Œuvres (Brunschvicg 版) Ⅲ. p.433.

(6) 松浪信三郎，安井源治共訳，パスカル科学論文集．下巻（数学篇）1948年11月 白水社　p.17.

(7) ヨーン著足利末男訳，統計学史 第一部（1956訳出）208頁

(1958.1.21.)