

「線型計画法の 計算面に関するランド会議」

古瀬大六

リニヤール・プログラミングについては、今までに大きな学会が四回開かれている。その第一回は1949年6月20～24日に、コウルズ・コミッション主催の下に開かれた会議であり、その報告の大部分は同委員会のモノグラフの第13巻として1951年に刊行された。この“Activity Analysis of Production and Allocation”, Wiley は、この方面におけるその後の急速な進歩の stepping stone となつたことは、周知の通りである。

この最初の会議の主催者であるコウルズ・コミッションは、純粋な民間団体であつたけれども、この方面の研究について最も大きな関心を持ち、財政的援助を惜しまなかつたのは、米空軍である。全世界にばらまかれ大きな防衛組織を能率的に維持し、長期軍備計画を適切に決定するには、従来の直観的なやり方を棄てて、科学的な計画の立て方を考えなければならない。この点に気附いた米空軍司令部は、その外郭研究団体であるランド・コーポレーションにおけるリニヤール・プログラミングの研究を一層盛んにすると共に、1952年4月1日ワシントンにおいて、商務省標準局との共同主催で、第一回のLP シンポジウムを開催した。その概要については、「一橋論叢」第31巻第2号（昭和29年2月号）、pp. 79—87 に紹介済みであるから、再説を避ける。

このシンポジウムを契機として、LP 研究者の層は急速に厚くなり、全世界に拡大された。1954年の5月には、ロンドンにおいて、フェランティ計算機会社主催の、小規模な会議が開かれている。

翌1955年1月27—29日に互つて、再びワシントンで開催された、第二回目のLP シンポジウムにおいては、報告者の数は実に33名、その報告書の総頁数は685頁に達した。しかし、この期間に進歩をみせたのは主として具体的な応用

の方面であつて、計算理論の面では Dantzig のシンプレックス法が最終決定版であるかの如くに見られていた。この龐大な報告書の中にも、これに代る新しい能率的計算法についての報告は一つもなされていない。

然し、LP の実用化のためには、計算法の進歩が、働くことのできない条件である。実用的な LP モデルを作ると、その条件式の数は数百、変数の数は千を超えることが珍らしくない。現在利用できる最大の計算機 IBM 705 を使つても、200 条件式、1000 変数を超えることはできない。この有力な管理技術を、各企業が気軽に利用できるようにするためには、もつと簡単な、卓上計算機でもできるような計算法を考えなければならない。

この意味において、昨年8月末にランドで開かれた、RAND Conference on Computational Aspects of Linear Programming は、時宜に適した企てであつたと言つてよい。この会議で読まれた報告の大部分は、“Naval Research Logistics Quarterly”, Vol. 4, No. 1, March 1957 に再録されている。以下、そのうちの重要と思われるものについて、紹介してみたい。

1. Kelley, J. E., Jr.: A Threshold Method for Linear Programming.

シンプレックス法の本質は、条件不等式によつて定められる凸多面体の頂点を、稜に沿つて次から次へと這いまわる点にある。条件式と変数の数が増すと頂点の数は急速に増加するから、必要な繰返し計算の回数もまた急激に増加する。

条件式の係数に 0 が多い場合や、係数行列の右上又は左下に 0 が集中している場合などについて、この繰返しの数を減らす工夫が考案されてはいるけれども、一般の場合には役立たない。シンプレックス法に替る、全く新しい考え方に基いた計算法を考えるのでなくては、計算速度を高めることはできない。そこで、ランドの Dantzig, Ford 及び Fulkerson は、LP の原問題とその双対問題の間に成立つ関係を利用する新しい計算法を考え出して、それを Primal-dual Algorithm と名附けた。これは、原問題の infeasible, basic な解と、それに対応する双対問題の feasible, non-basic な解とから出発して、原問題の infeasibility と、双対問題の non-basic の程度とを次第に引下げて行き、最後に完全な解に到達しようとする試みである。

この計算法を使えば、条件式がふえるにつれて、必要な繰返しの回数は大体正比例的に増大するにすぎない。何となれば、一回の計算で、原問題の解の中に含まれるスラック変数の数は必ず一個以上減少するから。然しそれでも、実用的な問題を手軽に解く方法としては、決して充分とはいえない。何とかして、問題の大きさには無関係に、一定回数の計算によつて必ず解が得られるような方法を考えなくてはならない。

所要計算回数を問題の大きさに無関にするためには、従来のシプレックス法、又は上記の primal-dual 法のように、一回に一変数しか動かさないというようなやり方を止めて、全変数を同時に動かすことを考えることが必要である。

筆者(古瀬)の微分方程式解法、Frisch の conjugate gradient method は、何れも、このような試みの具体化であるが、ここに紹介する Kelley の方法もまた、この方向に沿った新しい有望な解法の一つである。

彼の方法は、原問題の変数の値を、それに対応する双対問題の条件式の符号の正符に依じて同時に動かしてやる方法である。その背後には、市場における各商品の需給バランスが、自由競争価格の変動を通じて、自動的に達成される過程に対するアナロジーが存在する。この点においては、Kelley の解法は、Frisch のそれよりもむしろ、筆者の方法に近いものと言うべきであろう。

但し、筆者の方法では各変数が時間について連続的に変化するのに対し、彼の方法ではその変化が不連続的であり、問題の大きさの如何にかかわらず、60—80回の繰返しで解に到達する。従つて、前者がアナログ・コンピューター又は微分解析機向きの解法であるとするれば、後者はデジタル・コンピューターに適するようにそれを書き改めたもの、と言つてよいであろう。

その外にも、計算法についての下記のような五つの論文が掲載されているけれども、Kelley の上記の論文に比べれば、それほど重要とは考えられない。

2. Ford, L. R. Jr. and D. R. Fulkerson: a Primal-dual Algorithm for the Capacitated Hitchcock Problem. 輸送問題における各輸送路に、輸送量の最高限度が存在する場合について、通常のシプレックス法よりも primal-dual 法の方が簡単に解けることを示している。

3. Galler, B. A. and P. S. Dwyer: Translating the Method of Reduced Matrices to Machines.

m 給供地 $\times n$ 需要地の輸送問題を通常 LP の形で書けば、その条件式は $(m+n) \times mn$ の係数行列をもつことになる。その feasible basis は、従つて、 $(m+n) \times (m+n)$ の行列となり、その各行・各列はそれぞれ唯一つの零でない数 1 をもたなければならない。この列の数を mn から $(m+n)$ に減らすために、 $m \times n$ の運賃行列の或る行又は列から同じ値を引いて 0 要素を作り、その運賃 0 となつた x_{ij} を上記の $(m+n) \times m \cdot n$ 行列の column から除く、というやり方をとる。この結果、目的函数の値は減少するが、 x_{ij} の値の如何は目的函数に影響しないことになるから、これを除いても差支えない。

これを何回か繰返して、最後に $(m+n) \times (m+n)$ の permutation matrix に到達すれば、残された変数を全部 1 とおいたものが、その最適解となる。

この報告では $l=3$, $m=4$, $n=5$ の三次元輸送問題を IBM 704 で解いて、約 1.3 分を要した、と書いてある。

4. Hildreth, C.: A Quadratic Programming Procedure.

非線型計画法のうち最も簡単な二次形式計画問題の解法には既に二三の方法が提案されているが、これは次回の計算へ移行する手続きが簡単な一方法を論じたものである。

以下紙面の制約上、表題のみを記す。

5. Jacobs, W.: Loss of Accuracy in Simplex Computation.

6. Thompson, P. M.: Editing Large Linear Programming Matrices.

其他、ケース・スタディズとして、石油精製、輸送問題についての五つの実施例の報告が掲載されている。