# ファン・デァ・ウェルデン「数理統計学」

B. L. van der Waerden, Mathematische Statistik. Mit 39 Textfiguren und 13 Zahlentafeln. 360 Seiten. 1957.（Springer-Verlag.）

武 隈 良 一

著者ファン・デァ・ウェルデンは和蘭生れの数学者で夙に令名のある人。スウィスにながく住み現在はチューリッヒ大学の数学教授である。彼の活躍は多方面にわたり，リー群，代数幾何，量子力学，一次変換群，代数学，古代数学史に関する著書によって広く知られている。かく多彩である上に今度さらに数理統計学に関する書物を出版した。これとても長年にわたって準備されたものでやはり彼の力作であるといえよう。

英語で書かれた数理統計学の書物は数多くまたすぐれたものも多い。しかしドイツ語で書かれたものは非常に少ないので早くからこの方面の書物が期待されていたが，この良書がその渇をいやしてくれることになる。

序文をみると，この書物は実際の応用を伴つた長年月にわたる仕事から生れたものであるという。学生時代から経済学者，薬理学者，生理学者，生物学者，技師などが統計の質問をもって彼の処にきた。その際より良き方法を案出して教えてきたが，それらの方法がこの書の基礎となっている。また自然科学および社会科学から適切で有益な例を豊富にあげている。これらの例を紹介することが興味深いのであるが，この書評で詳説できないことが遺憾である。例題というものは決して理論からつくられるものではなく実地から生れるものである。この書の特徴は興味深い例題が数多く含まれていることで，数学理論を厳密に学ぼうとするなら他にもすぐれた書物はある。しかし数学理論の一通りのことは勿論分り易く述べられてあるので初めての人にとっても有益である。函数論やルベク積分の知識を仮定しているとはいうがそれなしでも理解できるように書かれてある。しかし微積分と解析幾何の予備知識は最小限必要であ

る。

この書はもとより入門書であり，数多くの重要理論例えば逐次テスト，判定函数，確率過程などは省略されている。それについては一きわすぐれた専門家の著書，例えば

A. Wald, Sequential Analysis, 1947 (Wiley)

A. Wald, Statistical decision functions, 1950 (Wiley)

J. L. Doob, Stochastic processes. 1953 (Wiley)

を見なければならない。

本書を概観するならば第1章から第6章まではコルモゴロフによる公理的確率論と種々の統計的応用である。詳しくいえば第1，3，5章において数学の補助手段を与え第2，4，6章においてそれらの統計的応用が述べられている。

この書の核心ともいうべきものは推定理論と仮説検定の2つである。前者は最小二乗法（第7章）に始まり有効推定の概念の精密化とその適確な証明（第8章）および観測相対度数への応用（第9章）から成る。後者は $\chi^2$ テストとtテストによる仮説の検定（第11章）と順序テスト（第12章）からなる。

その他第10章において生物測定を取扱い，最後の第13章において相関にふれている。

---

## 第1章　一般基礎

§1.　確率論の基礎概念

A．予めの説明と例

B．事　　象

事象（Ereignisse）の場をとらえるのにブール代数と集合体との2通りがある。前者は事象を定義しない物（Somen）とみなし既知の公理を満足する算法をもつと考える。後者は事象を集合の部分集合と考える。この両者の同値なことは Stone (1936) が証明したところである。ここでは Kolmogorov に従って事象を初等事象（Elementarereignisse）の集合として取扱う。

C．確　　率

Kolmogorov の公理の上に確率論をきずく。

D．条件確率

$P(A) \neq 0$ とし A が生じたという仮定の下に B の条件確率は

$$(5) \qquad P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

によって定義される。したがって

$$(6) \qquad P(AB) = P(A)P_A(B)$$

となる。

しかし H. Richter や P. Finsler が注意したように $P_A(B)$ は(5)によって計算されるとはきまらない。むしろ $P_A(B)$ についての仮定が作られそれにより $P(AB)$ が(6)によって計算されることがある（例3をみよ）。故に(6)を公理として採用することが出来る。

しかしここでは Kolmogorov により(5)を公理として基礎づけていく。

E．全確率の法則

F．独立性

G．無限和

事象の可附番無限和がまた事象であり，これが確率をもつために，ルベグ測度論の方法により事象の体を可測集合の体に拡大し，集合 $A^*$ に測度数 $P^*(A^*)$ を定義する。

集合 $A^*$ の可附番無限和はまた集合に属し，次の無制限和定理を満足する。

$$P^*(A_1^* + A_2^* + \cdots\cdots) = P^*(A_1^*) + P^*(A_2^*) + \cdots\cdots$$

§2．偶然量，分布函数

A．偶然量

偶然量（Zufällige Grössen）又は確率変数（stochastische Veränderliche）とは偶然に関する値である。

B．分布函数

C．確率密度

D．正規分布

正規分布における $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ の級数展開について述べ，$u=\Phi(t)$ とその逆函数 $t=\Psi(u)$ の表を巻末に与えている。（表1，表2）

§ 3．平均値と標準偏差

A．期 待 値

B．独 立 量

C．標準偏差と分散

D．Tschebyscheff の不等式

§ 4． 平均値と確率の積分表示

A．長方形と開集合

B．2 次元の確率密度

C．積分による確率の計算

D．和 $x+y$ の分布函数

定理III． 確率密度 $f(t)$ と $g(t)$ を有する独立量の和の確率密度は

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du$$

によって与えられる。

## 第2章 確率と相対度数

§ 5． 2 項分布

A．Bernoulli の公式

B．平均値と標準偏差

C．大数の法則

§ 6． 相対度数 h は確率 p からどの位離れることができるか

A．2 項分布の正規分布による近似

B．$\sigma$ の評価

p に対する評価として h をとり，$\sigma_n{}^2=\frac{\sigma^2}{n^2}=\frac{pq}{n}$ に対する評価として

$S_n{}^2=\frac{S'^2}{n^2}=\frac{kl}{n^2(n-1)}=\frac{h(1-h)}{n-1}$ をとる

C．h に対する両側および片側制限

不等式 $|h-p| \leqq g\left(\frac{pq}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

が成立する確率を $\Phi(g)=1-\beta$ とするとき

$$2\Phi(g)-1=1-2\beta$$

となる。故に成立しない確率は $2\beta$ となり，g を大きくとれば $2\beta$ は小さくなる。

正規分布における誤差確率（片側 $\beta$，両側 $2\beta$）に対する g の値が巻末の表に与えられている。（表3）

§7． 未知の確率に対する信頼限界

A．問　　題

前節における条件の下に相対度数 h が与えられたとき，確率 p の信頼限界を求めよ。

B．大きな n に対する問題の近似解

$$|h-p| \leqq g\left(\frac{pq}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

を平方して

$$(h-p)^2 \leqq \frac{g^2}{n}p(1-p)$$

をグラフで解く。

信頼限界は次の式で与えられる

$$(4)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{hn+\frac{1}{2}g^2-g\left[h(1-h)n+\frac{1}{4}g^2\right]^{\frac{1}{2}}}{n+g^2} \\[2ex] p_2 = \dfrac{hn+\frac{1}{2}g^2+g\left[h(1-h)n+\frac{1}{4}g^2\right]^{\frac{1}{2}}}{n+g^2} \end{cases}$$

但し k と n−k は最小限4とす。

C．問題の精密な解

2項分布を正規分布に近似させないで，そのまま取扱うことは周知のように Cloper と E. S. Pearson (1934) によってなされた。

§8． 選出問題，抜取標本の方法

壷のなかに K 個の白球と L 個の黒球があるとき，k 個の白球と l 個の黒

球をとりだす確率を求めよ。

これは超越幾何分布の問題である。その応用は人口統計，経済統計において広い。

§9．2つの確率の比較

A．問　題

ある信頼のもとに $p_1>p_2$ を主張するためには，$h_1-h_2$ がどれ位大きくなければならないか

差 $h_1-h_2$ が平均値 $p_1-p_2$ と標準偏差 $\sigma=(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{\frac{1}{2}}$ をもつとき，$\sigma$ が未知ならば如何。第1の方法として $\sigma^2$ 代りに

$$S^2=S_1^2+S_2^2=\frac{h_1(1-h_1)}{n_1-1}+\frac{h_2(1-h_2)}{n_2-1}$$

をとる。

B．$\chi^2$ テスト

第2の方法として，仮設 $p_1=p_2$ を捨てるによい条件を求める。

$$(7)\qquad \chi^2=\frac{(h_1-h_2)^2 n_1 n_2 (N-1)}{KL}>g^2$$

ならば仮設をすてる。

C．立　証

上の 次$^2$ テストの正しいことを証明する。

D．$\chi^2$ テストの片側および両側応用

片側応用とは $\chi^2$ が十分大きいとき $h_1 \gtreqless h_2$ から $p_1 \gtreqless p_2$ なる結論を導くことである。片側に応用したテストの誤差確率は両側テストのそれの半分である。

E．小数の信頼性

$\chi^2$ テストは N が小さい数であっても使用できる。

F．R. A. Fisher の精密なテスト

Fisher のテストの例として K. D. Tocher (Biometrika, vol. 37, p. 130) の例があげられている。即ち

| | |
|---|---|
| $k_1 = 2,\quad l_1 = 5$ | $(n_1 = 7)$ |
| $k_2 = 3,\quad l_2 = 2$ | $(n_2 = 5)$ |
| $(K=5)\ (L=7)$ | $(N=12)$ |

§ 10. 稀事象の相対度数

A. Poisson の公式

B. 2 つの命中相対度数の比較

単位時間における命中数 $m_1 = \dfrac{k_1}{t_1}$ と $m_2 = \dfrac{k_2}{t_2}$ の差が純粋に偶然的であり得るかどうかの問題がおこる。

$$\left(\frac{k_1}{t_1} - \frac{k_2}{t_2}\right)^2 > \frac{g^2}{t_1 t_2}(k_1 + k_2)$$

が成立しなければこの差は実際に考えられる。

$\chi^2$ テストとして書けば

$$\chi^2 = \left(\frac{k_1}{t_1} - \frac{k_2}{t_2}\right)^2 \frac{t_1 t_2}{k_1 + k_2} = \frac{(k_1 t_2 - k_2 t_1)^2}{t_1 t_2 (k_1 + k_2)}$$

が $g^2$ より大なることがなければ，偶然の仮設は棄却される。

## 第 3 章　数学の補助手段

§. 11.　重復積分，極座標への変換

§. 12.　ベータ函数とガムマ函数

§. 13.　直交変換

§. 14.　2 次形式と不変式

## 第 4 章　分布函数，平均値，標準偏差の経験的決定

§. 15.　Quetelet の曲線

**Galton** と **Quetlet** は生物学的量の分布は非常にしばしばガウスの誤差曲線によって表わされることを発見した。そしてこの分布を normal と称した。勿論自然の他の分布においてこれとは異なるもののあることは K. Pearson のしめした通りである。

§ 16.　分布函数の経験的決定

真の分布函数 F(t) と経験的分布函数 $F_n(t)$ との差の極大値を $\triangle = F - F_n$ とおき △ の分布函数をしらべる。これは Kolmogorov (1933), Smirnov (1939) Birnbaum および Tingey (1951, 1953) によって研究された。△が ε より大なるとき F(t) が分布函数である仮定をすてるといふテストを△テストとなづける。これに関する Smirnov のテストの表が第 4 表第 5 表として巻末に与えられている。

§ 17.　順序量（順序統計量）

連続分布函数 F(t) を有する偶然量 x の n 個の独立した値からなる標本を $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ とする。$x_i$ を大きさの順にならべたものを

$$x^{(1)} < x^{(2)} < \cdots\cdots < x^{(n)}$$

とするときこの各々を順序量という。

h と n−h がともに大なるとき順序量 $x^{(h)}$ は平均値 $t_0$, 標準偏差

$$\sigma = (\alpha f_0)^{-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{(h-1)(n-h)}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} f_0^{-1}$$

を以て漸近的に正規分布する。

平均値が 0 で標準偏差が 1 のとき $t_0 = 0$, $f_0^{-1} = \sqrt{2\pi}$ より $\sigma_z \sim \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$ となる。

h 又は n−h が小さいときは問題は困難になる。Fisher, Tippert, Fréchet, v. Mises, Gumbel がこれに対して重要な寄与をなしている。なお S. S. Wilks の Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) にある論文を見られたい。

順序量は 2 次元の場合にも考えられる。

§ 18.　経験的平均と経験的標準偏差

これは標本平均と標本標準偏差について述べている。

§ 19.　Sheppard の修正

§ 20.　その他の平均と偏差量

このなかに Cauchy 分布函数が例としてとりあげられている。

## 第 5 章　Fourier 積分と極限定理

§ 21.　特性函数

A. 複素数の平均値

B. 特性函数

C. 特性函数の連続性

D. 積　率

E. 逆公式

F. 和の特性函数

§ 22. 例　題

A. 2 項分布

B. 正規分布

C. Poisson 分布

§ 23. $\chi^2$ 分布

天文学者 F. R. Helmert がガウスの誤差論に関連して正規分布量の平方の和を研究しその際分布函数 G(u) に到達した。K. Pearson は後にこれを $\chi^2$ 分布と名づけた。

$$G(u)=\begin{cases} 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (u<0) \\ \alpha\int_0^u y^{\lambda-1}e^{-\frac{1}{2}y}dy \cdots\cdots & (u\geqq 0) \end{cases}$$

$\lambda=\frac{1}{2}f$ とすると f は自然数にして R. A. Fisher により自由度の数とよばれる。

§ 24. 極限定理

A. Lévy-Cramér の極限定理

B. 極限定理の例：2 項分布

C. 大数の法則

Khintschin と Dugué の一般化された大数の法則が述べられているがこれは大数の弱法則である。一方大数の強法則もあるがこれは数理統計学に於てあまり重要な役割を果していない。A. Khintschine の論文 (Comptes Rendus 188 (1929) p. 477) を見よ。

D. 中心極限定理

中心極限定理に関するこれまでの結果に対する文献をしめしているが次の定

理だけを証明している。

定理．$x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ は独立とし平均値 $\mu$ と標準偏差 $\sigma$ の同じ分布函数を有するとき，

$x_1 + x_2 + \cdots\cdots x_n$ は平均値 $n\mu$ と標準偏差 $\sigma\sqrt{n}$ を以て漸近的正規に分布する。

E．例題：$\chi^2$ 分布

F．第2極限定理

これは Fréchet と Shohat によるもので非常に役立つものである。

G．初等極限定理

これまでの極限定理はフーリエの積分変換によるものであるが，Cramér の方法を用いると初等的に導かれる。これは van der Waerden の気づいたところである。

§ 25．長方形分布

## 第6章　Gauss の誤差論と Student のテスト

§ 26．Gauss の誤差論

A．相等しい精密度の観測

B．異なる精密度の観測

C．平均 M の分布函数

§ 27．$S^2$ の分布

A．量 $\chi^2$ の導入

B．積分の計算

C．M と $\chi^2$ の独立性

D．$\chi^2$ の平均値と標準偏差

E．$S^2$ に対する限界

これに対する表は巻末の第6表にる。

F．$\chi^2$ 分布の加法性

§ 28．Student のテスト

これに対する表は巻末の第7表にある。

§ 29. 2 つの平均値の比較

## 第7章 最 小 二 乗 法

§ 30. 観測誤差の調整

§ 31. 推定値 $\breve{\theta}$ の平均と標準偏差

A. 平 均 値

B. 標準偏差

C. 幾何学的説明

D. Gauss の定理

§ 32. 分散 $\sigma^2$ の推定

§ 33. 回帰直線

§ 34. 経済量の因果的説明

古典的例としては A. Hanau の研究「豚の価格の巡回的変動」がある。最小二乗法は今日なお有力な方法であって G. Tinter, L. R. Klein, W. C. Hood と T. C. Koopmans による書物などを見られたい。

## 第8章 未知定数の推定

§ 35. R. A. Fisher の最尤法

§ 36. 極大の計算による決定

例として Cauchy 分布が取上げられている。

§ 37. Fréchet の不等式

これは Fréchet (1943), Rao, Cramér によって独立に見出されたもので，英語の文献では Cramér-Rao の不等式又は情報不等式という。式は次のものである。

$$\sigma_T^2 \geqq \frac{[1+b'(\theta)]^2}{I(\theta)}$$

§ 38. 十分推定と最小推定

十分推定 (erschöpfende Schätzung) とは R. A. Fisher による sufficient estimate 又は sufficient statistic をいう。

§ 39. 例 題

正規分布の平均値の推定，既知の平均値をもつ正規分布の分散の推定，最小二乗法，2項分布の確率の推定。

さてこれまでに考えた場合はみな Fréchet の不等式が等式となり，つねに2つの条件（§38 の (a)(b)）を満足していたが，然らざる場合に不偏最小推定（Minimalschätzungen ohne Bias）を求めるには他の方法によらねばならない。その方法は Rao によるものであるがもっと一般の仮定の下に Lehmann と Scheffe (1950) が導いた。しかしこの方法を論ずる準備として Kolmogorov の条件付期待値の説明から入る。

§ 40. 条件付期待値

Kolmogorov が条件付期待値と定義した $E_t u$ については彼の著書 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung V §4 をみるとよい。そこでは Nikodym の定理が援用されている。

条件付期待値の4つの性質のうち始めの3つは定義から直接でるが，最後のものは Kolmogorov が証明した。

§ 41. 十分統計量

定理. 確率密度 $g(x/\theta)$ が $g(x/\theta)=e(t/\theta)h(x)$ なる形をしているとき，$\theta$ に独立な函数 $E_t u$ を決定することができる。

§ 42. 不偏推定の問題への応用

A. 推定の修正

B. 不偏推定に対する積分式

§ 43. 応 用

因数 $\alpha$ を有する $\chi^2$ 分布，長方形分布など

§ 44. 正規分布の分散の推定

§ 45. 漸近的性質

A. 最尤推定の緊密

B. 漸近的正規，平均値と分散

C. 有 効

## 第9章 観測相対度数の測定

§ 46．最 尤 法

§ 47．$n \to \infty$ に対する尤推定の緊密

§ 48．最尤，極小 $\chi^2$ と最小２乗

A．極小 $\chi_0^2$

B．極小 $\chi_x^2$

C．最　尤

§ 49．$n \to \infty$ に対する $\chi^2$ と $\tilde{\theta}$ の漸近分布

§ 50．有　効

§ 51．$\chi^2$ テスト

## 第10章　生 物 測 定

薬量死亡曲線を作用曲線（Wirkungskurve）とよぶが，観測された作用曲線の種々の測定方法について述べている。予備知識としては第１章と第２章のものしか必要としない。

§ 52．作用曲線と対数作用曲線

§ 53．Behrens と Kärber の面積法

これは半分だけ死亡する薬量（mittlere tödliche Dosis）の概念に基づく方法で van der Waerden はさらにこれを精密化した。詳細は拙稿「van der Waerden による50％致死量測定法」（日本数学教育会雑誌第30巻第１号即ち数学教育第２巻第１号1948, 41頁）を見られたい。

§ 54．正規曲線にもとづく方法

A．図式測定

B．最 尤 法

C．２ 点 法

D．I 点 法

E．ロギスティ曲線（logistische Kurve）

§ 55．"Auf und ab" 方法

A．Dixon と Mood の方法

B．確率近似の方法

## 第11章　テストによる仮説の検定

§ 56.　$\chi^2$ テストの応用

A．1 つとられた確率の検定

B．多くとられた確率

C．2 つの確率の比較

D．2 つの確率の独立性の検定

E．2 つ以上の確率の比較

F．稀有事象

G．2 つの稀有事象の比較

H．分布の正規性の検定

J．作用曲線の正規性の検定

K．$\chi^2$ テストを応用するには期待値 np は如何ほど大きくなければならないか。

L．$\chi^2$ テストの例

§ 57.　分散の商テスト（Fテスト）

これに対する3表は巻末の第8A，8B表にある。

§ 58.　分散分析

A．2 つの級における分散

B．F テスト

C．非正規分布

D．t テストとの関係

E．対 相 関

F．より広い応用

§ 59.　一般原理．最有力テスト

A．　基礎概念

B．　連続変数の場合

C．　離散変数の場合

D．例

§ 60．複合仮説

## 第12章　順序テスト

順序テスト（Anordnungstests）は観測された量そのものの値に施すのではなく，その順序即ち計られた x と y との間の関係 $x<y$, $x>y$ に対して行うものである。

§ 61．記号テスト

A．原　理

n 個の差 $z_i = x_i - y_i$ のうち k 個が正で n − k 個は負とする。仮説 H は，各 i に対して両方の観測された $x_i$ と $y_i$ は同じ分布函数を有する独立の偶然量である，とする。 $z_i$ が正になる個数 k が m より大なるとき仮説を棄却する。

これに対する表は巻末の第9表にある。

B．Bindungen

差 $z_i = x_i - y_i$ が 0 になる場合を Bindungen といいこれの取扱い方を述べている。

C．分布の対称

D．中央値の信頼限界

§ 62． 2 つの標本の問題

A．問　題

x と y が同じ分布函数を有するという仮説の検定に用いられたこれまでの 2 つの方法即ち Student テストと F テストは正規分布を仮定していた。正規分布でない場合に精密に行うためにここでは順序関係 $x<y$, $x>y$ のみを利用していかう。

B．Smirnoff のテスト

§ 63． Wilcoxon テスト

A．テストの見本

観測された $x_i$ と $y_i$ とが増加量としてならべられているとき添数 i をとり

去った結果 x と y の文字の排列として

yyxyxyyxx

になったとする。このとき x が y より後にあれば逆（Inversion）という。この例では15の逆がある。Wilcoxon のテストは逆の個数 U が制限 $U_\beta$ を超えるとき帰無仮説を棄却する。

B．U の平均値と分散

C．$g \to \infty$, $h \to \infty$ に対する U の漸近分布

D．$h \to \infty$ に対する U の漸近分布

E．小さな g と h に対する表

これに対する表は巻末の第10表にある。

§ 64. Wilcoxon テストの力

A．仮説 H′ の下における U の平均値と分散

B．第1の場合，等しい順序量の g と h

C．Student テストとの比較

D．第2の場合，h が g に対して大きい。

E．その他の場合

§ 65. X テスト

A．発見的誘導

B．X テスト

X テストにおける X に対する制限の表は巻末の第11表にある。

C．$X_\beta$ の計算

D．X の平均値と分散

$$\sigma_x^2 = \frac{gh}{n-1}Q$$

$$Q = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\Psi^2\left(\frac{i}{n+1}\right)$$

この Q に対する表は巻末の第12表にある。

E．X の漸近分布

F．等しい x と y の取扱い

G．Student テストとの比較

H．非正規分布

## 第13章 相　　関

§ 66．共変と相関係数

A．真の相関係数 $\rho$

B．経験相関係数 r

§ 67．従属に対する標識としての相関係数

相関係数 r に対する制限の表は巻末の第13表にある。

§ 68．清算相関係数

A．清算（Bereinigung）の概念

B．$r_{xy/z}$ の分布函数

C．幾何学的表示

§ 69．従属変数における係数 r の分布

A．対量の正規分布

B．大きな n に対する r の漸近分布

C．$S_x^2$, $S_y^2$ と r の精密な分布

D．R. A. Fisher の補助量 Z

§ 70．Spearman の順位相関 R

A．R の定義

B．独立量における R の分布

C．正規分布との比較

D．Student 分布との比較

E．従属の場合

§ 71．Kendall の順位相関 T

A．T の定義

B．T の分布

C．R と T の比較

## 第14章　諸　　表

第１表から第13表まで。

以上で本文を終つているが索引の表として例題，英語術語の飜訳，人名と事項に関するものがある。このうち例題の索引は各科目に分けてあるので検出に便利である。

(1958. 12. 5.)

(校正に際して読みかえしてみると，題目の飜訳に終始しているように見えて，汗顔のいたりである。二三の重要な例を紹介した方がよりよいと思われるが，後日に許されたい)