# 頂点被覆に適用されたリスト減少法の解析についての再考

飯田浩志*

概要

この小篇では, 頂点被覆問題への近似解法であるリスト減少法について, 拙稿 Discussion paper series no. 112 で行ったそれとは少し異なる解析を試みる.

キーワード: 組合せ最適化, 頂点被覆問題, 近似アルゴリズム

与えられた無向グラフ $G=(V,E)$ における頂点の部分集合 $S \subseteq V$ について, いずれの枝であれ $S$ に属する頂点のうち少なくとも一つに接続する, 要するに $S$ に端点を持つとき, $S$ を頂点被覆 (vertex cover) という. イメージとしては, $S$ に属する頂点を一斉に持ち上げると, すべての枝がつられて持ち上がる, という場面を想像していただきたい. 頂点被覆問題 (以降, VC と記す) は, 要素数が最小の頂点被覆 $S$ を求める, つまり $|S|$ を最小化する組合せ最適化問題である. 以下では, 頂点 $i$ (頂点 $v_i \in V$ とその添字 $i$ を同一視している) に接続する枝の本数を頂点 $i$ の次数といい, $d_i$ で表す. 加えて, 与えられたグラフにおける最大次数 $\max_i d_i$ を $\Delta$ で, 枝の総数 $|E|$ を $m$ でそれぞれ表す.

与えられたグラフの極大†マッチング (互いに端点を共有しない枝の集合) $M \subseteq E$ を考えると, $M$ に属するすべての枝の端点を集めれば, VC へ

* E-mail: auau2.a.go.go@gmail.com

† 最大ではなく極大の方が好ましい.

の近似アルゴリズムとなる．なぜなら $M$ の極大性から, $E \setminus M$ にある枝いずれも $M$ に属する枝と端点を共有するからである．よく知られているように, これは, VC への 2 近似 (近似率が 2, すなわち近似値が最適値の倍以下であることが保証される) アルゴリズムである．拙稿 [3] でも述べたように, VC への近似率 2 より良いアルゴリズムは, 知られていない．最近では, Han *et al* [2] が, ある条件下での 1.5 近似アルゴリズムを提案している．拙稿 [3] では, Avis and Imamura [1] がリスト減少法に対して導いた近似率 $\sqrt{\Delta}/2 + 3/2$ の精密化を試みたものの, 良い結果は得られなかった．ここでは, また少し違った解析を試みる．

リスト減少法 (list decreasing heuristic) とは, 全頂点を次数の非昇順 $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots$ に並べた後, 未カバーの枝が接続する頂点をこの順に選択していくという, VC への近似アルゴリズムであり, 最初に決めた頂点の並びを動かさないところに特徴がある．拙稿 [3] では, Avis and Imamura [1] と同様に, リスト減少法が生成する近似解である頂点集合 $C_D$ の中を $p := \min\{j \mid \sum_{i=1}^{j} d_i \geq m\}$ より大きいものとそれ以下に分けて解析したけれども, じつは $C_D$ を分けないことが, また違った結果を生む．ここで, 頂点 $i$ を $C_D$ に入れるとき, 新たにカバーされる枝のうち一本に重み $1/d_i$ を附し, その他の枝の重みはすべて $1/\Delta$ とするのは, 拙稿 [3] と同じである．

詳しくいうと, $C_D$ に属する頂点の総次数は明らかに $2m$ 以下なので, Avis and Imamura の補題 2 [1, p. 202] から, $1/d_i$ なる重みを附された枝 $|C_D|$ 本の重みの総和は $|C_D|^2/(2m)$ 以上である．素朴に, 頂点おのおのの選択/非選択を表す $|V|$ 個の 0–1 変数 $x_i$ (1 なら選択) および各枝の端点に対応する 0–1 変数ふたつのうち少なくとも一方は 1 という $m$ 本の制約式からなる, $\sum_i x_i$ の最小化を目的とする整数計画問題として定式化された VC の線形緩和問題 (すべての変数 $x_i$ を $x_i \geq 0$ として整数性を除いた問題) を考える．その線形緩和問題の双対問題における各枝 $e \in E$ の重みを表す変数を $y_e$ とし, もとの VC の最適値を Opt とすると, 弱双対性から [1, pp. 202-3]

$$\begin{aligned}\mathrm{Opt} \geq \sum_{e \in E} y_e &\geq \frac{m - |C_D|}{\Delta} + \frac{|C_D|^2}{2m} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{|C_D|^2}{2\Delta}} - \frac{|C_D|}{\Delta} = \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Delta}} - \frac{1}{\Delta} \right) |C_D|.\end{aligned}$$

よって,

$$|C_D| \leq \frac{\Delta}{\sqrt{2\Delta} - 1} \mathrm{Opt}$$

を得る. このように, 拙稿 [3] で得た近似率と同じではあるものの, 余分な項が出てこない.

以上の議論において, $C_D$ に属する頂点の総次数を, 与えられたグラフにおける頂点の総次数 $2m$ で押さえたのは, いかにも大雑把ではある. ただ, 容易に分かるように, ある正の整数 $q$ について $2m - q$ でもし押さえられたとしても, それは単に拙稿 [3] で得られたように

$$|C_D| \leq \frac{\Delta}{\sqrt{2\Delta} - 1} \mathrm{Opt} - \frac{q}{2\sqrt{2\Delta} - 2}$$

を導くだけである. この観点から, 近似率 $\Delta/(\sqrt{2\Delta} - 1)$ をより精密にするためには, Avis and Imamura [1] の議論に沿う限り, $2m - q$ の形より小さい値で $C_D$ に属する頂点の総次数を押さえることが必須であろう. 実際, Avis and Imamura [1] が $C_D$ の中で $p$ より大きいものの次数の総和を $m$ で押さえたことは, 本質的なはずである.

最後に, 拙稿 [3] でも述べたように, Avis and Imamura [1] は, 正確には近似率 $\sqrt{\Delta}/2 + 3/2$ より小さい $\Delta/(2\sqrt{\Delta} - 1) + 1$ を得ている. そちらと比較した場合では, 数値実験によって容易に確かめられるように, ここでも得た $\Delta/(\sqrt{2\Delta} - 1)$ の方が小さくなる範囲は $2 \leq \Delta \leq 19$ より狭い $2 \leq \Delta \leq 9$ である.

## 参考文献

[1] D. Avis and T. Imamura, A list heuristic for vertex cover. *Oper Res Lett* **35**(2) 201-4 (2007) [ doi:10.1016/j.orl.2006.03.014 ].

[2] Q. Han, A. P. Punnen and Y. Ye, An edge-reduction algorithm for the vertex cover problem. *Oper Res Lett* **37**(3) 181-6 (2009) [ doi:10.1016/j.orl.2009.01.010 ].

[3] 飯田, 頂点被覆へのリスト減少法の解析に関する一考察. Discussion paper series no. 112, 小樽商科大学ビジネス創造センタ, 2007; ⟨`http://hdl.handle.net/10252/908`⟩ から入手可能.