19世紀前半における独仏の数学

武　隈　良　一

§1.　ド　イ　ツ

18世紀においてふるわなかつたドイツはガウスを生むことによつて面目を一新しこの世紀における学界最高の地位をかちえた。

ガウス（Karl Friedrich Gauss, 1777—1855）の偉大さをクラインが評価して「彼に比すべき史上の偉人はただ２人の先駆者アルキメデス，ニュートンあるのみ」と述べているが，実際彼は単に博学であつたばかりでなく，数学の各分野において大きな金字塔をうち立てた意味において真の universalist といえる。

ブラウンシュワィヒにおいて煉瓦職人の子とし生れた彼は当時の領主の援助によつて1795年ゲッティンゲン大学に入学した。はじめは言語学と数学のいずれを専攻しようかと迷つたという。1798年同大学を卒業し1799年ヘルムシュテット大学において学位を得た。学位論文は「代数学の基本定理」すなわち代数方程式の根の存在の証明についてである。それ以後郷里ブラウンシュワィヒに帰り領主の援助の下に研究に従事した。1807年ゲッティンゲンに新設された天文台に赴任してからは死に到るまでその地にとどまり同地母校の大学教授兼天文台長として輝かしい足跡を残した。彼は数学の研究とともに天文学への関心が深くまたラテン語をしきりに用いたことが目立つ。

さきに述べたようにガウスが学界へデビュしたのは「代数学の基本定理」の証明によつてであり，その論文の題名は「１変数のすべての有理整代数函数が1次と2次の実因数に分解できるという定理の新らしい証明」(Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel recondi gradus resolvi posse,

1799）である。これによりジラルやダランベールの定理は厳格に証明されたことになる。彼はまた後年３つの別証明を与えた。

ついで「数論研究」（Disquisitiones arithmeticae, 1801）を著わしたがこれはガウスの傑作の１つに数えられている。彼は数論を特に愛好し「数学は科学の女王であり，数論は数学の女王である」といつた。また友人への手紙のなかに「少くとも自分にとつては高等整数論の研究は今後とも数学のなかで最上のものとなり，いかほど美しい天文学上の発見も高等整数論の与える喜びに比べればとるに足らない」と語つている。

この書の内容は当時までに得られた結果に彼の創意を加味したもので，現代整数論の端緒はルジャンドルの「整数論」ではなくこの書にはじまると定評される。同一の整数で割つたときに剰余が同じになる整数を「合同数」というが，この書物は合同の概念を導入して整数論を新しく組立てたことが特色である。以下なかにも著名なものをあげると，先ず平方剰余の相互法則の証明であるがこれは1796年に得られた。彼は後年これに対してさらに５つの別証明と生前未発表の２つの証明を得た。また $x^n-1=0$ の根の研究すなわち円周の分割問題を最終に述べているが，これは正17辺形（一般には正 n 辺形，$n=2^m+1$，$m=2^k$，ただし n は素数）の作図に端を発するものである。「ガウスの日記」によると1796年３月30日の朝寝床をはなれる刹那にこの作図が得られたという。正17辺形の作図法の発見はガウスをして数学を専攻せしめる動機になつたと伝えられるが，実際19世紀第一の数学者の首途にふさわしい業蹟といえよう。

学位論文や「数論研究」によるとガウスは早くから複素数の幾何学的表示を知つていたように見受けられる。元来虚数は18世紀に盛んに用いられたがそれは記号計算にとどまり $\sqrt{-1}$ の真意に徹しなかつた。虚数を「仮りの数」でなくするために幾何学的表示を試みた最初の人はウォリス（1693）であつたがこれは２次方程式の図式解法にとどまり方法は普遍的ではなかつた。ついでノルウェーのヴェッセル（Caspar Wessel, 1745―1818）が1797年デンマルクのアカデミーに提出した論文のなかに現在行われている表示法を発表した。しかしこ

れはその仏訳が1897年に出るまであまり注意されなかつた。またスウィスのアルガン（Jean Robert Argand, 1768—1822）も「虚数を幾何学的作図によつて表わす一つの方法についての試論」（Essai sur une manièr de représenter les quantités imaginaires dans les construction géométriques, 1806）において同様の表示法を発表したが余り注目されなかつた。ガウスは1811年12月18日ベッセルへの手紙のなかに「……すべての実数が無限直線上の点で表わされるように，虚数は１つの無限に拡がつた平面上の点で表わすことができる。このとき横軸上に実数 a に対応する点をとり，縦軸上に実数 b に対応する点をとり，これらを通つて座標軸に平行な直線をひくとその交点が a+ib を表わす点となる。……」と書いており，また1831年の論文「４次剰余の理論」において明確にこれを発表した。このように a+bi を平面上に表わすときこの平面を「ガウスの平面」又は「数平面」とよぶ。なお a+bi は a•1+b•i から得られるのでこれを複素数と名づけたのはガウスである。

さて19世紀の最初の日すなわち1801年1月1日にイタリアの天文学者ピアッツィ（Giuseppe Piazzi, 1746—1826）がケレスと名づけられた最初の小遊星を発見した。この新しい星の観測可能の時間は短かいので，僅かの観測から遊星の軌道を決定する問題が起つたが，ガウスはこれを完全に解いた。また1802年に第２の小遊星パラスが発見されたとき，遊星の摂動に興味をもち，ついて摂動論に有効な改良された方法を創造した。これに関する代表的な著書として「天体運動論」（Theoria motus corporum coelestium, 1809）がある。この出版に際し最小２乗法を発表し誤差の理論を組立てて近似計算の信頼度をしめした。このときの計算により予言した時刻にケレスが現れた。

ちようどこの頃「無限級数に関する一般論」（Disquisitiones generales circa seriem infinitam……, 1812）を発表したが，それは超越幾何級数

$$F(\alpha, \beta, \gamma, u) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{2!\gamma} u + \frac{\alpha(\gamma+1)\beta(\beta+1)}{2!(\gamma+1)} u^2 + \cdots\cdots$$

をとりあつかつたもので，級数の収斂についての最初の体系的研究である。この級数はオイラーが次の函数の形

$$F(\alpha, \beta, \gamma, u) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}dx$$

で知つていたものであるが，プファッフ（Johann Friedrich Pfaff, 1765—1825）を通じてこの函数を知つたガウスはさらにこれが次の線型微分方程式

$$u(1-u)\frac{d^2F}{du^2}+\left\{\gamma-(\alpha+\beta+1)u\right\}\frac{dF}{du}-\alpha\beta F=0$$

を満足することを見出した。この式は**ガウスの微分方程式**とよばれるもので後にリーマンによつて研究されフックス型微分方程式の萌芽をなすものである。

1816年以後土地の精密な測量を命ぜられ1821年から25年までの間は彼自身も野外作業に従事した。そのうちゲッティンゲンとアルトナとの緯度の差，ホーエルハーゲン，ブロッケン，インゼルスベルクの三山頂を結ぶ三角形を測量したことが著名である。測量の整理に20年余りも費し1841年に事業は完成した。ガウスの不朽の業績は誤差を確率変数とみなしたときその密度が

$$f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

にて表わされることを見出したことである。さきに述べた最小２乗法はこの頃「最小誤差を有する観測組合せの理論」(Theoria combinationis obervationum erroribus minimis obnoxiae, 1821) として出版された。これに対してルジャンドルは自分の最小２乗法を横取りするものであると訴えたが，実際にはガウスが独立に考えしかもルジャンドルをしのいでいるので後の研究者はみなガウスの跡をおうた。

今日の**微分幾何學**の誕生ともいうべき論文は「曲面に関する一般的研究」(Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827) である。これは前に述べた測量の問題に関連して起つたもので，そこでは曲線座標（u, v）が用いられ，線素 ds が２次微分形式 $ds^2 = Edu^2 + 2F\,dudv + Gdv^2$ で表わされる。そして曲面の全曲率（ガウスの曲率）がE, F, G とその導函数によつて表わされるという定理を証明して曲面の研究を基礎づけた。ガウスはこの定理を Theorema egregium（抜群の定理）と名づけた。

物理学における研究としてはゲッティンゲン大学教授ウェーバー（Wilhelm

Eduard Weber, 1804—1891）とともに地磁気に関する多数の実験を行い，彼の名でよばれる磁場の絶対単位を導入した。また電磁気学にも貢献しこれに関連してポテシシャル論の端緒をひらいた。その他力学においては最小束縛の原理を発表し重要な寄与をなした。

ガウスはすぐれた著書，論文の外に日記と手紙を残している。それらによると公にはしなかつたが，非エウクレイデス幾何学と楕円函数を発見していたことが分る。ガウスは両者について早くから卓見をもつていたが円熟をねがい性急な発表をきらつたため他におくれ正式には未発表に終つた。

非エゥクレイデス幾何学についていえば，彼は「三角形の内角の和が２直角より小なる」幾何学を知つていた。しかし当時はカント（Immanuel Kant, 1724−1804）の絶対空間論が一世を風靡していたのでその発表を躊躇した。またさきにのべた三角形の測量によつて上の幾何学の正否を確めたが角の和の誤差が測量のさいの誤差の限界内にあるので結論は得られなかつた。

楕円函数に関する彼の業績を述べることは専門的になるのでここには割愛するが，この理論はアーベルとヤコビによつて建設され，ガウスも表面には出なかつたが大きな寄与をなした。しかし当時は複素変数の函数論が確立しておらぬため，厳密な理論はワイエルシュトラスまでまたねばならなかつた。

とまれガウスの各分野における偉大な業績は光彩陸離としており古今独歩を思わしめる。

ここでヤコビ（Karl Gustav Jacob Jacobi, 1804—1851）の名まえがでたので彼について述べることにしよう。ユダヤ人の銀行家の息子としてポツダムに生れた彼は1821年から1825年までベルリン大学に学んだ。卒業して私講師となり，翌年ケーニヒスベルグ大学講師，1829年同大学教授，1844年にベルリン大学教授となつた。当時のベルリン大学は彼のほかにディリクレとシュタイナーが教授であつた。

1829年アーベルが世をさつた年に，「楕円函数論の新しい基礎」Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum）を出版した。彼の楕円函数論は θ 函数によつて基礎づけられるのが特色である。アーベルの業績を賞讃し，代

数函数の積分に**アーベル積分**の名を与えたのも彼である。

楕円積分の逆函数を考えることから一般に得られる楕円函数の発見争いについてはアーベルの伝記において述べられるが，ヤコビはさらに楕円函数を拡張して，超楕円積分の逆函数を考えた。しかしこれに関する問題はヤコビによつて完全に解かれることなく後に残された。

ヤコビはまた力学のすぐれた講義をした。これは彼の死後1866年に「力学講義（Vorlesungen über Dynamik）として出版されたが，これはラグランジュとポアソンのフランス学派の伝統に従つて書かれたものである。興味深い1章をあげると，1つの楕円体の上の測地線を決定する問題が論じられているが，これはアーベル積分に関係の深いものである。

また代数学における消去の理論にすぐれた研究があり，そこにあらわれる**函數行列式**はシルヴェスターによつて**ヤコビアン**（Jacobian）と名づけられた。これについての著名な論文は「行列式の形と性質」（De formatione et proprietatibus determinantium, 1841）である。

その他 θ 函数を軽数論の問題に応用してガウスをしのごうと努力した跡がみられる。

最後にヤコビの人となりをいえば理想主義者でありフーリエの実用主義を批判して次のようにいつている。「フーリエは数学の目的は社会的利益と自然現象の説明にあるというが，彼のような哲人は学問の唯一の目標は人間の精神力の名誉にあることを知るべきである。この見地において数の問題も宇宙体系の問題も同等の価値を有するものである」と。しかし精力的な活動家であつた彼は政治上の運動にも参加し，1848年の革命には急進派を支持して大きな働らきをなした。

次にガウスの後継者として著名なディリクレ（Gustav Peter Lejeune Dirichlet, 1805－1859）について述べよう。彼はフランスからライン地方へ移住した人達の子孫で，デュレンで生れた。父はデュレンの駅逓長であつた。両親は彼に法律をすすめたが，子供のときから数学が好きなためそれに志した。当時のドイツにはガウスを除いて目ぼしい数学者がおらなかつたためパリに遊

学した。エコルポリテクニクの聴講生にはなれなかつたが，ソルボンヌ大学の講義をきいた。その頃からガウスの「数論研究」を耽読し，終生の伴侶としたこの書物を幾回となく読んだ。家にあつては机の上，旅に出ては鞄のなかに必ずあつたと伝えられる。

1825年6月に「或る5次の不定方程式の不可能について」という論文をパリのアカデミーに提出した。これはフェルマの問題を n=5 のときに解決したものである。彼はこれによつて数学界にデビュし，ルジャンドル，フーリエおよび政治家のフンボルトにみとめられた。1827年ブレスラウ大学講師，翌1828年ベルリン陸軍大学教官となり1831年にはベルリン大学へ就任した。これらはすべてフンボルトの斡旋によるものである。1855年ガウスの後任としてゲッティンゲン大学へ転じたが暫くして健康を害し世を去つた。

ディリクレはヤコビと1827年以来親しい交りを結んで終生変らなかつたが，2人は性格的に全く相反していた。政治運動もする火の玉のようなヤコビとは反対に温厚なタイプであり，家庭ではメンデルスゾーンの妹である妻レベッカの華やかな社交振りを傍観している夫であつた。

ディリクレの業績は数論，解析学の基礎，ポテンシャル論の3つに大別される。

数論における大きな功績として先ずガウスの「数論研究」を簡易化しこれを普及したことがあげられる。簡易化とは彼自身のつつましい言方であつて実は改良である。それはゲッティンゲンにおける十数回の講義においてなされたもので，最後の講義にもとづいてデデキントが編集したディリクレの「数論講義」（Vorlesungen über Zahlentheorie, 1863）は今に名著として賞讃される。

また解析学を数論に応用して新天地を開拓したことはまさに時代を劃するものである。「数論への微積分学の種々の応用の研究」Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, 1837）は今日の**解析的數學論**の起源をなす論文である。そのなかで初項と公差が公約数をもたない算術級数の項のなかには素数が無限に存在することを証明

し，これに関連して与えられた判別式にぞくする２次形式の類の個数の計算をした。この研究において

$$\frac{a_1}{1^s}+\frac{a_2}{2^s}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n^s}+\cdots\cdots$$

なる無限級数が実変数Ｓの函数として考えられたが，この種の級数を今日**ディリクレの級數**とよぶ。

なお代数体における単数の存在の証明をして，数論に大きな貢献をしたが，このとき興味深い「部屋割論法」を用いたことが著名である。

解析学の基礎的研究としては，先ず「任意の函数」の定義を確立したことである。函数の定義はコーシによつて今日の形をなしたものが与えられたが，コーシ自身はその論理的内容を自覚しておらなかつたらしい。すなわちオイラーを打破したとはいえなお函数関係は解析的式で表わされるものと意識していたようである。これを明確に撤回したのがディリクレとリーマンである。ディリクレは物理学雑誌 Repertorium der Physik の第１号（1837）に「フーリェ級数論」をのせたが，このなかに「……その関係が数学的算法によつて表わされるものと考える必要がない……」と述べている。

これにより例えば f(x) が次のように定義されたものもやはり函数といえる。「x が有理数のとき f(x) は１にして，x が無理数のとき f(x) は 0 である。」この函数は到底簡単な式では表わされまいと予想されたが，事実はこれに反しディリクレはこれを次の１つの式で表わすことに成功した。

$$\chi(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}\right)$$

これをディリクレの**カイ函數**という。

次に無限級数や定積分において絶対収斂と条件収斂の差違を明らかにしたことが大きな功績である。これに注意しながら任意の函数をフーリエ級数に展開する問題を論じ，展開可能のための**條件**をはじめて与えたことが輝かしい業蹟である。

最後にディリクレはポテンシャル論の講義をしばしば行つた。境界値を与えてポテンシャル函数を決定する問題を**ディリクレの問題**という。彼の方法に

よれば，与えられた境界値をもつ函数 u(x, y, z) のうち

$$\int\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}dw$$

を最小ならしめるものがポテンシャル函数である。これの原理は既にガウス(1840) が用いたがリーマンによつて**ディリクレの原理**とよばれる。後にワイエルシュトラスがこの妥当性を疑つたので数学上の大問題となつたが，ヒルベルト（1901）の修正によつてことは落着した。

さてここでドイツにおける著名な数学雑誌について述べておこう。それはクレルレ (August Leopold Crelle, 1780—1855) によつて創刊されたもので，雑誌の名は「純粋および応用数学雑誌」（Journal für die reine und angewandte Mathematik）という。これはクレルレがフランスのジェルゴンヌの雑誌をまねたもので，当初は専門家以外の読者をも対象とし，純粋数学と応用数学にまたがる意図であつた。1826年に第1巻を出してから今日まで続き，創刊百年記念のとき第157巻を出した。この雑誌は簡単に**クレルレ誌**ともよばれるが，その内容は今日においては純粋数学に関する論文ばかりである。

クレルレはプロシアの土木技監であり数学を好んだが数学上の業蹟としては伝えるほどのものがない。数学史上の不朽の功績は今述べたクレルレ誌の創刊である。職務上の功績として1838年から40年にかけてベルリン，ポツダム間の鉄道を敷設する設計をしたことが輝かしい。

クレルレ誌の最初の3巻の目次によれば，解析学者のヤコビ，ディリクレ，アーベルの名が見える。また幾何学者としてシュタイナー，メービウス，プリュッカーの名もあらわれる。それゆえ次に幾何学者について述べよう。

シュタイナーはベルリン大学の教授になつた程の逸材であるが，生れはスウィスなのでここではふれない。

メービウス (August Ferdinand Möbius, 1790—1868) はサクソニーのシュルプフォルタ生れで父は舞踊の教師であつた。ガウスについて天文学を学び，1816年にライプチヒのプライセンブルヒ天文台に入つた。後にその台長となりまた1844年以降はライプチヒ大学教授をかね，平和で静かな一生を送つた。

彼の名著は「重心法」(Der barycentrische Calcül, 1827) である。これは重心の概念を幾何学的に利用したものである

いま三角形の頂点 $A(a_1, b_1)$ $B(a_2, b_2)$, $C(a_3, b_3)$ を基礎にとり，任意の点Pの座標を (x, y) とするとき，A, B, C に重さ p_1, p_2, p_3 をおいたときの重心が P に一致するならば,

$$x = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3}{p_1 + p_2 + p_3}, \quad y = \frac{b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

となる。これによつて (x,y) と比 $p_1:p_2:p_3$ とが1対1に対応するので $p_1:p_2:p_3$ を点 P の新しい座標と見なすことができる。これは射影幾何学における同次座標であるが，この形式で同次座標を射影幾何学にはじめて導入したのが彼である。「重心法」における業蹟を紹介するのは専門的になるので割愛しておこう。

また「静力学の教科書」(Lehrbuch der Statik, 1837) において零系 (Nullsystem) を論じた。零系とは偶力の能率が 0 である軸の集合で，**直線幾何學**がこれから始まる。

最後に，細長い長方形の紙片を一度ねじつて端を糊ではりつけると奇妙な面ができる。それは表裏のない，片面だけの面になるが**メービウスの面**とよばれる。

さて近世幾何学を論ずる場合に解析的（数による）方法と綜合的（図形による）方法とによる2つがある。この対立がプリュッカーとシュタイナーにあらわれる。

プリュッカー (Julius Plücker, 1801—1868) はボンとパリにおいて学び，1825年ボン大学講師，1828年同助教授となつた。ついで1832年から1834年までベルリン大学に関係し1835年ハレ大学教授，翌年ボン大学へ招かれて終焉にいたるまでその地位にとどまつた。

彼は幾何学者であると同時に実験物理学者であつた。物理学においては真空放電現象を研究し，後に陰極線と確認された放射線を見出した。

幾何学に関する著書としては次のものがある。

(1) 解析幾何学の発展，２巻（Analytisch-geometrische Entwicklungen, 1828, 1831）

(2) （平面）解析幾何学大系（System der analytischen Geometrie, 1834）

(3) 代数曲線論（Theorie der algebraischen Kurven, 1839）

(4) 空間解析幾何学大系（System der analytischen Geometrie des Raumes, 1846）

(5) 新空間幾何学（Neue Geometrie des Raumes, I. 1868. II. 1869）

最後の著書の第２巻は遺稿により弟子のクラインが編集した。

以上のうち(2)において同次座標が最も一般な形で定義され，それによつて円錐曲線論が美事な形式にあらわされた。(3)においては代数曲線に関する有名なプリュッカーの公式を与えている。

$$k=n(n-1)-2d-3r$$

ここに n は曲線の次数，k は曲線の階数，d は２重点の数，r は尖点の数をあらわす。

(5)においては新しい看想の下に幾何学を再建した。すなわち幾何学における基本要素は必ずしも点のみと制限する必要はなく，直線，平面，円，球いずれもがそれを基礎として幾何学をきずくこるが出来ると発表した。例えば直線を基礎とする３次元空間の幾何学は４次元の幾何学と考えられるとして直線幾何学を系統的に組立てた。この著書は一時幾何学を離れて実験物理学に没頭し，再び幾何学に立戻つた時代に書かれたもので，その時代がシュタイナーの亡くなつた年（1863）に始まるのが奇しい。

このように彼の業績は偉大であつたが，射影的見地からは18世紀式であるといわれても致方がない。

さてこの世紀の中頃から後半にかけてドイツ数学界を世界最高の地位にひき上げた２人の巨匠リーマンとワイエルシュトラスのうち前者について述べておこう。

リーマン（Bernhard Riemann, 1826−1866）はハンノーウァーのブレーゼレンツで生れた。父は牧師なのでその跡をつぐため1846年ゲッティンゲン大学に入学し神学を学んだが，餘暇にガウスの講義をきいて数学に興味をもち，こ

れが動機となつてついに父を動かし数学に専念することとなつた。1847年ベルリン大学へ行き，ディリクレとヤコビについて更に研究の歩を進めた。1849年再びゲィテッンゲン大学へ戻り，ウエーバーから数理物理学を学んだ。大学卒業後1851年に複素変数の函数論に関する論文をかいて学位を授けられた。ついでゲッティンゲン大学に就職するため1853年に就職論文を提出し，1854年に就職講演を行つた。この講演はこれをきいたガウスをして深く感動せしめたという。このようにして私講師――聴講生からの聴講料だけで俸給のない講師――にはなつたが聴講生が僅か8人では生活も楽ではなかつた。ついで1857年助教授，1859年にはディリクレの後をついで教授となつた。しかし1862年から肺患のため療養生活に入りイタリアへ3度も転地したがついに再起できなかつた。

1851年の学位論文は「1つの複数変数の函数の一般理論の基礎」Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Gröss）である。このなかでリーマンはコーシの函数の定義を複素変数の場合に進め，「複素変量 w が複素変数 z の函数であるというのは，が z と共に変り，しかも微分商 $\frac{dw}{dz}$ が微分 dz の値に無関係なるときにいう」と定義した。これは今日の言葉でいえば複素変数の函数としては**正則函数**のみを対象とすることを意味する。またこの定義に先立つて「われわれは函数をそれを表わす式とは無関係に考える……」と述べ，コーシが「函数」といえば「式」を意識していた見解を打破つている。

次に変数と函数の幾何学的表示を2枚の平面で考え，函数が正則なるとき**等角寫像**が成立することを注意してから，$w=u+iv$ が $z=x+iy$ の函数になるための必要十分条件として

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

を導いた。これはコーシも1851年に同形のものを導いているので，**コーシ・リーマンの微分方程式**とよばれる。

さらにリーマンは今日彼の名の冠せられる**リーマン面**について述べ，そこでは**位相**を問題とし**連結度**の概念を導入しているが，それらを詳細に説明する

いとまはない。しかし**リーマンの寫像定理**「任意の単連結な領域は円の内部に等角に写像される」だけは書落すわけにはいくまい。

1853年の就職論文は翌年出版された「函数の三角函数による表現可能性について」(Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, 1854) である。これはディリクレがフーリエ級数による函数の展開可能を論じたとき，条件として函数が「積分可能」であることを強調した。しかし函数が積分可能であるとは何を意味するかに深く立入らなつたのでこれをリーマンが追究し彼の名を冠せられる**リーマン積分**の定義を与えた。コーシは連続函数のみを考えたがリーマンは不連続函数でも彼の意味で極限が存在する場合に積分可能とよんだ。そしてこれらの結果から三角函数の表現の問題について或解決を与えたのがこの論文である。

1854年の就職講演は「幾何学の基礎になる假説について」(Über die Hypothesen, welche Geometrie zu Grunde liegen) と題するものである。この講演はガウスの曲面論の一般化であり，まづ曲面の概念を拡張して**多様体**という新しい概念を導入した。それは (x_1 , x_2 ,……x_n) なる元の組の集合をいう。具体的な例でいえば，x_1 , x_2 ,……x_n を実数とするとき，座標が (x_1 , x_2 ,……x_n) なる点の集合は n 次元空間になる。すなわち n 次元空間は多様体のよい例である。この多様体に計量をいれるために**距離**を次のように定義する。いま２点 (x_1 , x_2 ,……x_n), (x_1+dx_1 , x_2+dx_2 ,……, x_n+dx_n)が与えられたときその間の距離を

$$ds^2 = \sum_{i,j}^{n} g_{ij}\, dx_i \; dx_j$$

によつて定義する。ここに g_{ij} は x_1 , x_2 ,……x_n の函数で，この g_{ij} に値を与えることによつて，１つの多様体が定義される。最も簡単なものはすべての g_{ij} が１に等しい場合で，このとき距離は $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots\cdots + dx_n^2$ となり，これは n 次元のエウクレイデス空間である。

さらにガウスが見出した曲面の曲率に対応するものとして多様体の曲率を考えこれに関する深い研究を行つたが，これは今日**リーマン幾何學**とよばれる

ものである。リーマン幾何学はエウクレイデス幾何学はもとより非エウクレイデス幾何学をも含み，クラインが20世紀において発表したエルランゲン・プログラムの幾何学をも凌いでいることは驚くべきことである。ことに20世紀の相対性理論において，アインシュタインがこのリーマン幾何学を有力な武器として用いたことは，物理学と数学との著るしい連繫として永く人々の記憶にとどまるものである。

さて1857年には「アーベル函数論」(Theorie der Abelschen Funktionen, Crelle Journal, 54) を発表したが，ここでは**リーマン面**が一層詳しく説かれこれを用いてアーベル函数――アーベル積分よりさらに進んだもので，多変数の複素変数函数である――を解いたのがこの論文である。アーベル，ヤコビ，ガウスの楕円函数論が厳密に完成するためには函数論の確立に貢献したリーマンとワイエルシュトラスの業蹟すなわち前者のリーマン面と後者の函数論の精密化が必要であつたことがここにきて始めてうなずかれる。

リーマンの注目すべき最後の論文の1858年は「与えられた数より以下の素数の個数について」(Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse) である。ここでは素数の分布をしらべるために次の複素変数Sの函数

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots\cdots,\quad s=\sigma+it$$

が用いられた。これはリーマンの**ゼータ函数**とよばれるもので，この函数の零点すなわち $\zeta(s)=0$ なる S の値の分布状態が問題となつた。リーマンは σ が 1 より大きい零点はなく，σ が負数である零点は $-2, -4, \cdots\cdots, -2n, \cdots\cdots$ だけなることを示し，残りの「零点は全部 $\frac{1}{2}+it$ という形をとる」と予想したが，この**リーマンの豫想**はいまに解決されない数学史上著名な難問である。

§ 2. フ ラ ン ス

ナポレオンは数学を愛好したので皇帝になつてからも数学の発展には力をそそいだ。その著るしい例としてエコル・ポリテクニク（理工科学校）の育成に意を用いたことである。彼をめぐる数学者は数多くそのうちラプラスについて

はすでに述べたのでここではモンジュおよびフーリエについてしるそう。

モンジユ (Gaspard Monge, 1746−1818)はラプラスとは異なり最後までナポレオンに忠実であつた。彼はボーヌ生れで父は行商人兼鋏研師であつた。14才のとき消火ポンプを組立てたがこれには彼の器用な指が役立つた。16才のときリヨンの中学校(コレージュ)の物理教師となつたが，この頃モンジュがかいたボーヌの精巧な地図が或る高級工兵将校の目にとまり，その将校のすすめでメジエールの陸軍工兵学校に入学した。しかしその学校の正科は家柄のよいもの丈が入り家柄の賤しいものは「石膏学校」といやしめられた別科の補助施設にいれられそこを卒業しても少尉の位にまでしか昇れなかつた。モンジュは「石膏学校」にいれられたが失望することなく学業に励んだ。学科は代数学と幾何学の基礎，製図，模型製作などであつたが築城の形式を石膏で造ることを習つた。また「如何なる部分も攻囲軍の砲兵から直接の射撃にさらされないように」築城工事をする問題が研究されたが，この種の問題の１つにすぐれた解を1665年にモンジュが与えた。これによつて彼はみとめられ1768年高等部の助教師になり1789年までつとめた。この解法は従来のように算術計算によることなく幾何学的なものであるが，これがモンジュの画法幾何学とよばれるものの起源である。しかしこれは軍の機密上1794年まで公表を許されなかつた。1795年に師範学校教授となり引続きエコル・ポリティニクの初代校長になつたとき始めて画法幾何学を講義したが後にこれは「画法幾何学」（Leçons de Géométrie descriptive, 1798−1799）として出版された。ラグランジュも彼の講義をきいて「私はモンジュの講義を聞く以前には，自分が画法幾何学を知つているということを知らなかつた」と語つたといわれている。画法幾何学とは正投影画法のことなのでことさら説明する要はないと思うがこの時代としては正に劃期的なものでありのちのちへの影響も大きかつた。

モンジュはこの他に「幾何学への解析学の応用」(Application de l'analyse à la géométrie, 1795）をかいているが，これには曲線及び曲面に関する彼の研究がもられており，**微分幾何學**の初期の著作として著名なものでガウスの研究がこれにつゞく。不朽の書の最後の章には**偏微分方程式**の積分に関する彼の

見解が述べられている。

このようにモンジュは幾何学に数多く貢献し，18世紀末に解析学が進歩して幾何学的方法がうとんぜられたのを回復したのは大きな功績である。

次にフーリエ（Jeau Baptiste Joseph Fourier, 1768—1830）はラプラスと同様にナポレオンに忠誠を誓つたり或は裏切つたりして「人間」としては感心できない型であつた。

オーゼールで仕立屋職人の子として生れたが8才のとき孤児となり情深い婦人によつて育てられた。ベネディクト派の経営する地方士官学校に入つたが，そこでは天才振りを発揮しことに数学の勉強には燃え残りの蠟燭をあつめて夜更しする程熱心であつた。しかし当時フランスでは数学は軍人にしか教えられず，しかも軍人の学校は職人の息子に開放されなかつた。そこで止むなくベネディクト派の人達のすすめにより聖職につこうとサン・ブノア・シュル・ロアル修道院に入つた。この生活は1798年の革命によつて打破られ，彼はオーゼルへ帰り生地の陸軍学校教授になつた。時正に18才であつた。フーリエは最初から革命の心酔者であり積極的にこれに参加した。少年時代に感銘深い説教をしたその得意の雄弁に物をいわせて郷土の民衆の血を沸き立たせた。1789年21才のときパリに上り数字方程式の解に関する研究をアカデミーに提出した。後に師範学校理工科学校の教授になつたとき，代数方程式の根の個数に関する研究をその講義においてはじめて公にした。1798年ナポレオンのエジプト遠征に従軍し，帰仏後1802年グルノーブルを県庁所在地とするイゼール県知事に任ぜられた。フーリエが不朽の傑作「熱の解析的理論」（La théorie analytique de la chaleur, 1822）を書き上げたのは後年のことであるが，その端緒はイゼール県知事時代1807年の研究にはじまる。1808年内政の功により男爵を授けられたが，1814年ナポレオンがエルバ島に流されたときラプラスと手を握つてルイ18世に忠誠を誓つた。1815年2月26日再びナポレオンがフランスに上陸しパリへ進撃したとき，その途上にグルノーブルでフーリエと会見した。この数学者は再び忠誠を誓つたが百日天下の皇帝はあえなく没落した。ルイ18世は今度はフーリエが公職につくことを許さなかつたので餓死にひんしたが昔の教え子

の世話によりセイヌ河統計局長に任命され命をつないだ。1816年アカデミーは彼を会員に推薦したがルイ18世はこれを許さなかつた。しかし翌年も推薦されたので国王はついに折れた。1826年にはアカデミー・フランセーズの会員に推され学界最高の名誉に浴した。

フーリエの代数方程式に関する研究は「フーリエの定理」として次のように述べられる。

実係数の代数方程式 $f(x)=0$ が区間 $a<x\leqq b$ において有する実根の個数を N とする。$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$,……, $f^{(n)}(x)$ における符号の変化の数を V で表わすと,

$$N=V(a)-V(b)-2h$$

である。ただし 2h は 0 又は正の偶数を表わす。

これは「デカルトの符号の法則」を特別の場合として含むものであるが，両者の証明の方法は全く別種のものである。

熱伝導に関する研究は1807年に論文として提出されたが非常に有望なのでアカデミーはフーリエを奨励するために1811年に「熱伝導の法則を数学的に与え実験と比較する問題」を懸賞題目とした。その審査員はラグランジュ,ラプラス，ルジャンドルであつた。フーリエはこの賞を獲得したがいろいろの批判がない訳ではかつた。

導体の点 (x, y, z) における時間 t のときの温度を v とするとき，熱伝導の状態は

$$\frac{\partial v}{\partial t}=c\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

なる微分方程式で表わされる。これを導体の表面における諸条件（境界条件）を与えて解いた。これは今日「偏微分方程式の境界値問題」と称せられるものである。その際フーリエは副産物として，任意に与えられた函数 $v=f(t)$ は級数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos t+a_2\cos z\,2t+\cdots\cdots+a_n\cos nt+\cdots\cdots$$

$$+b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \cdots\cdots + b_n \sin nt + \cdots\cdots$$

にて表わすことができ，ここに係数は

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt \, dt$$

で与えられるといつた。しかしすべての函数 f(t) が無条件でこの形の級数——フーリエ級数と今日よばれる——で展開可能であるかどうかは問題である。これを最初に注意したのはディリクレであり，つづいてリーマン，デュ・ボア・レイモン，ディニ，ルベグなどによつて研究が進められ，フーリエ級数は今日では解析学の重要な部門をなしている。

さてモンジュには数多くのすぐれた弟子があつた。ポンスレ，デュパン，カルノなどがそれであるがその中最も秀でたのはポンスレである。彼について述べる前に他の２人を語ろう。

デュパン (Charles Dupin, 1784—1873) はパリで幾何学の教授となつたが，長い生涯の間には政治家としても産業促進者としても名声を博した。著書として「幾何学の発達」(1813) と「航海術における幾何学および力学の応用」(1825) がある。曲面上の曲率線を研究し，これに関するデュパンの標形 (indicatrix) を考えた。

カルノ (Lazare Nicolas Marguerite Carnot,, 1753—1823) はメジエールの工兵学校時代のモンジュの弟子で，軍事技術家,政治家として著名である。微積分学と幾何学を研究し，幾何学の著書として「位置の幾何学」(Géométrie de position, 1803) と「横断線議論」(Essai sur les transversales, 1806) がある。位置の幾何学とは射影幾何学のことで射影の立場から位置に関する図形の性質を研究するものである。

なお熱力学におけるカルノの理論は彼の長子ニコラス・カルノ (Nicolas Léonard Sadi Carnot, 1796—1832) によるものである。

さてポンスレ (Jean Victor Poncelet, 1788—1867) は工兵少尉としてナポレオンのロシア遠征に参加したが，モスクヴァの焦土戦術によつて退却を余儀なくされたとき，しんがりの隊長として活躍したため全滅にひんした。負傷

して倒れ凍つた戦場に死をまつ許りであつたのを将校の故に捕虜となつた。その後ヴォルガ河畔のサラトフ収容所まで1200粁５ケ月の間歩かされ1813年３月やつとたどりついた。収容所において元気を回復してからは，わずかに凍死を防いでくれた小さな火鉢の消炭を使つて数学の記憶をとりもどし新たな研究へと向つた。

ポンスレはもともとデザルグとパスカルの射影の思想に興味をもつていたが，カルノの著書による直接の影響から射影幾何学の創始者となつた。1814年9月に帰国したときこれまでの成果について起稿し「図形の射影的性質に関する理論」(Traité des propriétés projectives des figures, 1822) を著わした。これは射影幾何学をまとめた最初の書物である。

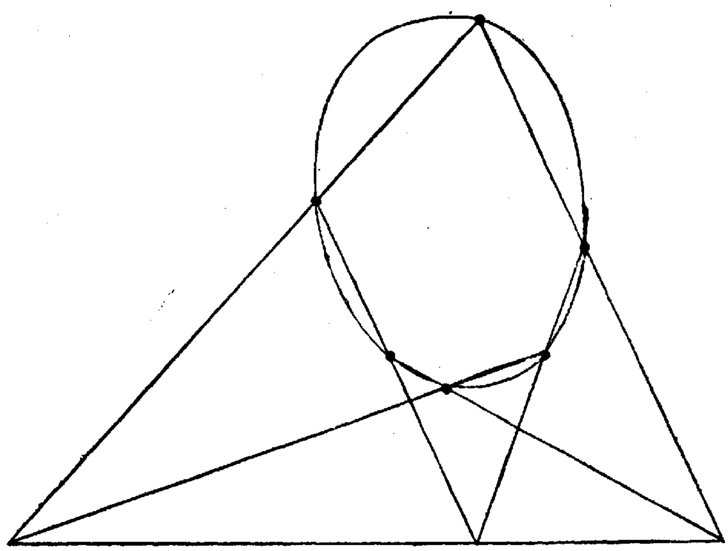
ポンスレの著想のうち，すぐれたものは「連続の原理」と「双対の原理」である。「連続の原理」とは図形の位置が連続的に変つても図形について最初に証明された性質は変らないことを要請するものである。例えば２つの円への接線の長さが等しい点の軌跡は２円が交わると交わらざるとにかかわらず中心線に垂直である。交わる場合には共通弦の延長であるが，交わらない場合には虚点で２円が交わると考えそれを結ぶ実直線が中心線に垂直であると考える。このように連続の原理を導入しこれを例外なく成立させるために「虚点」「虚直線」などをもうけた。

「双対の原理」とは，命題において，点を直線におきかえ直線を点におきかえると新しい命題が得られるが，この２つの命題を互に**双對**といい，一方が成立するとき他方も成立するが，これを**双對の原理**という。

例えばパスカルの定理に対してその双対の定理を作つてみよう。

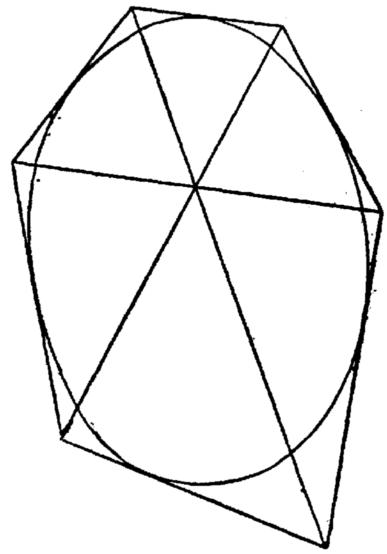
パスカルの定理

円錐曲線に内接する6点形の3対の対辺の交点は1直線上にあり。



双 対 の 定 理

円錐曲線に外接する6辺形の3対の頂点を結ぶ3直線は1点に会す。



この双対の定理はブリアンショョン (Charles-Julien Brianchon, 1785—1864) が1806年に発表したものである。彼は陸軍砲兵学校の教授であつたが，理工科学校の学生時代にこれを発見した。この2つの定理は見掛けは全く異なつているが双対の原理により結ばれる最初の著るしい例である。

「双対の原理」についてはジェルゴンヌ (Joseph Diez Gergonne, 1771—1859) も雑誌に発表したことがある。ポンスレは相反極線の方法の結果として「双対の原理」を得たのであるが，ジェルゴンヌはこれを独立した一般の原理として与えた。

ジェルゴンヌの論文が掲載された雑誌 Annales of methématiques pures et appliquées (純粋および応用数学年誌) は彼自身が主筆となつて編集されたもので1810年から1831年までつづいた。その後一時中断され1836年にリウヴィルによつて再興され，Annales が Jonrnal と改められて今日この雑誌は**リウヴィル誌**とよばれる。

さて射影幾何学はその後シャールおよびドイツのメービウス，シュタイナー，フォン・シュタウト，プリュッカーなどによつて大成された。

シャール (Michel Chasles, 1793—1880) は1812年から1814年まで理工科学校の学生であり1841年には同校の教授となつた。

1直線上に4点 P_1, P_2, P_3, P_4 が与えられたとき $\frac{P_1 P_3}{P_1 P_4} : \frac{P_2 P_3}{P_2 P_4}$ を4点の非調和函数（今日の非調和比）と名づけたのは彼であり，これが射影幾何学において大きな役割を果すことをしめした。また幾何学史についてすぐれた研究があり，その著「幾何学における方法の起源と発展についての歴史的概要」(Aperçu historique sur l'orgine et le développement des méthodes en géométrie, 1837) は数学史研究の起点に立つものである。

ここでエコル・ポリテクニクについて一寸述べておこう。この学校は科学史上燦然として輝くもので，国民集会の1794年の法律によつて成立したものである。法令によると「数学および物理学的知識を必要とする職業を無料で学び，……土木工業につくすべての青年のために設立する」と規定されたが，その実軍事的色彩が濃厚であつた。旧時代とはちがつて実力さえあれば誰でも入学でき学費すら支給された。1804年ナポレオンが皇帝になつたとき，共和主義者であつた学生達はナポレオンに反抗したが遂には屈服した。それ以後砲工学校と科学技術学校をかねそなえた兵学校になつた。そして専門別により各科に（砲兵，工兵，土木，鉱山，造船，航海）に分れ，それら卒業生は軍人又は技術者となり将来の栄達が予定された。この学校からは数多くの著名な人物が出ているが数学の教授だけについていえばラグランジュ，モンジュ，フーリエの外に卒業生で教授になつたポアソン，コーシなどがいる。

ポアソン (Siméon Denis Poisson, 1781—1840) は学生，演習指導，教授，卒業試験官として終生エコル・ポリテクニクに関係した。定積分，微分方程式，フーリエ級数，確率論，ポテンシャル論などにおいてその名が知られている。彼はまたラプラスの伝統をついで数理物理学に貢献した。

著書としては「力学論」(Traité de mécanique, 1811)と「判断の確率に関する研究」(Recherches sur la probabilité des jugements, 1837) が名高い。

コーシ (Augustin Louis Cauchy, 1789—1857) はドイツのガウスに匹敵

する大数学者でいわば「フランスのガウス」である。現代数学の源はこの２人にはじまるといつても過言ではなく特にコーシは「現代解析学の父」とよぶにふさわしい。

コーシはフランス革命の年に生れた。高級警務官の秘書であつた彼の父はこの革命により没落し貧しい生活を営んだが，執政官制度の下では元老院の書記長となりラプラスの直接の部下となつた。パリにテロがはびこつた頃アルケーユ村に避難したが，ちようど隣家にラプラスの別荘があり多くの学者が出入りしていた。コーシはこれらの人々と交わり自己の数学的才能を次第に発揮しラプラスにみとめられた。父とともにパリに出てからはラグランジュにもみとめられた。1805年にエコル・ポリテクニクに入学し，２年級に土木学校に入つた。卒業して土木技師の資格を得てからはシェルブール軍港の要塞構築に従事した。1810年シェルブール行きの鞄のなかにはラプラスの「天体力学」とラグランジュの「解析函数論」，それにトマス・ア・ケンピスの「キリストの「まねび」が入つていた。彼は職務多忙にもかかわらず数学の研究を身を入れ凸形多面体，円錐曲線の準線，対称函数に関する論文などを発表した。しかしそれにもまして，数学を最初からやり直し基礎を確実にしようとする努力は，日常の多忙な職務と重なつてついて健康を害し虚脱状態に落入つた。それは1813年のことであり心配した母によつて彼はパリに連れ戻され，ラプラスやラグランジュによつて数学だけに専念するようすすめられた。1816年アカデミーの会員となり,またエコル・ポリテクニクの教授となつた。当時ヨーロッパの各地から多くの学者が集まり彼の講筵に列したという。「王立エコル・ポリテクニクにおける解析教程（代数解析)」[Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (Analyse Algébrique) 1821]「エコル・ポリテクニクでなされた微分積分学に関する講義の要約」(Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal, 1823）はいずれも当時の講義をまとめたものである。1830年の７月革命にはブルボン王朝に忠誠でしかもカトリックの信仰に深かつた彼は自ら進んで職をなげうち国外に亡命した。そしてトリノにおいて数理物理学の教授をした。1838年亡命したシャルル10世の依頼に

よりプラーハへ赴き皇太子ボルドー公の教育にあたつた。しかし両親を忘れることの出来なかつた彼はついに1838年末パリへ戻つた。勿論公職につくことは出来なかつたが数学の研究は加速度的に旺盛となり，アカデミーの記事（Com pte rendus）には殆んど毎週彼の論文がのつた。1839年天文台の仕事をするようになつたが公職就任について革命政府との間に紛争がたえなかつた。1848年２月革命によりソルボンヌ大学教授に返り咲き18年振りで教授活動がなされた。1852年さらに国家形態が新しく変化して第２帝国とはなつたが，コーシは例外として忠誠を誓うことなくソルボンヌの地位を保つことができた。そして終焉にいたるまで講義が続けられた。

コーシの業蹟は８巻の単行本と789篇の論文という大量のものである。年とともに発表が急速度となり1835年以来アカデミーが記事の論文は「各篇４頁以内という制限を附したがこれはコーシの寄稿に対処するためであつたと言伝えられる。

コーシの「教程」及び「要約」において最も著るしいものはその批判的精神から生れた数学的厳密の要請である。「教程」の序文の一節に次のようにある。

「方法としては私は数学において要求される厳密を期し，器械的な計算から引出される大まかな論法を用いない。そのような論法がしばしば許されて，収斂級数から発散級数へ，又は実数から虚数へと移るのは，私の考えによると，時には帰納的に真理を予感させることはあつても，決して数学の誇りとする正確さを期待する道ではない。このような方法は公式の適用範囲を不確定にするもので，実際にはそれらの公式はただ或る条件の下においてのみ，又はその式に含まれている数の特殊の値に対してのみ成立するのである。私はそれらの条件とそれらの数値の範囲を決定して，用いる記法の意味を精密に限定しながら，あらゆる不確実を消滅させようとするものである。……」

この趣旨の下にまず「函数」を第１章の発端において次のように定義した。これはオイラーの「函数は解析的式である」という器械的定義を打破るものである。

「いくつかの変数の間に或関係があり，そのうちの１つの値が与えられると，他のものの値がすべて定まるとき，通常その１つの変数によつて他の変数を表わして考える。そのときこの１つの変数を独立変数とよび，他のものをそれの函数と名づける。」

これによると変数の間に値の対応がつきさえすればよく，オイラーのような「解析的式」は不用になる。

また序文において既に「無限小」を次のように定義した。「１つの変数が逐次にとる値の絶対値が，どこまでも減少し，任意に与えられた数よりも小さくなるならば，その変数は無限小であるという。それは0を極限としてもつ。」これは無限小を変数とみなすことによつて，ライプニッツ以来神秘にとざされていた無限小の正体を明らかにするものである。これを用い第2章において「函数の連続」を次のように定義した。

「f(x) 変数 x の函数とし，与えられた2つの値の間にある任意の x の値に対して，この函数がつねにただ1つの有限な値をとるものとする。いまこの範囲に含まれる x の１つの値から出発して，変数 x が無限に小さい量aだけ増加したとすれば，函数自身も f(x+a)−f(x) だけ増加する。この増加量は変数 x に関係するだけでなく，新しい変数 a にも関係している。このとき函数 f(x) が与えられた範囲で変数 x の**連續函數**であるというのは，この範囲に含まれる任意の x の値に対して，差 f(x+a)−f(x) の値が a の値とともに限りなく小さくなるときである。換言すれば函数 f(x) が与えられた範囲で連続であるというのは，この範囲内で変数が無限小だけ増加するとき，それに対応する函数自身もつねに無限小だけ増加することをいう。」

コーシのいわんとするところは，ニュートン以来の思想を合理的に述べただけで，今日このまま教わるのであるが一見平凡にみえこの解明が解析学の基礎づけをなすものである。ここにコーシの歴史的重要性がある。

さらに第6章において級数の収斂，発散を定義しているが，オイラーにおいてはこの概念すらなかつた。第7章では複素数を論じているが，これはまだ完全に合理化されたものとはいえない。

次に微分法についてであるが，これは「要約」に以下の通り書かれてある。

「函数 $y=f(x)$ が x の或区間の値に対して連続ならば，変数が無限小だけ増加するとき函数自身も無限小だけ増す。故に $\triangle x=i$ とおくと，増加の割合

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

の分母分子はともに無限小である。しかし両者がともに極限値0に近づくとき，その比の値自身は正又は負の一定の極限値に近づくことがあり得る。この極限値は，それが存在するときは，x の各々の値に対して定まつた値をとり，そしてそれは x とともに変化する。……すなわち，また x の新しい函数となる。

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

なる比の極限値である函数が，与えられた函数 $y=f(x)$ によつて定まる。この従属性を明らかにするために，新らしい函数を与えられた函数の**導函数**とよび，アクサンを借りて y' 又 $f'(x)$ と表わす。」

これは殆ど今日の教科書と変りがない。この定義のなかに「それが存在するときは」と断わつているのは用意周到である。

これにつづいて「平均値の定理」が示されているが，これはラグランジュのものをしのいでいる。さらに「定積分」の定義を与え「微分積分学の基礎定理」を述べている。しかし，彼の論法において不完全なのは連続において単なる連続と一様連続との区別がなされておらないことである。

このことは「教程」の無限級数に関する章にも表われている。すなわち「級数の各項が１つの変数 x の函数であつて，これが収斂する x の値の近傍で連続ならば，その和もまた同じ値の近傍で x の連続函数である」とあるが，これは誤で後に1826年アーベルによつてその反証があげられた。

次に微分方程式について述べよう。これまでは微分方程式を満足する解を求める計算だけを追求してきたが，コーシに到つてはじめて解の「存在」に着

目された。すなわち解の存在を論じ学としての「微分方程式論」をきずこうとしたのはコーシである。

「$|x-x_0| \leqq a$, $|y-y_0| \leqq b$ を満足する実変数 x, y に対して $f(x,y)$ と $f_y(x,y)$ が単値連続，$f(x,y)$ がこの長方形において有界ならば，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

は，初期条件 $y_0 = F(x_0)$ を満足する解 $y = F(x)$ をただ1つしかもたない」

という存在定理を1820年から1830年までに行われたエコル・ポリテクニクの講義において証明した。これは常微分方程式論の基礎をなすものである。この定理は1868年リプシッツ (R. Lipschitz 1832—1903) によつてさらに拡張され，$f_y(x, y)$ の連続性の代りに

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)| < K|y_2 - y_1|$$

が成立する K が存在する」とされた。

コーシの業蹟のうち最大なものは何んといつても函数論の創始であろう。

そもそも19世紀のはじめ物理学や天文学の問題に種々の定積分があらわれた。これらをたやすく求める手段として複素変数の函数の積分を考えると統一された方法によつて計算されることに気づいたのがその端緒である。1825年に印刷された論文「虚数の限界の間の定積分に関する覚書」(Mémoires sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires) がそれを示す目的として書かれた。この論文が実際に出来上つたのは1814年で，それは審査したルジアンドルが証言している。内容は今日「函数論の基本定理」とよばれるコーシの積分定理を長方形の場合に証明し，すすんで留数 (residu) の定理を証明し，それらを利用して実函数の種々の定積分を手際よく計算した。このように目的は定積分の計算であつたが，手段であつた函数論の定理はその後証明が改良され進歩発展していつた。巾級数の収斂半径が求められた1821年の「教程」から1851年に「正則」の概念が確定するまでのコーシによる函数論の発展段階はここに述べ得ない。彼には創業の苦心があつたが，やがてリーマンとワ

イエルシュトラスによつて函数論は体系化されていつたのである。しかし振返つて注目すべきはコーシの函数論は忽然として現われたものではなく，18世紀におけるオイラー，ダランベル，ラプラス，ポアソンの業蹟に理論的基礎を与えたものとみなせば，それらの先駆者の業蹟も尊ばるべきである。特に既述の如く同年代のガウスに優れた研究のあつたことは見逃されない。

19世紀前半のフランス数学は以上のように絢爛そのものであるが，さらに錦上花を添えるものとしてガロア（Evariste Galois, 1811—1832）があらわれる。彼はノルウェーのアーベルとともに若くして逝ける天才数学者として今に名高い。1811年10月25日パリの近郊ブール・ラ・レーヌに生れ，市長の息子として何不自由なく育つた。中学（コレッジュ・ルイ・ル・グラン）時代17才のとき代数方程式に関する論文をアカデミーに提出したが，これを読むはずのコーシが紛失したのでその内容は不明になつた。エコル・ポリテクニクの入学試験に２度も失敗したが，受験準備中に「方程式の一般解について」という論文をアカデミーに提出した。しかしこれも審査員のフーリエが急逝したので行方不明となつた。1829年ようやくエコル・ノルマルに入学したが，政治運動に身を投じ，1830年の７月革命に参加したり，校長排斥の指導者になつたりしたので，ついに放校されサント・ペラジュの監獄につながれた。1832年３月コレラにかかり仮出獄を許されたが，その間に恋愛事件から決闘を挑まれ21才の若さで仆れた。５月30日の早朝のことである 。

その前夜に死を予想して書き残した手紙が友人オーグスト・シュヴァリエにあてられた。そのなかに次のように述べている。

「私は解析において若干の新しいことを発見した。その或るものは方程式論に，他は積分に関係している。方程式論においては方程式が巾根によつて解かれるための条件を見出そうとしたが，これは巾根で解けない場合をも含めて方程式に関するすべての可能な変換を論ずることに帰着した。これらのすべては３つの論文にまとめることができる。

第１のものは既に書かれてある。ポアソンはこれに異議をはさんだが，私はこれを訂正して支持する。

第2のものは方程式論の他の興味深い応用である。以下に述べるものがこれらの最も重要な梗概である。………………

第3のものは積分に関係している。

………………………………

この手紙を Revue encyclopédique（百科評論）に印刷してくれないか。

私は生涯にしばしば不確かな命題を提出したこともあつたが，今ここに書いたすべては殆んど1年もの間念頭から去らなかつたものであり，また私が大きな関心をもつて誤のないことを確信するので，私が完全な証明ももたないで定理を言明するものであると疑わないでくれ。

公開状を以てヤコビ又はガウスの意見，定理の真偽についてではなく，その重要性に関しての意見をきいてもらいたい。

このごたごたを判読して利得を見出す人が後に出てくることを私は期待している。」

このうち第1と第2のものは今日方程式論におけるガロアの理論とよばれるものである。1つの方程式に1つの置換群が対応しこれによつて方程式の特性があらわされ，方程式が代数的に解けることと，置換群が「可解」であることが同値であることに注目して，方程式が代数的に解けるための条件を求めた。それらは後に「方程式が巾根によつて解かれる条件に関する論文」と題して1846年リウヴィルの手によつて発表された。また手紙の末尾にあるガロアの期待はむくいられ，40年後にジョルダン（Camille Jordan, 1838—1922）が「判読」して大著「置換論」（Traité des substitutions, 1870）を書上げた。ガロアとならんでアーベルも方程式論に貢献したが，アーベルの死後3年間(1829—32）に方程式論はガロアの理論として長足の進歩をなしたのである。

第3のものはアーベル積分に関するもので，一般アーベル積分が3種の積分の和に帰することと，それらの週期の間に存在する量的関係を述べている。手紙のなかに「曖昧の理論」théorie de l'ambiguité なるものが書かれてあるが，これは今日の「リーマン面」又は「モノドロミ群」などをさしているものと想像されている。

手紙の末尾にヤコビとガウスの意見を期待し自国の先輩を眼中におかなかつたのは再度の原稿紛失に帰因するものであろうか。しかし結果的にガロアを認めたのはヤコビとガウスではなく自国のリウヴィルとジョルダンであつた。

参　考　文　献

1. Klein, F. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I (1926). Teil II (1927)
2. Kowalewski, G. Grosse Mathematiker. (1938)
3. Boyer, J. Histoire des Mathématique (1900)
4. Cauchy, A. L. Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (1821)
5. Cauchy, A. L. Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal (1823)
6. Smith, D. E. A source book in mathematics (1929)
7. Bell, E. T. Men of mathematics (1937)
8. 高木貞治．近世数学史談（昭和６年）
9. 弥永昌吉．現代数学の基礎概念．上（昭和19年）

あ　と　が　き

小著「数学史」（培風館昭和34年３月発行予定）に於て19世紀以降は頁数の関係上簡潔になつている。実は予め詳細な原稿を用意したのでその一端として独仏に関する部分をここに発表しておく。

(1958. 10. 28.)