ストーン需要函数の研究*

藤井栄一

Stone 教授は，理論的に従来のものよりもさらに厳密で，しかも，統計的な検証にたえることができる需要函数を構成して，1920～38 のイギリス連邦のデータを適用して，その期間の需要パターンの分析と，1900年との比較，および統制下における戦後との比較を試みた。

こゝでは，とくに，その理論的な側面について考察したい。

1. 需要方程式

価格および数量のベクターをつぎのようにおく。[1)]

価格$=<p_1, p_2, \cdots, p_m> = \mathrm{p}'$

数量$=(q_1, q_2, \cdots, q_m) = \mathrm{q}$

また，所得（または総支出）を，μ とすると，

総支出（所得）$=\mu=\Sigma_k p_k q_k = \mathrm{p}'\cdot\mathrm{q}$

また，基礎消費量を $q^b{}_k$ であらわす。すると，総基礎消費支出金額は，

総基礎消費支出金額$=\Sigma_k p_k q_k = \mathrm{p}'\cdot\mathrm{q}^b$

こゝから，各財に対する需要金額が，つぎのようになると考える。

$$p_i q_i = p_i q^b{}_i + b_i(\mu - \Sigma_k p_k q^b{}_k)$$

すなわち，各財に対する需要額は，主観的な最低生活に必要な需要額と，そのための総金額を全支出（所得）からさし引いた残額に比例する需要額とから構成されると考える。全ての財をまとめて表示すると，

---

* 小論はストーン教授のはじめ *Economic Journal* vol. LIV. no.255 (Sept., 1954) pp. 511—527 に発表され，のちに，T. Barna 編 *The Structural Interdependence of the Economy*, 1957. pp. 409—29 に収録された J. R, N. Stone ; Linear Expenditure Systems and Demand Analysis : An Application to the Pattern of British Demand の review note の一部である。

1) 以下で，<…> はヨコ・ベクター，（…）はタテ・ベクター，$'$ は転置，^{d} は対角行列を示すことにする。

$$\begin{pmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^b{}_1 \\ q^b{}_2 \\ \vdots \\ q^b{}_m \end{pmatrix} + (\mu - \Sigma_k p_k q_k) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

あるいは，注1の記号を用いて，

$$\mathrm{p}^d\,\mathrm{q} = \mathrm{p}^d\,\mathrm{q}^b + \mathrm{b}(\mu - \mathrm{p}'\mathrm{q}^b) \qquad (3)$$

もちろん，$q_i = 0$ ($i=1, 2, \cdots, m$)，すなわち，$\mathrm{q}=0$ とみなすことができれば，

$$\mathrm{p}^d\,\mathrm{q} = \mu \mathrm{b} \qquad (4)$$

である。さらに，(2) を全て加え合わせて，

$$\Sigma_i p_i q_i = \Sigma_i p_i q^b{}_i + \mu \Sigma_i b_i - (\Sigma_k p_k q^b{}_k)\,\Sigma_i b_i$$

よって，

$$\mu = \Sigma_i p_i q_i = (1 - \Sigma_i b_i)\,(\Sigma_i p_i q^b{}_i) + \mu \Sigma_i b_i$$

$$(1 - \Sigma b_i)\mu = (1 - \Sigma_i b_i)(\Sigma_i p_i q_i) \qquad (5)$$

(5) が任意の μ，$\Sigma_i p_i q^b{}_i$ について成立しなければならないから，

$$\Sigma_i b_i = 1 \qquad (6)$$

にならねばならない。

(3) を書きかえると，（もちろん，$q_i \neq 0$, $i=1, 2, \cdots, m$, で $(\mathrm{q}^d)^{-1}$ が存在するとして[2]）

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= (\mathrm{p}^d)^{-1}\{(\mathrm{p}^d)\mathrm{q}^b + \mathrm{b}\mu - \mathrm{b}\mathrm{p}'\mathrm{q}^b\} \\ &= (\mathrm{p}^d)^{-1}\{\mathrm{b}\mu + \mathrm{b}\mathrm{i}'\mathrm{p}^d \cdot (-\mathrm{q}^b) - \mathrm{p}^d(-\mathrm{q}^b)\} \\ &= (\mathrm{p}^d)^{-1}\{\mathrm{b}\mu + (\mathrm{b}\mathrm{i} - \mathrm{I}) \cdot (-\mathrm{q}^b)^d\} \end{aligned} \qquad (7)$$

こゝで，$\mathrm{c} = -\mathrm{q}^b$ とおけば，

$$\mathrm{q} = (\mathrm{p}^d)^{-1}\{\mathrm{b}\mu + (\mathrm{b}\mathrm{i}' - \mathrm{I})\,\mathrm{c}^d\,\mathrm{p}\} \qquad (8)$$

この式は，また，

$$\mathrm{p}^d\,\mathrm{q} = \mathrm{b}\mu + (\mathrm{b}\mathrm{i}' - \mathrm{I})\,\mathrm{c}^d\,\mathrm{p} \qquad (9)$$

とあらわせば，各財に対する需要（支出）金額が，所得（総支出）μ と価格 $\mathrm{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$ の一次の函数として表示されることになるから，その意味で

2) 以下で $\mathrm{i} = (1, 1, \cdots, 1)$, $\mathrm{i}' = \langle 1, 1, \cdots, 1 \rangle$ とし，和ベクターとよぶことにする。また I は単位行列である。

(9) の需要函数を，*Linear Expenditure System* とよぶ。こゝでは，体系外からきまるパラメーターは，$q^b{}_1, q^b{}_2, \cdots, q^b{}_m; b_1, b_2, \cdots, b_m$ の $2m$ 個であるが，(5) が成立するから，実質的なパラメーターの数は，$2m-1$ 個である。いゝかえれば，需要函数 $q_i = f_i(\mu, p_1, p_2, \cdots, p_m)$ の，もっとも一般的な linear expenditure system は，

$$p^d q = \beta\mu + Bp$$

と考えられ，[3] β_i がm個，β_{ij} が m^2 個で，m^2+mのパラメーータ，さらに，おそらくは，$\Sigma_i \beta_i = 1$，$\Sigma_j \beta_{ij} = 0$ $(j=1, \cdots, m)$ であろうから，結局，実質的には $m^2+m-(m+1)=m^2-1$ 個のパラメーターによって規定されるところを，Stone では，(1) から出発することによって，$2m-1$個の実質的なパラメーターで間にあうように体系を構成させている。

2. Sluteky 方程式との関係[4]

あきらかに，各財に対する支出の総額が全支出額（所得）に等しくならなければならないはずである。したがって，

$$(i) \qquad p'q \equiv \mu \qquad (10)$$

が成立しなければならない。ところが。(3) に和ベクター i' を左から乗ずると，

$$i'p^d q = i'p^d q^b + i'b(\mu - p'b^b)$$

ところが，左辺は $p'q$ に等しく，右辺は，$\Sigma_i b_i = 1$，すなわち，$i'b=1$ を用いれば，

$$i'p^d q^b + i'b(\mu - p'q^b) = p'q^b + \mu - p'q^b = \mu$$

で，たしかに，(10) が成立することが検証できる。

また，Slutsky 方程式によって，需要数量は，価格と所得の 0 次の同次函

---

3) $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$,　$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mm} \end{bmatrix}$

4) Slutsky 方程式のもついろいろな性質のうち，ここでとりあげるものについては，とくに，cf. 安井琢磨，「経済理論の基本問題」経済学講座第1巻 pp. 1—20. または，Henderson, James M. and Richard E. Quandt, *Microeconomic Theory*, 1958. pp. 8—32.

数，したがって，代替項を S_{ij} としたとき，

$$\sum_{j=1}^{m} p_j S_{ij} \equiv 0$$

すなわち[5]，

$$p_1 \frac{\partial q_i}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial p_2} + \cdots\cdots + p_m \frac{\partial q_i}{\partial p_m} + \mu \frac{\partial q_i}{\partial \mu} \equiv 0$$

$$(i=1,2,\cdots,m) \qquad (11)$$

であることが要請される。ところが，

$$\mathrm{a} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial \mu}, \frac{\partial q_2}{\partial \mu}, \cdots, \frac{\partial q_m}{\partial \mu} \right)$$

および，

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial p_1} & \frac{\partial q_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial q_2}{\partial p_1} & \frac{\partial q_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial q_2}{\partial p_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial q_m}{\partial p_1} & \frac{\partial q_m}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial q_m}{\partial p_m} \end{pmatrix}$$

とおくと，(11) は

$$\mathrm{Ap} + \mathrm{a}\mu \equiv 0 \qquad (12)$$

であらわされるから Slutsky 方程式の性質の一つとして，

$$(ii) \qquad \mathrm{Ap} + \mathrm{a}\mu \equiv 0 \qquad (13)$$

が expenditure system に対して要請されることになる。あるいは，いゝかえれば，(11) から，

$$\frac{p_1}{q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial p_1} + \frac{p_2}{q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial p_2} + \cdots + \frac{p_m}{q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial p_m} + \frac{\mu}{q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial \mu} \equiv 0$$

$$(i=1, 2, \cdots, m) \qquad (14)$$

がみちびかれ，こゝで，$\frac{p_j}{q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial p_j}$ を $\frac{\delta q_i}{q_i} \Big/ \frac{\delta p_j}{p_j}$ と考えると，(14) の第1

---

5) $\Sigma_j p_j S_{ij} = \Sigma_j p_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j} + q_j \frac{\partial q_i}{\partial \mu} \right) = \Sigma_j p_j \frac{\partial b_i}{\partial p_j} + \frac{\partial q_i}{\partial \mu} \Sigma_j p_j q_j$

$= \Sigma_j p_j \frac{\partial q_i}{\partial b_j} + \mu \frac{\partial q_i}{\partial \mu}$

項から第m項までは，第i財の需量要の第j財価格に対する交さ弾力性を示し，最後の項は，第i財の需要量の所得弾力性を示す。これらの弾力性をそれぞれ，η^i_1, η^i_2, …, η^i_m および η^i_μ であらわすと (14) は

$$\eta^i_1+\eta^i_2+\cdots+\eta^i_m+\eta^i_\mu\equiv 0 \tag{15}$$

とかきあらためられる。(14) をさきに導入した記号で表示すれば

$$(ii') \qquad (\mathrm{p}^d)^{-1}(\mathrm{Ap}+\mathrm{a}\eta)\equiv 0 \tag{16}$$

であり，(ii) のかわりに，事実 Stone が表示したように，(ii′) を条件としておいても実質的な内容は全く変らない上に，(ii′) の方が (15) と一そう直接的に対応するから，計量経済学的に便利であろう[6]。

さて，ところが，(1) を p_j について偏微分すると，

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_j}\cdot q_i+\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\cdot p_i=\frac{\partial p_i}{\partial p_j}\cdot q_i{}^b-b_i\,\Sigma_k\,\frac{\partial p_k}{\partial p_j}\cdot q_k{}^b$$

クロネッカーの $\triangle_{ij}$ ($\triangle_{ij}=1$ *for* $i=j$, $\triangle_{ij}=0$ *for* $i\neq j$) を用いると，

$$\triangle_{ij}\cdot q_i+\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\cdot p_i=\triangle_{ij}\cdot q_i{}^b-b_i\,\Sigma_k\,\triangle_{kj}\cdot q^k{}_b$$

よって，

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j}=\frac{1}{p_i}\,\{\triangle_{ij}(q_i{}^b-q_i)-b_i\cdot q_j{}^b\} \tag{17}$$

また，(1) を μ に関して偏微分すると，

$$p_i\,\frac{\partial q_i}{\partial \mu}=b_i$$

よって，

$$\frac{\partial q_i}{\partial \mu}=\frac{1}{p_i}\cdot b_i \tag{18}$$

(17) と (18) を (11) に代入すると，

$$\sum_{j=1}^{m}p_j\cdot\frac{\partial q_i}{\partial p_j}+\mu\frac{\partial q_i}{\partial \mu}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j}{p_i}\{\triangle_{ij}(q_i{}^b-q_i)-b_iq_j\}+\mu\frac{b_i}{p_i}$$

---

6) なお，(15) から，ある財の全ての価格に対する交さ弾力性がえられゝば，それらを加え合わせて，その財の所得に関する弾力性が求められる。

$$= \frac{1}{p_i} \Sigma_j p_j \triangle_{ij} (q_i^b - q_i) - \frac{b_i}{p_i} \Sigma_j p_j \cdot q_j^b + \mu \frac{b_i}{p_i}$$

$$= \frac{(q_i^b - q_i)}{p_i} \Sigma_j p_j \triangle_{ij} + \frac{b_i}{p_i} (\mu - \Sigma_k p_k q_k^b)$$

$$= (q_i^b - q_i) + \frac{b_i}{p_i} (\mu - \Sigma_k p_k q_k^b)$$

$$= \frac{1}{p_i} \{ p_i q_i^b + b_i (\mu - \Sigma_k p_k q_k^b) - p_i q_i \}$$

ところが｛　｝の中は（*1*）式の右辺を左辺に移項した形に等しいから上式は恒等的に*0*に等しい。よって，Stone の Linear Expenditture System は Slutsky 方程式によって要請される（*ii*）の性質を持っていることが検証された。

また，Slutsky 方程式からは，第 i 財の価格変動にもとずく第 i 財と第 j 財との代替効果と第 j 財の価格変動にもとずくそれらの財の間の代替効果とが相等しい，すなわち，$\frac{\partial q_i}{\partial p_j}$ の代替項を S_{ij}，$\frac{\partial q_j}{\partial p_i}$ の代替項を S_{ji} とすると

$$S_{ij} = S_{ji} \tag{19}$$

であることが要請される。いゝかえれば Slutsky 方程式を

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j} \right)_{U=const} - q_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial \mu} \right)_{pri\ es=const}$$

とあらわして上の記号を用いると，

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = S_{ij} - q_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial \mu} \right)_{prices=const}$$

になるから，

$$S_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} + q_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial \mu} \right)_{prices=const}$$

同様にして，

$$S_{ji} = \frac{\partial q_j}{\partial p_i} + q_i \left(\frac{\partial q_j}{\partial \mu} \right)_{prices=const}$$

ところが，

$$\left(\frac{\partial q_k}{\partial \mu} \right)_{prices=const} = \frac{\partial q_k}{\partial \mu}$$

であるから，

$$S_{ij}=S_{ji}$$

は，

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j}+q_j\frac{\partial q_i}{\partial \mu}=\frac{\partial q_j}{\partial p_i}+q_i\frac{\partial p_j}{\partial \mu} \qquad (20)$$

または，両辺を $q_i q_j$ でわって，

$$\frac{1}{q_i q_j}\frac{\partial q_i}{\partial q_j}+\frac{1}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \mu}=\frac{1}{q_i q_j}\frac{\partial q_j}{\partial p_i}+\frac{1}{q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \mu} \qquad (21)$$

になり，Slutsky 方程式の代替効果が対称的である，という命題からは，(*19*) のかわりに，(*21*) が要請される，といってもよいことになる。

(*21*) を $i,\ j=1,2,\cdots,m$ について同時的に表示すると，すでにまえに導入した a, A, i を用いて，

$$(iii) \quad \mathrm{T}=(\mathrm{q}^{d})^{-1}(\mathrm{ai}'+\mathrm{A}(\mathrm{q}^{d})^{-1}) \qquad (22)$$

が対称行列でなければならないということと同値であることがたしかめられる。というは T の $(i,\ j)$ 要素を実際に計算すると，

$$T_{ij}=\frac{1}{q_i}\cdot\frac{\partial q_i}{\partial \mu}+\frac{1}{q_i q_j}\cdot\frac{\partial q_i}{\partial p_j}$$

また，

$$T_{ji}=\frac{1}{q_j}\cdot\frac{\partial q_j}{\partial \mu}+\frac{1}{q_i q_j}\cdot\frac{\partial q_j}{\partial p_i}$$

になることが検証できるからである。[7)]

Linear Expenditture System (*3*) が，(*i*)，(*ii*) をみたしたしたと同様に，(*iii*) をもみたしていればさらに，一そう理論的な条件が満足されていることになる。ところが (*iii*) も成立することが，つぎのようにして容易にたしかめられる。すなわち (*20*) の左辺にそれぞれ (*17*)，(*18*) を代入すると，$i \neq j$ の場合だけがこゝでは問題になっているのであるから，[8)]

---

7) 以上はまた，(*19*)，(*20*)，(*21*) の両辺に μ をかけて，μS_{ij}，したがってまた，

$$\mathrm{S}=\mu\mathrm{T}=(\mathrm{q}^{d})^{d-1}(\mathrm{ai}'+\mathrm{A}(\mathrm{q}^{d})^{d-1})\mu \qquad (23)$$

が対称行列でなければならない，という型であらわしても同じであり，Stone は (*23*) を用いている。

8) (*1*) から，$q_j-q_j{}^b=\frac{b_j}{p_j}(\mu-\Sigma_k p_k q_k{}^b)$

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j}+q_j\frac{\partial q_i}{\partial \mu}=\frac{1}{p_i}\{\triangle_{ij}(q_i^b-q_i)-b_iq_j^b\}+q_j\frac{1}{p_i}b_i$$
$$=\frac{b_i}{p_i}(q_j-q_j)$$
$$=\frac{b_i}{p_i}\{\frac{b_j}{p_j}(\mu-\Sigma_k p_k q_k)\}$$
$$=\frac{b_ib_j}{p_ip_j}(\mu-\Sigma_k p_k q_k^b)$$

になり，これは対称式であることから，あるいは右辺からも全く同一の式が導れかることから，(*iii*) がたしかめられたことになる。

以上から，Stone の Lienar Expenditure System に対して，(*i*), (*ii*), (*iii*) の Slutsky 方程式からみて望ましい性質（それらを，Stone にしたがって，それぞれ (*i*) *Additivity*, (*ii*) *Homogeneity* および (*iii*) *Symmetry of the substitution matrix* とよぶことにする）が成立することがわかる。

しかしながら，それら以外にも，Slutsky, Hotelling, Hicks および Allen などによって導かれた，需要函数が持つべき望ましい性質をいくつかあげることができる[9]。それらの主なものをあげれば，

(*iv*) $S_{ii}<0$　　(Slutsky)　　(*24*)

(*v*) $\sum_{j\neq i}^{m} p_j S_{ij}>0$　　(Hicks—Allen)　　(*25*)

(*vi*) $\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{m} p_i p_j S_{ij}<0$　　(Hotelling)　　(*26*)

(*vii*) $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{m} p_i p_j S_{ij}>0$　　(Hicks)　　(*27*)

これらが全て Sttone の Linear Expenditure System について，比較的ゆるやかな条件のもとで成立することもたしかめられる。

すなわち，

$$S_{ii}=\frac{\partial p_i}{\partial b_i}+q_i\frac{\partial q_i}{\partial \mu}$$
$$=\frac{1}{p_i}\{\triangle_{ii}(q_i^b-q_i)-b_iq_i^b\}+q_ib_i$$

9) たとえば注4にあげた安井教授の論文 pp. 19—20.

$$= \frac{1}{p_i}(1-b_i)(q_i^b - q_i)$$

$$= -\frac{1}{p_i}(1-b_i)\cdot\frac{b_i}{p_i}\cdot(\mu - \Sigma_k p_k q_k)$$

$$= -\frac{1}{p_i^2} b_i(1-b_i)(\mu - \Sigma_k p_k q_k^b)$$

もちろん $p_i > 0$ であるから（6）のほかに，さらに，$b_i < 1$，でしかも $q_i^b < q_i$ であるか，あるいは $0 < b_i < 1$ でしかも総支出金額（所得）が総基礎消費支出金額をこえる場合に（iv）が保証される。ところが全ての財（$i=1, 2, \cdots, m$）について（iv）が成立しなければならないから，

$$0 < b_i < 1 \qquad (i=1, 2, \cdots, m) \qquad (28)$$

のときには，この Linear Expenditure System が（iv）を満足することになる。いゝかえれば統計的に下級財[11]（$\partial q_i / \partial \mu < 0$）が体系のなかに見出されないときには（$iv$）は問題なしに成立する。

（v）については自明である。なぜなら，（11）あるいは，

$$\sum_{j=1}^{m} p_j S_{ij} \equiv 0$$

が成立することはすでにみたとおりであり，これから，（iv）でみちびかれる

$$p_i S_{ii} < 0$$

をさしひけば（vi）が成立することがすぐに見られるからである。

（vi）も容易である。なぜなら，

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{m} p_i p_j S_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p_i p_j S_{ij} - 2p_1 \sum_{j=1}^{m} p_j S_{1j} + p_1^2 S_{11}$$

ところが，

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p_i p_j S_{ij} = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{m} p_j S_{ij}\right) = 0$$

であるから，

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{m} p_i p_j S_{ij} = p_1^2 S_{11} < 0$$

10）cf. 注7）

11）下級財の定義として $\partial q_i / \partial p_i > 0$ と $\partial q_i / \partial \mu < 0$ の二つが考えられる（cf. Henderson and Quandt, op. cit., p.21 本文および脚注1）が，こゝでは後者の意味で用いる。

になるからである。

(*vii*) についても，Linear Expenditure System に対しては，[12]

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{m} p_i p_j S_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{m} p_i p_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j}+q_j\frac{\partial q_i}{\partial \mu}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{m}\left[p_i p_j \frac{1}{p_i}\{\triangle_{ij}(q_i^b-q_i)-b_i q_j\}+p_i p_j q_j\frac{b_i}{p_i}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{m} b_i p_i (q_j-q_j^b)<0$$

によって，(*v*) までの条件で成立することがたしかめられる。

3. 一般的な Linear Expenditure System との関係

前節では Stone の Linear Expendture System が Slutsky 方程式からみて望ましい若干の性質を保有していることがあきらかになった。しかし，(*1*) のような型で需要（支出）函数を考える以上，Slutsky 方程式から導かれる全ての性質が全て一般的に満足されているということは望むことができない。

しかし，全く一般的な需要函数

$$q_i=f_i(\mu, p_1, p_2, \cdots, p_m) \tag{29}$$

によつて実証的な研究にむかうことは不可能であるから，これを全ての変数に関してリニアーな，一般的な linear expenditure system,

$$\mathrm{p}^b\cdot\mathrm{q}=\beta\mu+\mathrm{Bp} \tag{30}$$

として表示して，[13) 14)] (*30*) が Sluttsky 方程式からみて望ましい諸性質を満足するように係数を確定していったときに，もしも，そこから（*1*）あるい（*3*）がみちびかれゝば，係数を確定するに当って用いられる諸性質を判断の基準にするかぎり，(*1*) あるいは (*3*) が，(*29*) を (*30*) のようにリニアーにあらわし

12) (*vii*) は (*i*) から (*vi*) まで，とくに，(*v*)，および (*vi*) から直接に，一般的に，導くことももちろん可能である。
13) cf. 注3
14) $p_i q_i=\beta_i\mu+\sum_k \beta_{ik} p_k \quad (i=1,\ 2,\cdots,\ m) \qquad (31)$

たときのもっとも一般的な型になるわけであるから，判断の基準としてとられない別の若干の性質がみたされなくても無視しなければならないことになる。

ところが，事実，(30) に前節の (i), (ii) および (iii) の条件を導入すると (3) が導かれる。

まず，(i) をみたすためには，(30) の両辺に左から i′ をかけると，

$$i'p^{d}q = i'\beta\mu + i'Bp$$

であるから，

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu + (i'B)\, p \tag{31}$$

ところが，(31) が任意の μ, p_1, $p_2, \cdots, p_m$ に関して成立する為には，

$$i'\beta = \Sigma_i \beta_i = 1 \tag{32}$$

および，

$$i'B = 0 \tag{33}$$

あるいは，

$$\sum_{k=1}^{m} \beta_{ki} = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{33'}$$

すなわち β_i の和が 1 で，さらに，B の列和が 0 にならなければならない。

(ii) については，前節の記号を用いて[15]，

$$a = \left(\frac{\partial q_1}{\partial \mu}, \frac{\partial q_2}{\partial \mu}, \cdots, \frac{\partial q_m}{\partial \mu}\right)$$

$$= \left(\frac{\beta_1}{p_1}, \frac{\beta_2}{p_2}, \cdots, \frac{\beta_m}{p_m}\right.$$

したがって，

$$a = (p^{d})^{-1}\beta \tag{34}$$

---

15) (31) より，

$$p_i \frac{\partial q_i}{\partial \mu} = \beta_i \quad したがって \quad \frac{\partial q_i}{\partial \mu} = \frac{\beta_i}{p_i}$$

また，

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_j} q_i + \frac{\partial q_i}{\partial p_j} p_i = \beta_{ij}$$

したがって，

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{1}{p_i}\left(\beta_{ij} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} q_i\right) = \frac{1}{p_i}\left(\beta_{ij} - \triangle_{ij} q_i\right)$$

また，

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial q_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial q_1}{\partial p_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial q_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial q_m}{\partial p_m}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{p_1}(\beta_{11}-q_1) & \dfrac{\beta_{12}}{p_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\beta_{1m}}{p_1}\\ \dfrac{\beta_{21}}{p_2} & \dfrac{1}{p_2}(\beta_{22}-q_2) & \cdots\cdots & \dfrac{\beta_{2m}}{p_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\beta_{m1}}{p_m} & \dfrac{\beta_{m2}}{p_m} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{p_m}(\beta_{mm}-q_m)\end{pmatrix}$$

よって，

$$A=(p^d)^{-1}(B-q^d) \tag{35}$$

これらの a および A を (*ii*) の (*13*) の左辺に代入すれば，

$$\begin{aligned}Ap+a\mu&=(p^d)^{-1}(B-q^d)p+(p^d)^{-1}\beta\mu\\&=(p^d)^{-1}[Bp+\beta\mu-q^dp]\\&\equiv 0\end{aligned}$$

なぜなら，〔 〕のなかは (*30*) によって恒等的に *0* になるからである。したがって，性質 (*ii*) からは，β および B に対して，なんら条件が加えられないことになる。[16]

(*iii*) からは B について制約が加えられることになる。すなわち，代替効果，S_{ij} および S_{ji} について，

$$S_{ij} = S_{ij} \tag{36}$$

を成立させるために，実際に S_{ij} と S_{ji} とを求めると，前節で求めたように，

$$S_{ij}=\frac{\partial q_i}{\partial p_j}+q_j\frac{\partial q_i}{\partial \mu}$$

---

16) こゝでわれわれは，$A=(p^d)^{-1}(B-q^d)$ であらわして，(*ii*) の (*30*) が恒等的に成立することを証明した。Stone は $A=(p^d)^{-1}[B-(p^d)^{-1}(\beta^d\mu+(Bp)^d)]$ のような複雑な表現をとっているが，それによって別に利益がえられるようには見えない。

$$S_{ji} = \frac{\partial q_j}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial q_j}{\partial \mu}$$

であり，これらは注15の結果を使えば，

$$S_{ij} = \frac{1}{p_i}(\beta_{ij} - \triangle_{ij} q_i) + q_j \frac{\beta_i}{p_i} \tag{37}$$

$$S_{ji} = \frac{1}{p_j}(\beta_{ji} - \triangle_{ij} q_j) + q_i \frac{\beta_j}{p_j} \tag{38}$$

で，S_{ij} から，

$$R = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1m} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mm} \end{pmatrix}$$

を構成したときに，性質（*iii*）は R が対称行列でなければならないことを要求していることになる。ところが，(*37*)，(*38*) を用いると R は

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1}(\beta_{11} - q_1 + q_1\beta_1) & \frac{1}{p_1}(\beta_{12} + q_2\beta_1) & \cdots \frac{1}{p_1}(\beta_{1m} + q_m\beta_1) \\ \frac{1}{p_2}(\beta_{21} + q_1\beta_2) & \frac{1}{p_2}(\beta_{22} - q_2 + q_2\beta_2) & \cdots \frac{1}{p_2}(\beta_{2m} + q_m\beta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{p_m}(\beta_{m1} + q_1\beta_m) & \frac{1}{p_m}(\beta_{m2} + q_2\beta_m) & \cdots \frac{1}{p_m}(\beta_{mm} - q_m + q_m\beta_m) \end{pmatrix}$$

$$= (p^d)^{-1}\left(B + \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_m & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} q^d - q^d\right)$$

$$= (p^d)^{-1}[B + (\beta i' - I)q^d]$$

$$= (p^d)^{-1}[B(q^d)^{-1} + (\beta i' - I)]q^d \tag{39}$$

になり (*39*) の右辺が対称行列になることが要求される。[17] (*39*) をさらに展開す

---

17) 以上では，代替項 S_{ij} について，$S_{ij} = S_{ji}$ から直接にみちびいたが，(*22*) の T が対称行列にならなければならないことを利用すれば推論は単純化される。すなわち，T に (*34*) および (*35*) によって，a，A を代入すれば，

$$T = (q^d)^{-1}[(p^d)^{-1}\boldsymbol{\beta} i' + (p^d)^{-1}(B - q^d)(q^d)^{-1}]$$
$$= (q^d)^{-1}(p^d)^{-1}[\boldsymbol{\beta} i' + B(q^d)^{-1} - I]$$

たゞし，Tの要素は $S_{ij}/q_i q_j$ であるからから，T から R に変換するために，T に左と右から q^dをかけてやれば，

$$q^d T q^d = q^d (q^d)^{-1} (p^d)^{-1} (\boldsymbol{\beta} i' + B(q^d)^{-1} - I) q^d = R$$

で，たゞちに (*39*) がみちびかれる。

れば，

$$R=(p^d)^{-1}B+(p^d)^{-1}\beta i'q^d-(p^d)^{-1}q^d \tag{40}$$

こゝで，第*3*項は，対角行列の積であるからもちろん対角，したがって対称行列である。しかし，第*1*項および第*2*項は一般に対称行列ではない。いま，

$$R_1=(p^d)^{-1}B+(p^d)^{-1}\beta i'q^d=(q^d)^{-1}B+(p^d)^{-1}\beta q'$$

とし，(*30*)から，

$$q=(p^d)^{-1}\beta\mu+(p^d)^{-1}Bp$$

したがって，

$$q'=\mu\beta'(p^d)^{-1}+p'B'(p^d)^{-1}$$

を R_1 に代入すると，

$$R_1=(p^d)^{-1}B+(p^d)^{-1}\beta(\mu\beta'(p^d)^{-1}+p'B'(p^d)^{-1})$$

で，この R_1 の第*2*項は，

$$[(p^d)^{-1}\beta\mu\beta'(p^d)^{-1}]'=(p^d)^{-1}\beta\mu\beta'(p^d)^{-1}$$

であり，対称である，したがって R で真に問題になるのは R_1 の第*1*項と第*3*項であり，これを

$$R_2=(p^d)^{-1}B+(p^d)^{-1}\beta p'B'(p^d)^{-1}$$

とおくと，これが対称行列になるためには，

$$(p^d)^{-1}B+(p^d)^{-1}\beta p'B'(p^d)^{-1}=B'(p^d)^{-1}+(p^d)^{-1}Bp\beta'(p^d)^{-1} \tag{41}$$

でなければならない。(*41*) を変形すれば，

$$(p^d)^{-1}B[I-p\beta'(p^d)^{-1}]=[I-(p^d)^{-1}\beta p']B'(p^d)^{-1} \tag{42}$$

(*42*) から，

$$(p^d)^{-1}B(Ip^d-p\beta')(p^d)^{-1}=(p^d)^{-1}(p^dI-\beta p')B'(p^d)^{-1} \tag{43}$$

両辺に p^d を左および右からかけると，

$$B(Ip^d-p\beta')=(p^dI-\beta p')B' \tag{44}$$

したがって，(*44*) から，B は

$$B=(p^dI-\beta p')D=(p^d-\beta p')D \tag{45}$$

の形をしていなければならないことがわかる。たゞし，こゝで D は任意の対

称行列 D＝D′ である。[18)]

以上から，代替項によって構成される行列 R が対称行列，すなわち，$S_{ij}=S_{ij}$ が成立するためには，一般的な linear expenditure system (*30*) について，Bは (*45*) であらわされるような型をしていなければならない。したがって，一般的な linar expenditure system そのものは，(*iii*) を満足するためには，

$$
\begin{aligned}
p^d q &= \beta\mu + Bq \\
&= \beta\mu + (p^d - \beta p')Dp \\
&= \beta\mu + (\beta p' - p^d)(-D)p \\
&= \beta\mu + (\beta i' - I\ (-p^d D)p
\end{aligned}
$$

でなければならない。新らしく，

$$-p^d D = C$$

とおけば，$-p^d$ も D も対称行列であるから，

$$C = C'$$

で，一般的な linear expenditure system は，

$$p_d q = \beta\mu + (\beta i' - I)Cp \qquad (46)$$

になる。D が任意の対称行列であるから，C も任意の対称行列である。

このようにして，(*i*)，(*ii*) および (*iii*) の条件を満足するような一般的な型態は (*46*) であたえられる。これに対して，Stone は，(*9*) であらわされたように，C をとくに $c^d=(-q^d)$ とおくことによって，パラメーターの数をへらし，統計的分析を行うことを可能にしている。(*28*) を仮定することによって下級財の可能性が体系のなかからはずされることになったが，一般的な C のなかから，とくに c^d を用いることによって，理論的な面でいかなる制約が与えられることになるかという点についての検討はの機会にゆずりたい。

---

18) 事実 (*45*) を (*44*) に代入すれば，

$$(p^d I - \beta p')D(Ip^d - p\beta') = (p^d I - \beta p')D(Ip^d - p\beta')$$

になり (*44*) が成立する。