整数ナップサックの周期性について

飯田浩志 *

概要

2009 年に Hu, Landa and Shing による整数ナップサック問題に関するサーベイ論文が公刊された. ここでは, そこで言及された最適解の周期性について, 特に, 周期のはじまりを指示する重量制限の大きさへの上界ふたつについて, もう少し掘り下げてみたい.

キーワード: 組合せ最適化, 整数ナップサック問題, 最適解の周期性

古典的な 0–1 ナップサック問題では, 各項 (品物) は一つずつしか用意されない. 各項をいくつでも取れるとしたのが整数ナップサック問題 (以降, UKP と記す) である. $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ として, UKP は次のように定式化される: $z = \max\{\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \mid \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le b;\ x_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, 2, \dots, n\}$. 以下では, 重量制限 b ならびにすべての価値 v_j および重量 w_j を正の整数と仮定する. 加えて, 一般性を失うことなく $v_1/w_1 \ge \max_j v_j/w_j$, すなわち, 最も効率の良い項を項 1 とする.

UKP の最適解が周期性を持つことは, よく知られている. つまり, ある b^{**} 以上の b を持つ UKP では, 必ず, 項 1 を含む最適解がある, というものである. このことは, 充分に大きい b を持つ UKP を解く時間を大幅に短縮する. なぜなら, b から w_1 を引き続け, b^{**} 未満になったところで最適解を求めれば良いからである. この b^{**} については, まだ, 簡便な求め方は知られていない.

b^{**} への simple な上界——b^{**} は, この値以下——として

$$\sum_{j \ne 1} \mathrm{lcm}(w_1, w_j) \tag{1}$$

が知られている (Kellerer et al [2, p. 215], Hu et al [1]). ここに $\mathrm{lcm}(w_1, w_j)$ は, w_1 と w_j の最小公倍数を表す. 上界 (1) は, より精密には

$$\sum_{j \ne 1} \left(\frac{\mathrm{lcm}(w_1, w_j)}{w_j} - 1 \right) w_j + \min_j w_j \tag{2}$$

であろう. なぜなら, 最適解においては常に, 項 1 以外の項 j は $\mathrm{lcm}(w_1, w_j)/w_j$ 個未満としてよい——$\mathrm{lcm}(w_1, w_j)/w_1$ 個の項 1 と交換できてしまうから——ので, 各項 $j \ne 1$を個数の上限まで取っても重量制限まであと $\min_j w_j$ だけあれば, 目的函数値 $\sum_{j=1}^{n} v_j x_j$ の最大化のためには項 1 もしくは $\min_{j \ne 1} w_j$ を与える項, 仮に項 k とする, を取らざるを得ない; もし, 項 1 も項 k も選択しない別の組合せが最適なら, その他 $\{2, 3, \dots, n\} \setminus \{k\}$ のうち少なくともいずれか一つの項 j が $\mathrm{lcm}(w_1, w_j)/w_j$ 個に達することになるからである.

さて, Hu et al [1] にある UKP の例

j	1	2	3
v_j	8	3	17
w_j	8	5	18

(3)

を上界 (1) にあてはめると $40 + 72 = 112$ だが, (2) は $35 + 54 + 5 = 94$ である. さらに (2) は, 項 1 が他のすべての項を multiply dominate [2, p. 216] する——すなわち, $\forall j \ne 1$ について w_j が w_1 の整数倍である——とき, $b^{**}(= w_1)$ と一致する.

もう一つ, b^{**} への simple な上界として

$$\frac{w_1 \rho_1}{\rho_1 - \rho_2} \tag{4}$$

がある [1]. ここに $\rho_1 := v_1/w_1$, そして ρ_2 は二番目に大きい v_j/w_j の値を示す. 上界 (4) は, 先の例 (3) では $8/(1 - 17/18) = 144$ と, (1) や (2) に比べてや

 *auau2.a.go.go@gmail.com

や大きいものの, ρ_1/ρ_2 が大きければ, 小さい値が期待できる.[†] これは, 項 1 が飛び抜けて効率が良い場合には b^{**} の値が小さいであろう, という直感に合致する. 加えて (4) は, ρ_1 が大きくなる, または ρ_2 が小さくなるにつれて w_1 に近づく, ということも見て取れる.

重量のみで構成される (1) および (2) ならびに後述する Gilmore and Gomory の上界とは違って, 項の価値を含む (4) は異色の存在である. その証明では, $b \geq$ (4) ならば, 最適値が $b\rho_2$ を超えるためには項 1 を取らざるを得ないことが示される [1]. より正確には, $b \geq$ (4) は, $\lfloor b/w_1 \rfloor v_1 > b\rho_2$ が成立するための十分条件である. ここで, (最適値) $\geq \lfloor b/w_1 \rfloor v_1$ に注意されたい.

以降では, 便宜上 $\rho_2 := v_2/w_2$ とする. 上界 (4) は項 1 と項 2 の二つのみから構成されるけれども, 第三の項にまで対象を広げることが, b^{**} への新たな上界を生む. 具体的には, 三番目に大きい v_j/w_j の値を ρ_3 として, 先述の成り立つべき $\lfloor b/w_1 \rfloor v_1 > b\rho_2$ の右辺を $\lfloor b/w_2 \rfloor v_2 + (b - \lfloor b/w_2 \rfloor w_2)\rho_3$ で置き換えた式を成立せしめる条件が, 求める上界を与える.

補題 1. 次の条件を満たす UKP は, 項 1 を含む最適解を持つ:

$$b \geq \left\lceil \frac{(w_1 - 1)\rho_1 + \rho_3}{\rho_1 - \rho_2} \right\rceil. \tag{5}$$

したがって, 上の不等式 (5) の右辺が b^{**} への上界[‡]となる.

証明. 与式 (5) から天井函数を外した後, 変形して

$$\begin{aligned} b(\rho_1 - \rho_3 - (\rho_2 - \rho_3)) &\geq w_1\rho_1 - (\rho_1 - \rho_3) \\ &= (w_1 - 1)(\rho_1 - \rho_3) \\ &\quad + w_1\rho_3. \end{aligned}$$

ゆえに

$$(b - w_1 + 1)(\rho_1 - \rho_3) - w_1\rho_3 \geq b(\rho_2 - \rho_3)$$

を得る. このとき,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor v_1 - b\rho_3 &> \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor v_1 - \left(\left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor + 1 \right) w_1\rho_3 \\ &= \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1(\rho_1 - \rho_3) - w_1\rho_3 \\ &\geq \left(\frac{b}{w_1} - \frac{w_1 - 1}{w_1} \right) w_1(\rho_1 - \rho_3) \\ &\quad - w_1\rho_3 \\ &= (b - w_1 + 1)(\rho_1 - \rho_3) - w_1\rho_3 \\ &\geq b(\rho_2 - \rho_3) \\ &\geq \left\lfloor \frac{b}{w_2} \right\rfloor w_2(\rho_2 - \rho_3). \end{aligned}$$

よって, 与式 (5) の下で

$$\left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor v_1 > \left\lfloor \frac{b}{w_2} \right\rfloor v_2 + \left(b - \left\lfloor \frac{b}{w_2} \right\rfloor w_2 \right) \rho_3$$

がいえる.[§] ∎

ここで, つけ加えておきたい. 最初の式変形を

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor v_1 - b\rho_3 &\geq \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor v_1 - \left\lceil \frac{b}{w_1} \right\rceil w_1\rho_3 \\ &\geq \left(\frac{b}{w_1} - \frac{w_1 - 1}{w_1} \right) w_1\rho_1 \\ &\quad - \left(\frac{b}{w_1} + \frac{w_1 - 1}{w_1} \right) w_1\rho_3 \\ &\cdots \\ &> b(\rho_2 - \rho_3) \end{aligned}$$

と進めた結果, 得られるのは

$$b > \frac{(w_1 - 1)(\rho_1 + \rho_3)}{\rho_1 - \rho_2}$$

である. これは, $w_1 = 1$ の場合を除いて, 補題 1 の主張よりも強くない (さらに, 大雑把に言って, (4) より悪い[¶]). 実際には, ρ_3 を導入せずとも (4) は, もう少し良くなる:

[†] 察(さつ)しのいい読者はもうお気付きのように, (4) は $\frac{w_1}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}}$ と変形できる.

[‡] $\rho_1 \geq \rho_3$ だから, (4) より悪く (大きく) ない. 仮定から b が正の整数なので, 整数化のために天井函数を施しているけれども, 無くても同じこと.

[§] この証明の式変形中, ‘$>$’ は一回しか使っていない. どうやら ‘$>$’ が二回出てくると, (4) より小さい上界は得られないらしい. このことは, 補題 2 の証明でも同様である.

[¶] おそらくほとんどの場合, $(w_1 - 1)\rho_3 \geq \rho_1$ ではなかろうか. これを否定すると, たとえば $w_1 = 3$ でも, ρ_1 は ρ_3 の倍を超えなければならない (w_1 が大きくなれば, さらに状況は悪化する). 特に n が大きい (項数が多い) 場合には, ρ_1 と ρ_3 に大差なしと考えるのが自然であろう.

補題 2.

$$b \geq \left\lfloor \frac{w_1\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \right\rfloor$$

なる UKP は, 項 1 を含む最適解を持つ.

証明.

$$(\text{与式の右辺}) = \left\lfloor \frac{(w_1 - 1)\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} \right\rfloor + 1$$

であり, b は正の整数だから, 与式は

$$b > \frac{(w_1 - 1)\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} \tag{6}$$

と同値である. この式 (6) を変形して

$$(b - w_1 + 1)\rho_1 > b\rho_2$$

を得る. このとき,

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor v_1 &\geq \left(\frac{b}{w_1} - \frac{w_1 - 1}{w_1} \right) v_1 \\ &= (b - w_1 + 1)\rho_1 > b\rho_2.\end{aligned}$$

したがって [1] と同様の議論から, 与式を満たす UKP の最適解は項 1 を含む. ∎

補題 1 と 2 を先の例 (3) に適用すると, 前者が $\lceil (7 + 0.6) \times 18 \rceil = \lceil 136.8 \rceil = 137$ を, 後者が $\lfloor (8 - 17/18) \times 18 \rfloor = \lfloor 8 \times 18 - 17 \rfloor = 127$ を与える. ちなみに, 例 (3) を補題 2 の証明の途中に出てきた式 (6) にあてはめると $b > 7 \times 18 = 126$ で, 補題 2 を例 (3) に適用して得られた結果 $b \geq 127$ と一致する.

じつは, 証明中に表われているように, 補題 2 の条件は補題 1 の条件を包含する (i.e. (5)$\Rightarrow$(6); 要するに, 補題 1 は証明するまでもなかった). ゆえに後者の方が, より小さい上界を与える.

ことのついでに, Nemhauser and Wolsey [3] によると, b^{**} への上界として Gilmore and Gomory は $(w_1 - 1)\max_{j \neq 1} w_j$ を提案している. 例 (3) に対しては $(8 - 1) \times 18 = 126$ を与える.

上界の話とはまた別に, Hu et al [1] によれば, Landa の解法を例 (3) に適用して求めた b^{**} は 36 である. 正確に b^{**} を決定するものの, Landa の解法はオーダ $O(nw_1)$ であり, w_1 が大きい場合には高くつくきらいがある. b^{**} を求める Landa の解法の詳細については Hu et al [1] を参照されたい.‖

以上, 見てきたように, b^{**} への上界の与え方といっても, 最も効率の良い項との交換可能性の否定から重量制限を規定するもの, 最適値の到達不可能性に依拠するものと, 答は一つではない. 本稿を契機として, b^{**} への上界あるいは b^{**} そのものを決定する新たな手法の提案が現われることを期待する.

REFERENCES

[1] T.C. Hu, L. Landa and M.-T. Shing, "The unbounded knapsack problem". In: W.J. Cook, L. Lovász and J. Vygen (Eds.) *Research Trends in Combinatorial Optimization*. Springer 2009 [doi:10.1007/978-3-540-76796-1]; pp. 201–17.

[2] H. Kellerer, U. Pferschy and D. Pisinger, *Knapsack Problems*. Springer 2004.

[3] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*. paperback reprinted, Wiley-Interscience 1999.

‖表 10.5 [1, p. 213] 最下行 4 列目は '3' ではなく '2' であろう. つまり, ひとつ上の行で $g_t^3(3)$ が 1 に決まったので, これを受けて $g_t^3(i) + 17 - 8 \times \lfloor (i + 18)/8 \rfloor |_{i=3} = 1 + 17 - 16 = 2$.