最適なものの一部を取り出してみると, その部分でのみ考えても, やはり最適になっている. これを, 最適性の原理という. たとえば, A から B までの最短路を考えると, A から途中で経由している C までの部分経路は, A から C までの最短路になっている. なぜなら, もし最短路ではないとすると, 別に存在する最短路で A から C までの部分経路を置き換えると, もとの最短路より短くなってしまって矛盾するからである.

もう一つ, 古典的な 0–1 ナップサック問題 [3] においても, 最適な項の組合せ (最適解) の一部を取り出して考えたとき, 当該部分を構成する項の総重量の範囲内で, かつ最適解の残りの部分で使われていない項全体の中では, その項の組合せが最適である.

一般に, この逆は成立しない. たとえば, 大阪から金沢までの最短路と金沢から東京までの最短路を足しても, 大阪から東京までの最短路にはならない. このように, 最適 + 最適 = 最適 とは限らない.

しかし, 整数ナップサック問題における最適解の周期性は, 成立するとは限らない逆の正当性を主張しているといえる. 換言すれば, ある閾値 b^{**} 以上の重量制限を持つ問題例 (instance) について, 最も効率の良い項ひとつとその重量を重量制限から引いた残りに対する最適性から, 全体の最適性を保証している. つまり, b^{**} 以上の重量制限を持てばという条件付きではあるものの, 最適 + 最適 = 最適 を主張していることに他ならない.

整数ナップサック問題 (以降, UKP と記す) は, 重量制限の範囲内で, 各品物 (項) を選択するかしないかの二者択一とする古典的な 0–1 ナップサック問題とは異なり, いずれの項もいくつでも取れるとした問題である. UKP は, 各項 j の選択個数を表す変数 $x_j \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \ldots\}$ として, $z = \max\{\sum_{j=1}^n v_j x_j \mid \sum_{j=1}^n w_j x_j \le b;\ x_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ と定式化される. 本稿を通じて, すべての項 j の価値 v_j および重量 w_j ならびに重量制限 b を正の整数と仮定する. いずれの項 j も選択可能であるように, $w_j \le b$ も仮定する. 加えて, 項 1 が最も効率が良い, すなわち $v_1/w_1 = \max_j\{v_j/w_j\}$ とする. さらに $\rho_1 := v_1/w_1$, そして ρ_2 は二番目に大きい v_j/w_j の値を指すものとする. また, n 次元ベクトル $x := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を解と呼び, 解とそれが示す項の組合せを同一視する. 整数ナップサック問題の詳細については, 前掲の成書 [3] の第八章を参照されたい.

本稿では, 整数ナップサック問題の周期性に関連して, 拙稿 [2] で議論した補題 2 について, 二点ほど補足する. 本論に入る前に, 本稿のベースとなる [2] に関して, ひとつ訂正しておきたい. Hu et al [1] における b^{**} は, 重量制限 b がこの値を超えると周期性が認められる (最も効率の良い項ひとつを選択しても最適性を損ねない) という意味で使われており, b^{**} 以上なら周期性が認められると定義した拙稿 [2](および本稿) とは異なる. したがって, 拙稿 [2] の 3 ページ目左段下から 2 行目にある ‘36’ は ‘37’ と書くべきであった. ここに, お詫びして訂正する.

さて, 拙稿 [2] では, Hu et al [1] で言及された b^{**} への上界ふたつのうち

$$\frac{w_1\rho_1}{\rho_1-\rho_2} \tag{1}$$

について, 次の補題を論じた.

補題 2.

$$b \geq \left\lfloor \frac{w_1\rho_1-\rho_2}{\rho_1-\rho_2} \right\rfloor$$

なる UKP は, 項 1 を含む最適解を持つ.

ここに, 補題 2 の与式の右辺が b^{**} への上界を与える. つまり, b^{**} は, この値より大きくないというのが補題 2 の主張である. 以下, この補題 2 について二点ほど補足する.

まず $w_1 = 1$ のとき, 補題 2 の与える b^{**} への上界が 1 となって b^{**} に一致することを付け加えておきたい. これは, 補題 2 の元(もと)となる (1) には見られない性質である. つぎに, 補題 2 の条件を緩和した補題 3 と 4 ならびにそれらの拡張について, 本稿の残りを使って述べる.

補題 2 の証明で示したのは, 与えられた UKP(問題例) の最適解が必ず項 1 を含む為の, 重量制限 b に対する条件であった. しかしこれは, 項 1 を含む最適解がある, という主張よりも強い. この点を考慮することで, 若干ではあるものの, 補題 2 の条件を緩和できる. 以下に掲げる補題 3 および補題 4 は, この方針に従っている.

補題 3.

$$b \geq \left\lceil \frac{(w_1-1)\rho_1}{\rho_1-\rho_2} \right\rceil$$

なる UKP は, 項 1 を含む最適解を持つ.

証明. $\lfloor b/w_1 \rfloor v_1$ は, 最も効率の良い項 1 のみを用いたときの目的函数 $\sum_j v_j x_j$ の最大値であり, これは見方を変えれば, 項 1 を一つ以上含む実行可能解 (制約条件を満たす解) 全体で考えたときの目的函数の最大値の下限でもある. その一方で $b\rho_2$ は, 項 1 を含まない実行可能解全体の中での目的函数値の上界である. 以上から, 不等式 $\lfloor b/w_1 \rfloor v_1 \geq b\rho_2$ は, 項 1 を含む最適解の存在を支持するといえる. この不等式が成立するための十分条件としては, 補題 2 の証明と同様にして $(b-w_1+1)\rho_1 \geq b\rho_2$ が得られる (次の補題 4 の証明の一部とも重なる). これを変形して, 与式を得る. ∎

得られた b^{**} への上界—補題 3 の与式の右辺—は, 補題 2 の与えるそれと比較して, $(w_1-1)\rho_1/(\rho_1-\rho_2)$ が整数のときに限って 1 だけ小さい (拙稿 [2] で述べたように, 補題 2 の条件が

$$b > \frac{(w_1-1)\rho_1}{\rho_1-\rho_2}$$

と同値であることに注意されたい). 実際, Hu et al [1] にある例 (p. 205 の (7))

$$\begin{array}{c|ccc} j & 1 & 2 & 3 \\ \hline v_j & 8 & 3 & 17 \\ w_j & 8 & 5 & 18 \end{array} \tag{2}$$

に適用すると, 補題 2 では $\lfloor (8-17/18)\times 18 \rfloor = \lfloor 8\times 18 - 17 \rfloor = 127$ であり, 補題 3 では $\lceil 7\times 18 \rceil = 126$ である. 後者は, Gilmore and Gomory の上界 (cf. Nemhauser and Wolsey [4, p. 435]) $(w_1-1)\max_{j\neq 1} w_j$ が与える値に等しい.

さらに, 補題 3 の論拠とした不等式 $\lfloor b/w_1 \rfloor v_1 \geq b\rho_2$ の左辺について, 項 1 のみならず, 二番目に効率の良い項をも考えたもの, すなわち

$$\left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor v_1 + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1}{w_2} \right\rfloor v_2 \geq b\rho_2 \tag{3}$$

の成立を論拠とすることで, 次を得る.

補題 4.

$$b \geq \left\lceil \frac{(w_1-1)\rho_1 - (w_1-w_2)\rho_2}{\rho_1-\rho_2} \right\rceil$$

なる UKP は, 項 1 を含む最適解を持つ.

証明. 与式から天井函数を外した後, 変形して

$$(b-w_1+1)\rho_1 + (w_1-w_2)\rho_2 \geq b\rho_2$$

を得る. 他方,

$$\begin{aligned}
&\left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor v_1 + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1}{w_2} \right\rfloor v_2 \\
&\quad \geq \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor v_1 + \left(\frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1}{w_2} - \frac{w_2-1}{w_2} \right) v_2 \\
&\quad = \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor (v_1 - w_1\rho_2) + (b-w_2+1)\rho_2 \\
&\quad \geq \left(\frac{b}{w_1} - \frac{w_1-1}{w_1} \right) (v_1 - w_1\rho_2) + (b-w_2+1)\rho_2 \\
&\quad = (b-w_1+1)(\rho_1-\rho_2) + (b-w_2+1)\rho_2 \\
&\quad = (b-w_1+1)\rho_1 + (w_1-w_2)\rho_2.
\end{aligned}$$

したがって, 与式の下で (3) がいえる. ∎

得られた b^{**} への上界を例 (2) に適用すると $\lceil (7-(8-18)\cdot 17/18)\times 18 \rceil = \lceil 126+170 \rceil = 296$ で見る影もないけれども, $w_1 \geq w_2$ であれば, 補題 3 の与え

る上界よりも悪く (大きく) なることはない. 実際, Nemhauser and Wolsey [4, p. 434] の例 1.1:

$$\begin{array}{c|cccc} j & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline v_j & 11 & 7 & 5 & 1 \\ w_j & 6 & 4 & 3 & 1 \end{array} \tag{4}$$

に適用すると, 補題 3 の与える上界が 110 に対して, 補題 4 のそれは 68 である. じつは $b^{**} = 9$ [4, p. 435] であり, 補題 4 でも遠く及ばない. ちなみに, この例 (4) への Gilmore and Gomory の上界は $(6-1) \times 4 = 20$ である.

そこで, さらに一歩進めて,

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor v_1 + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1}{w_2} \right\rfloor v_2 \\ &\quad + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1 - \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1}{w_2} \right\rfloor w_2}{w_3} \right\rfloor v_3 \geq b\rho_2 \end{aligned} \tag{5}$$

の成立を論拠とすることで,

$$b \geq \left\lceil \frac{(w_1 - 1)\rho_1 - (w_1 - w_2)\rho_2 - (w_2 - w_3)\rho_3}{\rho_1 - \rho_2} \right\rceil$$

なる UKP は項 1 を含む最適解を持つことが示せる (証明は, 補題 4 のそれとほぼ同様につき略). ここで ρ_3 は, 三番目に大きい v_j/w_j の値を指す. 以上のことから, $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_n$ を仮定したうえで,

$$b \geq \left\lceil \frac{(w_1 - 1)\rho_1 - \sum_{j=2}^{n} (w_{j-1} - w_j)\rho_j}{\rho_1 - \rho_2} \right\rceil \tag{6}$$

ならば, 項 1 を含む最適解が存在すると類推される (付録を参照のこと). ただ, (6) を持ってしても, 例 (4) に対する b^{**} への上界は $\lceil (55/6 - 7/2 - 5/3 - 2)/(11/6 - 7/4) \rceil = \lceil (55 - 21 - 10 - 12)/6 \times 12 \rceil = 24$ であり, 実際の $b^{**} = 9$ との間には依然として大きなギャップがあるうえに, Gilmore and Gomory の上界 20 よりも悪い (大きい).

ここで一つ, (6) が与える b^{**} への上界は, 常に Gilmore and Gomory の上界に劣るわけではないことをつけ加えておきたい. 例えば

$$\begin{array}{c|ccc} j & 1 & 2 & 3 \\ \hline v_j & 12 & 2 & 1 \\ w_j & 8 & 3 & 2 \end{array}$$

では, Gilmore and Gomory の上界 $(8-1) \times 3 = 21$ に対して (6) は $\lceil (21/2 - 10/3 - 1/2)/(3/2 - 2/3) \rceil = \lceil (20/3) \times (6/5) \rceil = 8$ を与える. また, 明らかに

$b^{**} \geq w_1$ であることから, この例では (6) の与える上界と b^{**} は一致する. 他にも

j	1	2	3
v_j	16	3	1
w_j	8	4	2

,

j	1	2	3
v_j	24	4	1
w_j	8	4	2

,

j	1	2	3	4
v_j	64	8	3	1
w_j	16	8	4	2

,

j	1	2	3	4	5
v_j	160	16	7	3	1
w_j	32	16	8	4	2

,

j	1	2	3
v_j	128	3	1
w_j	64	32	16

,

j	1	2	3
v_j	192	4	1
w_j	64	32	16

なども, (6) の与える上界と b^{**} が一致する. 以上の例から, および (6) の右辺の形からも見て取れるように, (6) が機能する為には, 前述の $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$ に加え, ρ_1 と ρ_2 の差が小さくないことも肝要である.

参考文献

[1] T. C. Hu, L. Landa and M.-T. Shing, "The unbounded knapsack problem". In: W. J. Cook, L. Lovász and J. Vygen (Eds.) *Research Trends in Combinatorial Optimization: Bonn 2008.* pp. 201–217 [doi:10.1007/978-3-540-76796-1_10] Springer 2009.

[2] 飯田, 整数ナップサックの周期性について. Discussion paper series no. 118, 小樽商科大学ビジネス創造センタ, 2009 年 3 月; ⟨`http://hdl.handle.net/10252/2207`⟩ から入手可能.

[3] H. Kellerer, U. Pferschy and D. Pisinger, *Knapsack Problems.* Springer 2004.

[4] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization.* paperback reprinted, Wiley-Interscience 1999.

A 付録

ここでは, (6) に至る過程を述べる. 左辺を第 3 項までで止めた—効率の良い方から三つの項のみ用いた—(5) に変えて, (最終) 第 n 項まで考慮した不等式の成立が, (6) の下で項 1 を含む最適解の存在を主張する論拠となる. その第 n 項まで考慮した不等式の左辺は, 補題 4 の証明を敷衍(ふえん)すれば, 以下のように変形できる:

$$
\begin{aligned}
&\left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor v_1 + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1}{w_2} \right\rfloor v_2 + \cdots + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1 - \cdots}{w_n} \right\rfloor v_n \\
&\quad \geq \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor v_1 + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1}{w_2} \right\rfloor v_2 + \cdots + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1 - \cdots}{w_{n-1}} \right\rfloor v_{n-1} \\
&\qquad + \left(\frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1 - \cdots}{w_n} - \frac{w_n - 1}{w_n} \right) v_n \\
&\quad = \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor (v_1 - w_1 \rho_n) + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1}{w_2} \right\rfloor (v_2 - w_2 \rho_n) + \cdots \\
&\qquad + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1 - \cdots}{w_{n-1}} \right\rfloor (v_{n-1} - w_{n-1} \rho_n) + (b - w_n + 1) \rho_n \\
&\quad \geq \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor (v_1 - w_1 \rho_n - w_1(\rho_{n-1} - \rho_n)) \\
&\qquad + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1}{w_2} \right\rfloor (v_2 - w_2 \rho_n - w_2(\rho_{n-1} - \rho_n)) + \cdots \\
&\qquad + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1 - \cdots}{w_{n-2}} \right\rfloor (v_{n-2} - w_{n-2} \rho_n - w_{n-2}(\rho_{n-1} - \rho_n)) \\
&\qquad + (b - w_{n-1} + 1)(\rho_{n-1} - \rho_n) + (b - w_n + 1) \rho_n \\
&\quad = \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor (v_1 - w_1 \rho_{n-1}) + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1}{w_2} \right\rfloor (v_2 - w_2 \rho_{n-1}) + \cdots \\
&\qquad + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1 - \cdots}{w_{n-2}} \right\rfloor (v_{n-2} - w_{n-2} \rho_{n-1}) \\
&\qquad + (b - w_{n-1} + 1)(\rho_{n-1} - \rho_n) + (b - w_n + 1) \rho_n \\
&\quad \cdots \\
&\quad \geq \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor (v_1 - w_1 \rho_3) + \left\lfloor \frac{b - \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor w_1}{w_2} \right\rfloor (v_2 - w_2 \rho_3) \\
&\qquad + (b - w_3 + 1)(\rho_3 - \rho_4) + \cdots + (b - w_{n-1} + 1)(\rho_{n-1} - \rho_n) \\
&\qquad + (b - w_n + 1) \rho_n \\
&\quad \geq \left\lfloor \frac{b}{w_1} \right\rfloor (v_1 - w_1 \rho_2) + (b - w_2 + 1)(\rho_2 - \rho_3) + \cdots \\
&\qquad + (b - w_{n-1} + 1)(\rho_{n-1} - \rho_n) + (b - w_n + 1) \rho_n \\
&\quad \geq (b - w_1 + 1)(\rho_1 - \rho_2) + (b - w_2 + 1)(\rho_2 - \rho_3) + \cdots \\
&\qquad + (b - w_{n-1} + 1)(\rho_{n-1} - \rho_n) + (b - w_n + 1) \rho_n \\
&\quad = (b - w_1 + 1) \rho_1 + (w_1 - w_2) \rho_2 + \cdots + (w_{n-1} - w_n) \rho_n.
\end{aligned}
$$

この最終式が $\geq b\rho_2$ として, (6) を得る. ∎