デカルトの數學

武隈良一

數學の歴史を繙くとき特に重要な時期が二つ見出される。一つはギリシャの紀元前四世紀であつて、他の一つは西洋の十七世紀である。

一つの世紀が凡ての人間知性の發展に於て最大であつたということは輕々しく言えないとしても、數學に於て十七世紀の如くデカルト、パスカル、フェルマー（Fermat）ニュートン、ライプニッツ等々の卓越した學者が多數の寄與をなしたというような世紀は稀である。加之これらの學者がたんに數學のみをその研究の對象とすることなく、或は哲學者として或は科學者、宗教家としても優れた人物であつたということは、十七世紀に於ける數學が他の文化一般と密接な關連を有していたことを意味する。これは當時の學問が未だ分化し專門化しておらなかつた爲で、今にして思えば當時のヨーロッパ的學問に於ては數學・自然學（科學）・形而上學（哲學）の三者が渾然と融和しておつたのである。そしてこれらが後年純粹數學の成立とともに明確に分化したことは科學史及び哲學史の教える處である。即ち數學がその核心に含まれているという點にヨーロッパ的學問の根本的性格を窺い知ることが出來るのである。

實際數學をその內容だけから見れば十八世紀、十九、二十世紀と順次長足の進歩をなしてはいるが、文化一般とい

う立場から見れば數學の十七世紀に於ける地位は他の世紀と比較にならぬ程重要であり、この時代に於ける思惟が一先ず範を數學にとつている處に十七世紀文化一般の性格が窺われるというものである。

それ故數學的世紀とさえ言われるこの時代の數學に一通りの關心をもつことは凡ゆる良識にとつて必須のことに思われる。

然らば十七世紀の數學とは何か。いまそれらを大別すれば左の如く

デカルトとフェルマーによる解析幾何學
パスカルとフェルマーによる確率論
フェルマーの整數論
ニュートンとライプニッツによる微分積分學
ライプニッツの記號論理

となるが、これらと共に記憶さるべきは、ガリレオ及びニュートンによる力學であろう。これらの凡てに就て概觀的な敍述を試みることは筆者の夙に意圖するところであるが、それは姑く措くとして、今はデカルトの數學に就てのみ述べることゝしよう。

一、方　法

數學史に於てデカルトと言えば解析幾何學の創始者として著名であるが、哲學史に於ては近世哲學の祖としてさらに著名である。しかも「我思う故に我あり。」の言葉で人口に膾炙しているデカルトは普通に哲學者としてのみ認められている傾きがある。然し果して彼デカルトは今日いうところの狹義の哲學者としてのみの存在であつたろうか。事

實はむしろ否定的である。

デカルトが一六一二年にラ・フレーシュ La Fleche の學校を出てから、ストックホルムにその生涯の幕を閉じるまで三十八年間の知的活動は公平に見て狹い意味の哲學よりもむしろ數學や自然學の方面に、より多く向けられたと言つて差支えないであろう。一六三七年彼が四十一歳で始めて「方法敍說」を公にするまでの間は、一六二九年にオランダのフラネケル（Franeker）で一時形而上學的思索に耽つたのを除いて、專ら數學や自然研究に從つていたことはよく知られており、又それ以後形而上學的著作や論爭のかたわらも、自然學的興味を決して失つていなかつたことを窺い知ることが出來る。更に哲學という言葉も決して狹義に解されていないことは彼の「哲學の原理」の序文にも明らかである。

「まずこの哲學という言葉は知識の探求という意味です。この知識というのは日常の智慧というだけではなく、人の知り得べきあらゆることがらについて知り盡すということでもあり、これは、生活の指針、健康の保持、技術の發明が目的です。」

またマルブランシュ（Malebrenche）が「形而上學者としてのデカルト」よりも「科學者（savant）としてのデカルト」を尊敬したのも、たんに彼がこの先達に形而上學に共感できぬ點があつたためではなく、むしろ當時一般文化人の受入れ方でもあつたのである。

かくデカルトの自然學の業蹟は偉大ではあるが、その内容は勿論今日の科學からみて誤謬が少くない。實際デカルトが各種の著作に於て說いた物質元素の說、宇宙生成論、地球物理學的考察、氣象や光學現象に關する種々の研究、更に人體の解剖や生理に關する觀察や說明等々は、現代の自然科學から見て妥當を缺くところがあり、單に科學史上古典的價値を有するに止まるといえよう。然し誤謬は誤謬として、プラトンの「ティマイオス」とは異なつた意味で今

日これらを讀返して見ることは決して無意義ではない。

というのは昔の發見や舊い學說が新しい研究によつて置き換えられて行くことは當然であり、我々が過去の科學者から學ぶものは、そうした追越された個々の研究や成果ではなく、彼等の研究態度及び科學精神が如何にその作品のなかに躍動していたかを知ることとである。このことは殊にデカルトのように自然科學者としては、未だ自然哲學の領域を完全に離脫しておらなかつた人の場合に、殊更强調されなければならない。

今日我々はデカルトの方法を端的に知るために彼の著書「方法敍說」を讀むが、その際附錄の三つの試論「屈折光學」「氣象學」「幾何學」は切離されて省りみられないのが普通である。然し元來「方法敍說」は三つの試論の稿が成つた後に添えられた序說であつて、當時の人は三つの試論とともに之を讀んだものである。デカルトの研究態度、廣い意味で方法を知るためには「方法敍說」だけで十分かも知れぬが、デカルトとしては自己の方法が諸學に如何に適用されるかを示すものとして三つの試論とともに世に問うた處である。題して「理性を正しく導き、もろ〳〵の學問において眞理を求めるための方法敍說」と稱する所以である。

屈折光學と氣象學については姑く措くとして、幾何學は今日の立場から見ても瑕瑾少なく、數學書としての存在價値は失われておらない。デカルトの數學に關する文献は彼の全集に於ても可成りの部分を占めているが、その核心は矢張りこの幾何學である。同書の精讀は數學を通してデカルトの方法を理解するという點に於て、また解析幾何をその原型に於て生々しく修得するという點に於て、何人にも必須のことに思われる。その內容は後に仔細に述べることゝし、今は幾何學執筆に到る迄に得られたデカルトの方法を「方法敍說」及び「精神指導の規則」により跡付けて見よう。

デカルトの學問はラ・フレーシュの學校に於ける、書物による學問によつて始められた。彼は教えられるものだけで

は飽き足らなくあらゆる書物を讀み、諸國語、雄辯術、數學、道德、神學、哲學、法學、醫學を修得した。その中の數學に對しては次のように回想している。

「私はとりわけ數學が好きであつた。それは數學のもつ理論と確實と明白の故である。然しまだその眞の用法を少しも悟つてはいなかつた。そうして數學は機械的な應用技術にのみ役立つものと思い勝ちであつたが、その根抵が極めて堅固であり、極めて確實であることを知つたとき、この上になお一層高いものが何一つ打建てられていないのを見て驚嘆したのである。（方法敍說第一部）」と述べているが、これは後年デカルトの哲學に於て數學的思惟が重要な役割を果すであろうことを暗示している。

然し學問は書物によるだけでは十分でないと知つた彼はその理由を明らかにした後、

「先生たちの監督を離れてもよい年齡に達するや否や、私は書物による學問を全くやめてしまつた。そうして私自身のうちに、或は世間（monde）という大きな書物のうちに見出されうるであろう學問の外は、如何なる學問にしろ最早求めまいと決心した。（方法敍說第一部）」

そうして旅行をしたり宮廷に出入したり、又軍隊に入つたりして廣く世間を見ているうちに、「ある日のこと、私自身によつて本氣に研究しよう、そうして辿るべき道を選ぶために私の精神の全力を盡くそうと私は堅く決心したのである。（方法敍說第一部）」

「そのころ戰爭（三十年戰爭）がまだ濟んでいなかつたので私は從軍して獨逸にいた。皇帝の戴冠式が終つて軍隊へ歸えつたとき、恰度冬の初めで或る村に屯營した。そこでは私の氣を紛わせるような隣人もなく、その上幸いなことには、私を惱ますような何の不安も何の欲念もおこらなかつたので、終日たゞひとり爐のある部屋にとじこもり、ゆつくり落ちついて樣々の思索に耽つたのであつた。（方法敍說第二部冒頭）」このような境遇にあつて、獨り想を練

り、デカルトは有名な四つの綱領に達したのであるが、それは舊來の學問に對するきびしい批判を通して得られたものである。「私がまだ若かつた頃（二三歳）哲學の部面に於ては論理學、また數學の部面に於ては幾何學者の解析と代數學を少し許り學んだ。これら三つの技術あるいは學問は、私の計畫に力を添えるに違いないと思つたのである。然しこれらのものを仔細に見ると、論理學についていえば、その推理式及びその大部分の教則は、自分の知らぬことを學ぶに有用であるよりは、むしろ自分の知ることを他人に説明するために、あるいはルユル（Raimundus Lullus (1234—1315)の術の如く、自分の知らぬことを判別することなく語るに有用であると氣ずいた。（方法敍說、第二部）」

かくしてギリシャ的なたんなる論證のための論理學ではなく、新時代にふさわしい、發見のための論理學が求められねばならぬが、當時の數學は如何なるものであつたであろうか。

「次に、また古代人の解析や近代人の代數學についていえば、いづれも非常に抽象的な事柄の上に廣がるだけで、何の用をもなさぬように見える許りでなく、前者はつねに圖形の考察にのみ限られるために、想像力を非常に疲らせることなしに理解力を鍛錬することができない。また後者に於ても、若干の規則や若干の記號に盲從させられるために、人はこれを以て精神を陶冶する學問とはせず、精神を惱ますばかりの、混雜した判りにくい技術とした。（方法敍說、第二部）」

デカルトから見れば在來の數學は抽象的にして無用であることがその缺陷であつた。從て具體的なものに結びついた有用な數學が望まれたのである。

「こういうことが、これら三つの學問の長所を含みながら、かゝる缺陷から免れているような、何か他の方法を探さなければならぬと、私に考えさせた譯であつた。（方法敍說、第二部）」

かくして彼は認識についての獨自の方法にたどりつき、周知の四つの綱領を掲げたのである。

「論理學を構成させた多くの敎則の代りに、守ることを唯一度も怠らぬという堅固一徹な決心を有するとしたら、次の四つのもので十分であると私は考えた。

第一は、明らかに眞であると認めることなしに、如何なる事も眞であると受入れぬこと。即ちよく注意して速斷と偏見とを避けること、そうして疑われそうな如何なる隙もないまで私の心のうちに極めて明らかに（clairement）、極めて判然と（distinctment）あらわれるものの外は、何ものをも私の判斷に取り入れぬこと。

第二は、私の研究しようとする問題の各々をできるだけ多くの、そうして、より良き解決のために必要とせられるだけ小部分に分割すること。

第三は、私の思想を順序に從つて導くということ。知るに最も單純であり最も容易であるものから始めて、最も複雜なものの認識へまで少し宛だん〱と登り行きながら、また本來ならば何んの順序もない場合にも順序をつけて考えながら、である。

最後には、何一つ自分は落さなかつたと確信する程の、完全な計算と、全般に亘つて餘すところのない再檢査とを、凡ての場合に於て試みること。（方法敍說、第二部）」

デカルトがこの四つの綱領を得るために、特に數學が役立つていることとは、これに續く彼の敍述からも明らかであろう。

「幾何學者らが、彼らの最も骨の折れた證明に辿りつくために、つねに用い慣れた、實に單純で容易な、證明から證明への長い鎖は、何かの折りに私にこんなことを考えさせたのである。人間に知られ得るようなものは、何から何までこれと同樣の仕方で連續しているのであろう。そうしてそれらのもののうち眞ならぬものを眞なるものとして決して受入れることなく、一から他を演繹するのに必要な順序を守りつゞけさえすれば、最後まで到達できない程遠く

にあるものも、發見できぬ程隱されているものも、決してあり得ないであろうと。………

そうしてこれまで學問のうちに眞理を尋ねたすべての人々の間で、幾つかの證明を、即ち幾つかの確實にして明白な理由を見出し得たのはひとり數學者だけであつたことを見れば、彼らの吟味したと同じものから始むべきであることを私は少しも疑わなかつたから。(方法敍說、第二部)」

この貴重な著想、即ち方法の精髓ともいうべきものは、「精神指導の規則」の第二則の說明のなかにも仔細に展開されてある。

こゝに注意すべきは、デカルトはすべての學問研究を數學のそれに還元しようとするのではないということである。それは數學に於てすべての命題が明證的直觀により把握できる連鎖的順序の中に連續的に排列せられるのと同じく、他の學問に於ける要素も同じ仕方で排列せらるべきであるというのである。

「これらすべてから結論すべきことは、實際たゞ數論と幾何學とのみを學ぶべしというのではなく、單に眞理への正道を求める者が、數論や幾何學の論證に等しい確實性を獲得できないような如何なる對象にも携わつてはならぬ、ということである。(精神指導の規則、第二則)」

然らばデカルトの幾何學は如何に形成されたであろうか。さきに述べた如く、ギリシヤ人の幾何學や近代人の代數學は學問の雛形としては尊重されたが、その抽象性と無用性の故に、特に幾何學では圖形の觀察のわずらわしさが、代數學では記號の處理の無論理性が批判された。それらに於ては眞理をうるための方法が缺け、或は故意に隱されている。それに對してデカルトは、

「事物の眞理を探求するには方法 (Methodus) が必要である。(精神指導の規則、第四則)」と叫ぶ。

「私が方法というのは、確實な容易な規則、それを正確に守る人は誰でも、虚僞を眞理として認めるようなことは決してなく、精神の努力を無益に費さずつねに次第に知識を増しつつ、その達し得られる限りの事物の眞の認識に到達する如き規則である。（同、第四則）」

ところで數學に於て多くの優れた業蹟をあげたギリシャ人は果して方法を所持しておらなかつたであろうか。デカルトはそれは當然所持しておつたと思うが、故意に隱していたのではないかと推測した。

「さてこの方法の効用は、それなくして學問研究に携わることは益よりも害が多いと思われる位に、大きいのであるから、すぐれた精神は既に以前から、明かにたゞ自然の導きのみによつて、この方法を或る仕方で心得ていたということを私は躊躇なく信ずるものである。實に人間精神は、何か知らぬが神的なものを有していて、その中には有益な思想の最初の種子が蒔かれており、屢々如何に捨ておかれ、また誤まつた研究によつて窒息させられていても、自然に果を結ぶものである。このことを我々は、最も容易な學問即ち數論と幾何學とに於て認める。というのは昔の幾何學者がある種の解析を用いており、それを後世の人には意地惡く隱してはおいたものの、事實すべての問題の解決に廣く應用していたことが、十分に認められるからである。そして現在、數論の一種、代數學と呼ばれるものが世に行われているが、その目指すところは、古人が圖形について爲したことを數について實行することなのである。（同、第四則）」

然るにこれらの數學に於ては、方法が明らかにされていない。數學の內容を克明に讀みとつても方法を窺い知ることが出來ないのである。

「私は彼等の書物（數學書）に於て數に關して多くのことを讀み、それは計算してみると眞であると分つたし、また圖形についても彼等は多くのことを、眼そのものには或る仕方で明かに示し、且つ何等かの正しい推論によつて結

論してはいるけれども、何故それはそうなるのか、それはどうして發見されたかということを、精神そのものには十分明瞭に示してくれぬと思われたのである。それで才能と學識とをそなえた人々の大多數が、この學問を味わつた後、それを兒戯に類する空しきこととして直に捨てさつたり、または反對に極めて困難な繁雜なものと考えて、やりかけのところでもうその學習から遠ざかつたりするのを見ても、私は驚かなかつた。何んとなれば、實際は單なる數や想像上の圖形に熱心に携わつて、さような詰らぬものの認識に甘んじようとするかに見えるほど、空しいことはないからである。(同、第四則)」

これと同樣なことはパスカルも言つている。古人が問題の解答のみを示してそこに辿りついた經路を教えてくれないのは、恰も古人が我々にこの知識を得させるのを嫉んでいるかのようである、といつてパスカルは歎息し、彼自身は自己の思考過程を忠實に記録した論文を發表した。然し結局のところ、パスカルにとつては、數學は精神の遊戯としての存在でしかなかつた。デカルトに於ては數學に於ける方法の發見が問題であり、こゝで結論を先きにいうならば、それが解析幾何學の發見として實を結んだのである。

「私は、その後、嘗て哲學の創始者たちが數學(Mathesis)に通ぜぬ者には智慧の研究に入ることを許さず、恰もこの學問が何よりも容易であつて他のより高い學問の把握のために精神を形成し準備するに最も必要である、と思つていたかの如くに見えるのは、一體何故であるかと考えてみた。そしてその時私ははつきり氣付いた、彼等は我々の時代の數學とは全く異なつた或數學を知つていたということを。(同、第四則)」

或數學即ち眞の數學(方法を有する數學)を完全ではないとしても、それを確かに知つていたギリシヤ人はそれを故意に隱蔽したが、漸次それは近代人の代數學のなかに再生されつゝあつたのである。これをデカルトは次の如くに言つている。

「さて、最後に、知力秀でた人々が現われて、今の時代にも、かの方法を復興しようと努力した。というのは、外來の名で代數學（Algebra）と呼ばれている方法は、それの背負わされている多くの數字や不明瞭な圖形を除くことが出來て、我々が眞の數學が具備すべきものと考える明瞭さと容易さとを最早缺かないようにさえなれば、まさにかの方法に外ならないと、思われるからである。（同、第四則）」

代數學から數字の負擔を除くというのはヴイエタに始まつた文字代數學によることであり、また不明瞭な圖形を除くことは、ギリシヤ流の幾何學的代數を乘越えることである。デカルトの代數學への寄與が極めて大であつたことは彼の代數學の記號法とヴイエタ（Vieta）のそれとを比較すれば明らかである。かくデカルトは代數學の概念及び記號の改造から出發し、これを基礎として「幾何學」を構成したのであるが、彼の數學に於てはその進展のメカニズムは代數學であつた譯である。それは幾何學の方法と代數學のそれとの統一を豫想するとともに數學の普遍的性格の考察へと向うものである。

「こうした考えが私を導いて、數論や幾何學の特殊の研究から、數學の一般的な研究へと戻らせた。そこで私は先ず第一に、數學という名に凡ての人は正確に何を意味せしめているか、また何故に、上述の二つの學問のみならず、天文學、音樂、光學、力學その他多くの學問が、數學（Mathematica）の部分であるといわれるか、を探ねた。實際この點についてはこの語の起原を考察するだけでは十分でないのである。というのは數學（Mathesis）なる語はたゞ學問(disciplina, science)というだけの意味である以上、他の學問も幾何學自身と同じく數學（Mathematica）と呼ばれる權利をもつからである。しかし一方我々の見るところ、ほんの少しでも學問をしたことのある人なら殆ど誰でも、示される事物のどれが數學に屬し、どれが他の學問に屬するかをたやすく區別するのである。そしてこの點を更に注意深く考察するなら人はついに次のことに氣付くであろう。即ち、秩序(ordo)或は計量的關係(mensura)の研究せられる

すべての事物しかも唯それのみが、數學に關係し、且そういう計量的關係が、數に於て或は圖形に於て或は量に於て或は音に於てまた其他の如何なる對象に於て求められるかは、問題でないと、いうこと。從つて何等特殊な質料に關わりなく、秩序と計量的關係とについて求められ得るすべてのことを、說明するところの或學問がなければならぬこと。且つそれは外來の名を以てでなく既に古くから慣用されている名を以て、普遍數學（Mathesis universalis）と呼ばるべきであること。（同、第四則）」

ギリシヤに於て、數學とは學ばるべきものという意味であり、その內容は秩序及び計量的關係の研究であるという。そもそもギリシヤ人にとつては動くものは實在ではなかつた。變化するものもまた然りであつて、運動變化を通じて不變恒常なものこそ眞の存在であつた。動くものに就ては、つねに變らない動き方、例えば天體の運行法則という如きものが眞の實在であつた。動いているものは論理的に物として捉えることが出來ない。論理的に捉えられるものは何時も靜止している。そうした見地からギリシヤの數學は靜的（statical）ということが出來る。しかも靜的に出來上つた形を、それを組立てゝいる處の要素の調和的な組織として見るという靜的な見方がギリシヤ數學の特色である。

從つてピタゴラスの言葉として傳えられているように、存在は數である。即ち數學は實在の學である。そこに於て調和のとれたものは、數の關係に於ける比例である。この世界の原理、世界の根源は比例であるというのである。ユークリッドのエレメンツに於ける重部な部分といわれる比例論はそうした世界觀的意義を有するものである。即ちギリシヤの數學の中心は比例論であると言われる譯である。これはデカルトの場合にも次の如く强調されている。

「私は人が一般に數學と名づけるこれらの學問の一つ一つを苦勞して學ぼうと企てたわけではない。そうしてこれらの學問は、それの向う對象こそ異なつてはいるが、對象の間に存在するさまざまの關係、或はさまざまの比例のごときものの外は注目せぬという點で、すべて完全に一致せざるをえぬものである。よつて私は考えた——唯それらの

關係を一般的に、次のようにしながら研究した方がよいと。即ちそのものの認識をそれがために一層容易にしてくれるようなものにおいてゞなければ、こゝにいう關係を假定せぬようにし、しかもなお斯る關係をこういう場合にのみ強いて局限することのないようにしながら、そうすれば、その後に於て、かゝる關係が自ら適切にあてはまるような他の凡ての事にそれだけ一層よく應用できるからと。更にまたそれらの關係を認識するためには、それらを時には各々個別的に考え、時には單に記憶にとゞめ、或は若干個數まとめて理解するということなどの必要があると氣づいたので、こうも考えた。——それらを個別的に一層よく考究するためには、これらを種々の線に於て想定すべきであると。何故なら、私はかゝるもの以上に單純なものを見出さなかつたし、かゝるもの以上に明晰に私の構像と感覺とに對して表象しうるものを見出さなかつたから。しかしそれらの關係を記憶に止め、或は若干個數まとめて理解するためには、出來る限り簡單な數種の記號を以てこれを明らかにする必要があると。私はかゝる仕方で作圖的解析及び代數學の凡ての長所を借り、一方の缺點は凡て他方によつて訂正することにしようと。（方法敍說、第二部）」

かく比例の考察がデカルトにとつても重要であつた。また最後に述べているように幾何學と代數學との融合が試みられ、これが彼の「幾何學」となつてあらわれた次第である。右文のなかで「一つを取扱うときは線として考え多くのものを取扱うときは記號であらわす。」というのは意味不明であるが、一次元の考察をするときは幾何學的に直線上で考え、二次元以上の考察をするときは座標に分けて考える、という意味にとれば解析幾何學の主旨を述べていると見ることが出來る。然しこの解釋が妥當であるかどうかは今暫く吟味の餘地がある。そのためには「精神指導の規則」を更に通讀して見なければならず、また「方法敍說」に於ける比例と「精神指導の規則」に於ける秩序或は計量的關係とは如何なる連關を有するかという問題も起つてくるが、それらは玆に省略することにする。

ギリシヤの數學とデカルトの數學が共に比例を重視したという點に於ては共通であるが、前者は之を靜的に眺め後

者はこれを動的に活用したという點が異なる。即ち數學の本質的對象が比例であるという點に於ては同じであつたが、その取扱い方が異なつているのである。デカルトの場合には運動變化そのものを認識する、運動變化の構造を明にするのが數學の目的である。從つて飽く迄動くところのものを捉えるような數學でなければならない。それが曲線の方程式を求める解析幾何學となつてあらわれたのである。これがギリシヤの數學が靜的であるというのに對して、デカルトに始まる近世數學が動的（mechanical）であるといわれる所以である。

近世數學がデカルトに始まつて、ニュートン、ライプニッツと續くその樣相が動的であつたという仔細を玆に明らかにすることは出來ないが、今はデカルトの數學が、彼自身の方法により巧妙に建設され、それは動的であつたというだけで滿足しておこう。

若しも十七世紀の數學書から二冊を選ぶならば、デカルトの「幾何學」とニュートンの「プリンシピヤ」であるといわれているのであるが前者に就て今一通り概觀しておくことは、デカルトの方法を側面から知る上に於ても、またその方法が如何に數學に應用されたかを知る上に於ても、有益なことゝ思われるので次節に於てこれを試みることゝしよう。

二、幾何學

デカルトの「幾何學」は三卷よりなる。その第一卷は「圓と直線のみを用いて作圖することのできる問題について」と題され、解析幾何學の基本思想と「パッポス Pappus の問題」の解法が中心となつている。第一卷は次の言葉で始まる。

「幾何學のすべての問題は、結局作圖のために或るいくつかの直線の長さを知ることだけが必要であるということ

に容易に歸着することができる。

算術が四つまたは五つだけの演算、即ち加法減法乘法除法及び冪根を求めること——これは一種の除法とも見られる——から組みたてられているのと同じく、幾何學では求める線分を見出すには、他の線分を加えたり或は引いたり或は一つの線分——これを數にできるだけ密接に關係づけるために單位と名付けることにするが、これは一般に任意に選ぶことができる——及び他の二つの線分が與えられたとき、更にもう一つの第四の線分を見出して、これが今の二線分の一つに對する比が、もう一つが單位に對する比になるようにすること、これは乘法と同じである。或はまた第四の線分を、これが今の二線分の一つに對する比が、單位がもう一つの線分に對する比になるように見出すこと、これは除法と同じである。更にまた單位と他の線分との間に一つまたは二つまたは若干の比例中項を求めること、これは平方根や立方根等々を求めるのと同じである。以上のことだけをすればよい。それ故分り易くするために私は算術の術語を幾何學に導入することを躊躇しないであろう。」

續いて線分の間にそれら演算を施す方法が簡明に述べられてあり、乘法と除法と平方根の作圖の仕方が圖示されてある。これらは既にギリシャ時代に於て知られたものであるが、デカルトの創見といわれる點は單位の導入であつて、これにより算術的代數的演算と幾何學的作圖との間に完全な平行性が打ちたてられたのである。即ちこれまで二線分の積といえば面積、三線分の積といえば體積を意味し、それ以上に對しては格好のモデルを考えることが出來ないという不便に對して、デカルトは線分の積はまた線分で表わすという利便を與えた。これは正に劃期的な思想であつた。これを次の如く述べている。

「a^2とかa^3とか、または同様のものによつて、私は通常全く單純な線分しか考えない、代數學で慣用されている名稱を用いるために、私はそれらを平方とか立方とか等々という名稱で呼ぶけれども。」

このように線分の長さと代數學に於ける量との間に對應をつけたのち、問題を如何に解くか、その一般的方法を次のように述べている。

「ある問題を解こうと欲するならば、先ずその問題が既に解かれたものと考え、而てそれの作圖に必要と思われるすべての線に名稱を與える、未知のものにも既知のものにも。次に既知の線分と未知の線分との間に何らの區別をも考慮することなく、これらの線が互いに關係しあつている有樣を最も自然に示す順序に從つて、その問題の困難さを取調べ一つの同じ量を二つの仕方で表わしうる手段を見出すまで努めなければならない。この結果は一つの方程式と名付けられる。何故ならこの二つの仕方の一方の諸項は他方のそれに等しいからである。」

このデカルトの文章の意味は、問題を分析して未知數を含む方程式に歸着させるということである。勿論ここにはまだ變數とか函數の思想は表われていないが「未知の線と考えられるだけの數の方程式を我々は見出さなければならない。」と注意深く述べている。かくの如く問題を分析し、方程式に歸着させ、更にそれを解いて未知數を求める。これが方法敍説に於ける綱領第二、即ち分析の段階であろう。次にこれを基礎として幾何學的作圖を行い求める線分を作り出す、これが綱領第三の綜合の段階ということが出來よう。

次に「平面的作圖とは何にか」に就て述べ、二次方程式の解法を示している。その幾何學的作圖は今日我々の學ぶものと同じであるが、デカルトに於ては負根が無視され、且方程式の係數が負の場合については觸れられておらない。これはギリシヤの幾何學的代數が改革者デカルトになおその影響を及ぼしていることを物語るものである。然しデカルトは普通の幾何學即ち現代の初等幾何學に屬する作圖題はすべて今までに述べた作圖を組合わせることによつて解かれることに注意し、「このことは古代の人々が氣附いていたとは私は信じない。何故なら若し氣附いていたとすれば、命題の順序を見ただけでも古代の人々が凡ての命題を見出す眞の方法を持つていなかつたことを知らせるよう

な、また偶然に見出されたものを念入りに集めただけだということを知らせるような部厚な本をあんなに骨折つて書くことはしなかつたであろうから。」と言つているのは注目に値する。

さてこれ迄の考察にはまだ本格的な解析幾何學的なものは出ていない。いわば代數方程式の解法に對應する幾何學的作圖が與えられているばかりである。我々にとつて重要な場合は方程式の數が未知の線の數より少ないときである。この場合には一問題は完全に決定されないという證據になる。そうしたときにはどの方程式にも對應しない未知線分を任意に既知線分にとることが出來る。そうした後にも……。」等々と述べているが、これは解が不定になる問題の解き方を示しているのである。こゝに始めてデカルトによる解析幾何學の威力が發揮されるのであつて、彼は自己のこの方法を以てパッポスの問題を解決したことを誇らしげに語つている。パッポスの問題というのは現代式に述べれば次の如くである。

「$l+m$個の定直線が與えられたとき、一點cよりその各々と夫々與えられた角をなす線分を引き、その中l個の定直線に到る線分の積と、他のm個に到る線分の積との比が與えられた常數cに等しくなるようにすれば、その點の軌跡如何。

デカルトはこの問題に明快な解説を與えている。先ず與えられた直線の一つと引かるべき直線の一つを規準にとりこれを主要線（ligne principal）と考え、これに他のすべての直線を關係づけた。即ち今日の斜交軸を主要線と名付けたのである。これを用いてパッポスの問題を如何に解いたかを述べたいのであるが、本誌に於ては印刷の關係上止むなく省略することゝする。デカルトは「更に線分yに無限個の相異なる値を逐次にとれば、それに對して線分xにも無限個の値が見出され、かくしてcとあらわされる如き無限個の異なる點が得られ、これによつて求める曲線を描くことができる。」

と結論をあたえているが、一方の未知量の變化に應じて他方の未知量の値が變つていくというこの動的對應を統一的にとらえる手段として座標が有力な役割を果しているのである。デカルトの圖解のなかには横軸はあるが、縦軸そのものはなく、今日から見れば不十分ではあるが、それにしても坐標の方法が明確に示されているのである。即ちデカルトによつて始めて、平面曲線とx、yの方程式との間に一對一の對應がつけられたのであつて、これにより曲線の有する幾何學的性質と方程式の代數的乃至解析的性質との間に對應がつけられたのである。

第二卷は「曲線の性質について」と題され、こゝでは曲線の、これを表示する方程式の次數による系統的な分類がなされている。先ずギリシヤ幾何學の批判から第二卷は始まる。

「古代の人々は幾何學の作圖題に於て或るものは平面的であり、或るものは立體的、或るものは線狀的であると區別した。即ち第一のものは直線及び圓のみを描くことによつて作圖され、第二のものの作圖には少くとも圓錐曲線を必要とし、第三のものに對しては更に複雜な曲線を用いなければ作圖できない。然し彼らがこれらの複雜な曲線をそれ以上に分類しなかつたことは私の驚くところであり、またそれらを幾何學的と呼ばずに機械學的と呼んだことは、私の理解し難いところである。何んとなれば、それらを描くのに何らかの器械を用いる必要があるからであるというのならば、同じ理由によつて圓や直線をも斥けなければならないであろう。何故ならそれらを紙の上に描くのにコンパスや定規を用いねばならず、それらも器械と名付けられるからである。」

こゝに記されている如く、古代人は作圖題及び曲線を三つに分類した。即ち、直線及び圓を平面的曲線、圓錐曲線を立體的曲線、その他の曲線をたゞ線狀的曲線と呼んだ。またデカルトは器具の使用をできるだけ幾何學から避けようとしたプラトンによる幾何學觀を強く批判し、器械が描きだす曲線はやはり幾何學の考察の對象たり得ると考え

た。而てデカルトは幾何學に於て取扱う曲線は如何なるものであり、且それらを如何に分類するかについて以下の如く述べている。

「私がこゝで導入しようとする凡ての曲線を描くには、唯次のこと以外は必要でない。即ち二つ又はそれ以上の直線が相互に動かすことが出來ることゝ、それらの交點が曲線を描くということである。」

かく一般の曲線を導入しているが、デカルトはそれに特別な制限を附した。それは今日の言葉でいえば代數曲線のみを許容し、超越曲線を許容しなかつたのである。即ちデカルトの曲線とは代數曲線のみを指し、彼はその分類を次の如く行つている。

「自然にあるがまゝのそれら凡ての曲線を考え、それらを順序に從つて分類するには、次のようにするのが最善である。即ち幾何學的と呼ばれうる曲線、換言すれば或る精密正確な法則に從う曲線の凡ての點は必ず一つの直線の凡ての點に對して或る關係をもち、この關係は凡ての點に對してたゞ或る一つの方程式によつて表わされる。そしてもしこの方程式が二つの不定な量の積またはそれらの平方の項以上のものを含まぬならば、その曲線は最も單純な第一類に屬する。それらのうちには圓、抛物線、双曲線及び楕圓だけが含まれている。然しもし方程式が二つの不定なる量――こゝで曲線上の一點が他の直線に對する關係を明らかにするには二つが必要である――の三次または四次の項、あるいはそのうちの一つの三次または四次の項を含むならば、その曲線は第二類に屬する。そして方程式が五次または六次であれば曲線は第三類に屬し、以下同樣に限りなく續く。」

この文章は稍々難解であるが、こゝに所謂解析幾何學の基本思想が述べられていると見ることが出來る。現代の言葉でいえば次の如くになる。

平面上に一つの定直線をとり、その上に原點と稱する一點 o を固定しておく。平面上の任意の點を p とすれば p の

位置は「一直線のすべての點に對する關係」によつて定まる。その關係を定めるにはpより定直線へ垂線pqを下しpより定直線までの距離即ちpqの長さ、及びoよりqまでの距離即ちoqの長さを以てすればよい。即ち

oq ＝ x, pq ＝ y

とすれば、點pの位置は二つの不定なる量、x及びyによつて定まる。pが或曲線上を動くならば、x、yは或る關係にあり、その關係は一つの方程式を以て表わされるであろう。デカルトが「幾何學的曲線」と稱したのは、その方程式がx、yの多項式となる場合で、現代の言葉でいえば、代數曲線に外ならない。その多項式の次數を以てデカルトは曲線を分類したのである。即ちその多項式の次數が一次または二次なるとき、曲線は第一類、三次または四次なるとき曲線は第二類、五次または六次なるとき曲線は第三類、………と分類したのである。

このように曲線を分類してから、個々の曲線の性質を研究し興味深い例題を與えている。その際既知量を表わすのに字母の最初のものa、b、cを用い、未知量を表わすのに終りのものx、y、z等を用いるのも、デカルトがこゝで始めて用いた方法である。またその解法の中に定直線及び定點の選び方を如何ようにしても、曲線の類は同じであると述べているが、これは現代の言葉でいえば座標の變換によつて曲線の次數が不變であることを意味するものである。

次にデカルトは「第一卷に示したパッポスの問題の説明のつづき」に就て詳論し、その解法を完結している。

さてデカルトが幾何學的曲線に與えた制限というのは次のものをいう。

「但し、曲線が一つの連續的運動によつて、又は相連續する多くの運動によつて、しかも後の運動がこれに先立つ運動によつて完全に規定されている如き運動によつて、描かれていると考え得るならばである。」

即ち互いに獨立な諸運動から合成される曲線は、諸運動の相互の獨立性の故に、これらの間に明晰判明な關係がな

いものとして排除されるのである。デカルトにとつては明確な關係によつて順次に結びつけられる一連の運動のみが許され、かゝる運動を彼は正則な連續運動（un mouvement régulier et continu）と稱した。從つて例えば螺旋や求積曲線（クアドラトリス）のような曲線は幾何學に屬しないものとした。何んとなれば「それらは二つの別々の運動によつて描かれると考えられ、これらの運動は正確に測り得る何らの關係をも互いに有してないからである。」

之を要するにデカルトは今日の言葉でいえば、超越曲線を斥けて代數曲線のみを幾何學的曲線としたのである。然し楕圓の作圖に紐を用いたり、又定角を保つ裝置を許していることは注目に値するであろう。

紐といえば、紐の如き曲線に對してデカルトは次の如き見解を有していた。「……紐のような曲線、即ちあるときは直線的であり、あるときは曲線的である如き曲線はそれが如何なるものであつても幾何學に受入れることは出來ない。何故なら直線と曲線との間にある比は知られていないからであり、そして又それは人間にとつて知られ得ぬものと信ずる。」

かくデカルトは曲線の求長問題を人智の圏外においたが、こゝでは積分學への通路は閉ざされたまゝの狀態である。またデカルトは

「曲線の直徑、軸、中心、及び曲線に對して他のものよりも特殊な關係や簡單な關係を有する直線を見出すこと、從つて曲線を描く方法を樣々に考え、その中から最も簡單なものを選び出すことは容易なことである。又この方法によつてのみ、この曲線が圍む面積を示す量を決定することが出來る。」と述べているが、こゝに平面曲線の圍む面積に關する考察の片鱗を窺うことが出來よう。デカルトは更に語をついで、「曲線上の任意の點に於て、これと直交する直線を引く方法が一般的に與えられた時に、曲線を決定するのに必要なものが悉く與えられたのであるという確信を持つようになつた。」と述べ曲線に法線を引く方法——今日では接線を引く方法——を圖解しているが、この方法

がフェルマーから反駁されたのを契機として、兩者の間に激しい論爭の起つたことは數學史上著名である。

第二卷に於ては更に、屈折光學に深い關係を有す　卵形線の分類が述べられ、最後に空間に於ける曲線に法線を引く方法が述べられているが今はその詳細を省略する。

第三卷の表題は「立體的、またはそれ以上の問題の作圖について。」とあるが、その意味は二次以上の方程式の解法に歸着する作圖題の取扱い方である。その爲に代數方程式の理論が先ず展開される。その大略の內容を箇條書きにすると、

方程式には幾個の根があり得るか
負根とは何か
方程式の次數の減らし方
一つの量が一つの根であることの檢證
方程式には幾個の正根があるか
方程式の正根を負根にしたり、負根を正根にしたりする方法
方程式の根の値を知ることなしに、その値を增減する方法
正根の値を增すことによつて負根の値を減らすこと及びその逆
方程式の第二項の除き方
方程式の負根を正根にし、しかも正根が負根にならないようにする方法
方程式のすべての係數が0でないようにする方法

根の値を知ることなく根に他の値を掛けたり割つたりする方法
方程式の半端な係數を整數に直す方法
方程式の項の一つを與えられた量に等しくする方法
正根及び負根は實又は虚になること

以上を基調として三次及び四次方程式の既約性を述べ、それらが二次方程式に分解される場合に就て詳論している。そしてパッポスの問題に之を應用している。パッポスの問題とは

「正方形ABCDと直線BN（NはBAの延長上にあり）とが與えられている。邊ADをEまで延長して、BEとCDとの交點をFとするとき、EFがBNに等しくなるようにせよ。」であつて、この問題を解くことは或る四次方程式の解法に歸着するというのである。

デカルトの方程式論は「方程式は未知量の次數と同數の異なる根を持つことが出來る。」という言葉から始まつているが、方程式の根の存在に就ては考察された形跡がない。これは後年ガウスによつて「代數方程式は少くとも一つの根を有す。」と解決されたものでそれは代數學の基本定理であるが、當時としては虚數の實體が不明瞭であつた爲、止むなきことゝいえよう。又「方程式の次數と根の數とが等しい」という説明も證明というには程遠いものがある。

又正根負根は眞根僞根などゝという言葉で呼ばれている程度で、負數をなお神秘的存在として取扱つている。

然し今日我々が「デカルトの符號の法則」と呼んでいるものは數學史上著名である。これは「二つの符號十と一とが交互に變つている度數と同數だけの正根があり、二つの符號十又は一が二つ續いているものの個數だけ負根がある」と述べられているが、デカルトは實根を有する代數方程式のみを考究していたのである。

更に第三卷に於ては五次以上の方程式が考えられ　それらが三次又は四次方程式に分解される場合について詳論されている。この場合に作圖題は立體的であるといい、之を解くのに拋物線を用いるというのである。その例題として二つの比例中項を求めること、一つの角を三等分すること、を掲げ凡ての立體的作圖題はこれら二つの作圖題に歸着すると述べている。

次に六次を越えない方程式に導かれる凡ての作圖題を作圖する一般の方法を二つの拋物線を用いることによつて圖解し、本書の數學的敍述を終えているが、最後にデカルトは次の言葉を以て卷を閉じている。

「私の意圖は大きな本をつくるのではなく、少い言葉のうちに多くの意味を含ませようと努めたのである。……私は後世の人達が、私がこゝに説明したことについてのみならず、私がこゝに説明しなかつたことについても、私に感謝してくれるであろうことを望む。それは彼らに自らそれらのことを發見する喜びを與えるためにわざとこうしたのであるから。」

（終り）

（後　記）

以上はデカルトのテクストを讀みながら書綴つたものである。「デカルトの數學」という大きな題目に對して、余りにも小さな研究であることをおそれるが、これを礎石として他日の完成を期したい。

参考文獻（草稿に際し實際に使用したものに限つておく。）

一、テクスト

方法敍說　Discours de la Méthode, texte et commentaire, par E. Gilson, Paris, 1925.

幾何學　La Geometry, Oeuvres de Descartes, tome VI, publiées par Adam et Tannery.

The Geometry of René Descartes, original text with English translation by Smith and Latham, Chicago, 1925.

精神指導の規則　Règles pour la direction de l' esprit, Oeuvres choisies, Garnier frères, Paris.

哲學の原理　Les principes de la philosophie, Oeuvres de Descartes, tome IX. publiées par Adam et Tannery.
デカルト選集、全六巻（創元社）

二、その他

R. S. Ball, A short history of mathematics. (1888)
D. E. Smith, History of Mathematics. I. II. (1925)
E. T Bell, Men of mathematics. (1937)
H. Wieleitner, Die Geburt der Moderne Mathematik　I. Analytische Geometrie. (1925)
P. Boutroux, L'idéal scientifique des mathématiciens. (1920)
朝永三十郎、デカート
野田又夫、デカルト
小倉金之助、數學史研究第一
近藤洋逸、近代數學史論
末綱恕一、數學と數學史
三宅剛一、學の形成と自然的世界
下村寅太郎、科學史の哲學