代数的数の有理数による近似に関する Roth の定理

武隈良一

序．4年に1度開かれる国際数学者会議は1958年にエジンバラにおいて催された。毎回この会議においては過去4年間における新人の優秀な業蹟が表彰されて Fields 賞が授与されるのが例である。今回は微分可能多様体のトポロジーの研究に対してフランスの René Thom に，そして代数的数の有理数による近似に関する研究に対してイギリスの K. F. Roth に与えられた。

ここでは後者のロスの業蹟について述べよう。そもそも無理数を有理数で近似的に表わそうとする問題はディオパントスの近似論として良く知られている。任意の無理数 θ に対して

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \tag{A}$$

を満足する既約分数 $\frac{p}{q}$ は無限に多く存在することは知られているが，この近似をさらに精密にできないものかと考えられてきた。これに対してロスは次の驚くべき結果を与えたのである。すなわち

θ が代数的数なるとき，その次数の如何にかかわらず

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\delta}} \tag{B}$$

を満足する既約分数 $\frac{p}{q}$ は有限個しか存在しない。ここに δ は任意に小さ

な正数を表わす。

これが何故驚くべき結果であるかといえば，(A) の右辺の分母 q の指数は当然 θ の次数 s に従属しているものと予想され，これまでに得られた幾多の結果もみなそうであったにもかかわらず，ロスは s に従属せずしかも簡単な形 $2+\delta$ で表わされると断定したからである。しかもその証明は高等な手段を用いず全く初等的であった（そのため幾分繁雑ではあるが）ことがさらに驚異であった。

このようにロスの定理はディオパントスの近似論における偉大な業蹟であるが，一方超越数の理論の側からも高く評価された。というのは (A) はリウヴィユの超越数につながる不等式であり，リウヴィユ，リンデマンなどによって始められた超越数の研究が今日著るしい進歩発展の途上にあるとき，ロスの定理はその側からも当然振返られるからである。

それ故ロスの定理がカッセル［1］とシュナイダー［8］の両著に述べられているのもあえて異としない。本稿においては後者によりロスの業蹟を述べていこう。

§1. リウヴィユの近似定理

リウヴィユが彼の論文［3］において注意したように，代数的数は確実な方法によって任意にすきなだけ有理数に近似させることは出来ない。彼はこの認識をもとにして次のような数を考えた。すなわち代数的数を有理数によって近似させるとき一定の近似可能性が保たれるので，これを破るような数，すなわち有理数による近似可能性がいまのものと矛盾するような数を考えた。これはもとより代数的数という訳にはいかない。かくして彼ははじめて代数的ではないある種の超越数をしめしたのである。

リウヴィユの代数的数の近似に関する結果は次のように言あらわせる。

定理1　(リウヴィユの定理) α が s (>1) 次の代数的数ならば，α にのみ関係する数 $c>0$ が存在して，次の不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{c}{q^s} \tag{1}$$

がすべての有理整数 p, q (q>0) に対して成立する。

証明. すべての $\frac{p}{q}$ に対して $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geqq\frac{1}{q}$ が正しければ, 定理は c=1 として主張されたことになる。それ故以下においては

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q} \tag{2}$$

と仮定して議論をすすめることができる。

いま有理数体に関する代数的数 α の共役数を $\alpha^{\{2\}}, \cdots\cdots, \alpha^{\{n\}}$ で表わし, 一定の自然数 q_0 を次の n−1 個の条件

$$\frac{1}{q_0}<\left|\alpha-\alpha^{\{\sigma\}}\right|, \ (\sigma=2,\cdots\cdots,s)$$

を満足するように選ぶ。しかるとき $q\geqq q_0$ と $\sigma=2,\cdots\cdots$, s に対して不等式

$$\frac{1}{q}<\left|\alpha-\alpha^{\{\sigma\}}\right|,$$

が成立し, 従って (2) を考慮すると

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\left|\alpha-\alpha^{\{\sigma\}}\right|$$

となりその結果

$$\left|\frac{p}{q}-\alpha^{\{\sigma\}}\right|\leqq\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|+\left|\alpha-\alpha^{\{\sigma\}}\right|<2\left|\alpha-\alpha^{\{\sigma\}}\right| \tag{3}$$

がすべての $\sigma=2,\cdots\cdots,s$ に対して成立する。

α の極小多項式 (この定義については §3 参照) を

$$G(x)=a_0(x-\alpha)(x-\alpha^{\{2\}})\cdots\cdots(x-\alpha^{\{s\}})$$
$$=a_0x^s+a_1x^{s-1}+\cdots\cdots+a_s$$

とおくと, $x=\frac{p}{q}$ に対して極小多項式は次の評価をあたえる。

$$\left|G\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|a_0\left(\frac{p}{q}-\alpha\right)\cdots\cdots\left(\frac{p}{q}-\alpha^{\{s\}}\right)\right|$$
$$=\left|a_0\left(\frac{p}{q}\right)^s+\cdots\cdots+a_s\right|\geqq\frac{1}{q^s} \tag{4}$$

何んとなれば G(x) の係数は有理整数にして，s>1 なるを以て $G\left(\frac{p}{q}\right)\neq 0$。

（それ故 (4) の第3式を通分したとき分子は1に等しいかそれ以上になる。）

(4) と (3) とから評価は次のようになる。まず (3) より

$$\left|\frac{p}{q}-\alpha^{\{2\}}\right|\cdots\cdots\cdots\cdots\left|\frac{p}{q}-\alpha^{\{s\}}\right|$$

$$<2^{s-1}\left|\alpha-\alpha^{\{2\}}\right|\cdots\cdots\left|\alpha-\alpha^{\{s\}}\right|$$

(4) より

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$$

$$\geqq\left\{\left|a_0\left(\frac{p}{q}-\alpha^{\{2\}}\right)\cdots\cdots\left(\frac{p}{q}-\alpha^{\{s\}}\right)\right|q^s\right\}^{-1}$$

なるを以て

$$>\left(\left|a_0\right|2^{s-1}\left|\alpha-\alpha^{\{2\}}\right|\cdots\cdots\left|\alpha-\alpha^{\{s\}}\right|q^s\right)^{-1}$$

となる。いま $c_1=|a_0|2^{s-1}|\alpha-\alpha^{\{2\}}|\cdots\cdots|\alpha-\alpha^{\{s\}}|)^{-1}$

とおけば

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{c_1}{q^s}$$

となる。従って (1) はすべての $q\geqq q_0$ に対して $c=\mathrm{Min}\,(1,c_1)$ を以て証明されたことになる。

残された有限個の $\frac{p}{q}$（それは $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q}$ にして $0<q<q_0$ を満足するもの）に対しては

$$c_2<\underset{(p,q)}{\mathrm{Min}}\left(q^s\cdot\left|\alpha-\frac{q}{p}\right|\right)$$

とおけば，結局すべての $\frac{p}{q}$ に対して (1) は $c=\mathrm{Min}(1,\ c_1,\ c_2)$ を以て証明されたことになる。

§2.　リウヴィユの超越数

既に注意したように定理1を基礎として超越数をつくることができる。即ち定理1の逆として直接次のようにいえる。

無理数 ξ に対して，一定の $s>1$ とすべての $p, q(q>0)$ に対して不等式 (1) が成立するような定数 $c>0$ が存在しないならば，ξ は s より小さい又は等しい次数の代数的数ではない。そして，すべての p, q $(q>0)$ に対して (1) が成立するような数の組 (c, s), $c>0$, $s>1$ が存在しないならば，ξ は必然的に超越数である。

このようにリウヴィユの定理を基礎としてつくられた超越数のことを**リウヴィユの数**という。

与えられた数がリウヴィユの数であるための十分条件は次の定理で与えられる。

定理 2.

$$\frac{p_n}{q_n},\ (n=1,2,\cdots\cdots),\ (p_n,\ q_n)=1,\ q>0$$

は有理整数の商の無限教列，

$$s_n,\ (n=1,\ 2,\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

は実数の数列で $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n=+\infty$ とする。

いま ξ が

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|\leqq\frac{1}{q_n^{s_n}} \tag{5}$$

を満足する無理数ならば，ξ はリウヴィユの数である。

証明．不等式 (1) が一定の s と一定の $c>0$ に対して，無限数列のすべての $\frac{p_n}{q_n}$ によって満足されないことが明らかである。

定理 2 を基礎として超越数をつくる目的のためには，不等式 (5) が満足されるように配慮しなければならない。

ここに簡単な例を一つ提供しよう。

$$\xi=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu!}}$$

とおけば，ξ の無理性は 2 進法展開における非周期性から導かれる。次に

$$\frac{p_n}{q_n}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2^{\nu!}}\ \text{とおけば}\ q_n=2^{n!}$$

となり，これより

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu!}}<\frac{2}{2^{(n+1)!}}=\frac{2}{q_n^{n+1}}\leqq\frac{1}{q_n^{n}}$$

となって定理2の仮定が $s_n=n$ として満足される。

この例は容易に一般化できる。ξ の 2 進法展開の代りに対応する表示として g 進法展開を考えてもよい。いま $g=10$ とおけば $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{10^{\nu!}}$ となるが，これは小数で表わされるリウヴィユ数である。

同様に正則連分数の形で定義されるリウヴィユ数の例が容易に与えられる。いま

$$\xi=[b_0,b_1,\cdots\cdots]=b_0+\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots$$

とし，ξ の第 n 近似分数の分母を B_n とすれば

$$\left|\xi-[b_0,\ b_1,\cdots\cdots,\ b_n]\right|<\frac{1}{b^{n+1}B_n^2}$$

なるを以て，$\lim_{k\to\infty}n_k=\infty$ なる自然数列 n_k が次の条件

$$b_{n_k+1}\geqq B_{n_k}^{n_k-2} \tag{6}$$

を満足するならば

$$\left|\xi-[b_0,\ b_1,\cdots\cdots,\ b_n]\right|<\frac{1}{B_{n_k}^{n_k}}$$

となり，ξ は定理2によりリウヴィユ数となる。我々は (6) を満足するものを作ることができるから，任意に多くのリウヴィユ数がつくられる。

リウヴィユ数をさらに広く作る可能性については，代数的数を有理数によって著るしく精密化する近似に関するリウヴィユの定理（これは後に詳論する）や，かかる精密化から超越数の生成についての広い可能性が与えられるまで，深入りしないでおこう。

§ 3.　リウヴィユの定理の一般化

リウヴィユの定理の精密化に入るまえに，2つの一般化を取扱う。元来リ

ウヴィユの定理は，0 を有理数 x に対する一次式の絶対値 $|\alpha-x|$ によって近似させることに関する陳述として理解される。従って次の2つの拡張が容易に考えられる。

第1は一次式を多項式によって，第2は有理数 x を代数的数によって置換えることである。

そのために二三の概念と補助定理を先立てよう。

α が代数的数であるというのは，有理係数の多項式 P(x) が存在して，α がその多項式の零点になっていることである。$x=\alpha$ に対して 0 となる有理係数の最低次の多項式にして，しかもその係数が全部有理整数で互に公約数がないとき，これを α の極小多項式という。極小多項式の次数は α の次数とし極小多項式の残りの根は α の共役根として表わされる。α の最高係数，すなわち α の極小多項式の x の最高巾の係数をときおり α の分母 (Nenner) という。これが ±1 に等しいとき α は代数的整数という。

多項式 $P(x)=\sum_{\sigma=0}^{s} a_\sigma x^{s-\sigma}$ の高さとは $H=\mathrm{Max}_{\sigma=0}^{s}|a_\sigma|$ を表わす。代数的数 α の高さ h とは α の極小多項式の高さをいう。α とその共役数全体の積を α のノルムといい $N(\alpha)$ で表わす。

代数的数の絶対値とその高さとの間の次の不等式は今後必要なものである。

補助定理1． α を代数的数，h をその高さ，a_0 を α の最高係数とすれば

$$|\alpha| \leqq \frac{h}{|a_0|}+1 \qquad (7)$$

が成立する。

証明．省略．

代数的数と代数的整数との間の関係については目下のところ次のこと丈が必要である。

補助定理2． α が代数的数にして a_0 が α の最高係数ならば，$a_0\alpha$ が代数的整数である。また $a_0\alpha^{\{\sigma\}}$，$(\sigma=2,\cdots\cdots,s)$ についても同様である。

証明．省略．

ノルムについては明らかに次の関係が成立する。

補助定理 3． α が代数的整数にして 0 でないならば $|N(\alpha)| \geqq 1$ が成立する。

さてリウヴィユの定理の第 1 の一般化として，$x-\alpha$ を α の多項式で置換えると次の定理が得られる。

定理 3． α を $s(\geqq 1)$ 次の代数的数，$P(x)$ を n 次の有理整係数多項式，H をその高さとし，$P(\alpha)$ は0 にならないものとする。しかるとき

$$|P(\alpha)| > \frac{c^n}{H^{s-1}} \tag{8}$$

が α にのみ関係する定数 $c>0$ に対して成立する。

（この定理は $n=1$ のとき明らかにリウヴィユの定理となる。）

証明は補助定理 1，2 を用いてなされるがここには省略しておく。

この定理 3 を用いて，リウヴィユの第 2 の一般化である，有理数 x を n 次の代数的数によって置換えた定理が次のように得られる。

定理 4． α を s次の代数的数，ξ を n 次の代数的数，H を ξ の高さとするならば，$\alpha \neq \xi$ に対して

$$\left|\alpha-\xi\right| > \frac{c_1{}^n}{H^s} \tag{9}$$

が α にのみ関係する定数 $c_1>0$ に対して成立する。

§ 4．一般化されたリウヴィユの定理の応用

定理 3 と定理 4 により再び超越数をつくることができる。ここでは定理 4 の応用として一例だけを報告しておこう。

定理 5． 函数 $F(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{)-1^{\nu}a_{\nu}x^{\nu}}{(\nu!)^{\nu!}}$

の実正零点は超越数である。ここに自然数 a_ν は，ある正数 B に対して $0<a_\nu<B^\nu$ を満足するものとする。

証明は計算がやや繁雑なので省略するが，大体の方針は次の通りである。い

まず $x=\chi$（代数的数）と仮定すれば，十分大きな m に対して

$$\left|F(\chi)-F_m(\chi)\right|<\frac{a_{m+1}(\chi)^{m+1}}{((m+1)!)^{(m+1)!}} \tag{12}$$

が成立する。そこで $F(\chi)$ が代数的数であると仮定すれば，定理4により $|F(\chi)-F_m(\chi)|$ の下限が与えられ，この下限は (12) と矛盾する。従って χ が代数的数であっても $F(\chi)$ は代数的数にはなり得ない。それ故特に $F(\chi)$ は代数的数 χ に対して 0 とはならない。

定理4において $\alpha=F(\chi)$，$\xi=F_m(\chi)$ とおいて実際に計算してみると

$$\frac{C_1^n}{H^s}>\frac{1}{C_4^m((m!)^{m!})^{2ns}}>\frac{a_{m+1}|\chi|^{m+1}}{((m+1)!)^{(m+1)!}}$$

になるというが，計算は相当繁雑である。そのさい次の補助定理が役立っている。

補助定理4． β を代数的整数，n をその次数，h を高さとするときを，$\operatorname*{Max}_{\nu=1}^{n}|\beta^{\{\nu\}}|$ を $|\overline{\beta}|$ で表わせば

$$h\leqq(2|\overline{\beta}|)^n$$

なる不等式が成立する。

§5. より精密な近似定理．Thue-Siegel-Roth の定理

リウヴィユの定理（定理1）の簡単な評価は深い考察により全く著るしく精密化された。ここではこれまでに得られた本質的な進歩だけを掲げよう。代数的数 α と有理数 x に対して一次式 $|\alpha-x|$ の下限を考えたとき，これを個別的にしめすと次のようになる。

定理． 次数 $s>1$ の代数的数 α と有理整数 p, q $(q>0)$ に対して不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<q^{-\mu} \tag{14}$$

は有理数 $\frac{p}{q}$ の有限個の解のみをもつ。

1. $\mu>\frac{s}{2}+1$ Thue [11] [12]
2. $\mu=\operatorname*{Min}_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{s}{\sigma+1}+\sigma\right)+\varepsilon<2\sqrt{s}$

ここに ε は十分小さな正数とす。Siegel [9]

3. $\mu > \sqrt{2s}$　　Dyson[2], Mahler [4], Schneider [7]

4. $\mu > 2$　　Roth [5]

F. K. Roth が最近公にした最後の結果は，指数 μ に関する最も精密な値を与えるもので，これが決定的なものである。

C. L. Siegel は上の2の場合に成功した後に，$\mu = \underset{s}{\mathrm{Min}}\,(\sigma\sqrt[\sigma]{s}) + \varepsilon < e\left(\log s + \frac{1}{2\log s}\right)$ に対して (14) は有理数 $\frac{p}{q}$ の有限個の解のみをもつか，又は不等式 (14) を満足する無限個の有理数解 $\frac{p}{q}$ があったとしても；その解 $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ を分母の大きくなっていく順に並べるとき，

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \frac{\log q_{\nu+1}}{\log q_\nu} = \infty \tag{15}$$

になることとを証明した [10]。さらにこの Siegel の定理は $\mu>2$ に対してもそのまま成立することが Schneider [6] によって証明された。つまり換言すれば，$\mu>2$ に対して (14) の解が無限にあったとしてもそれは非常に稀薄であることが知られていたのである。これを明確に無限解は存在しないと言切ったのが Roth の定理である。

さて Roth の定理を一般化した次の定理を述べておこう。

定理 6. α を次数 $s>1$ の代数的数とする。$\left(\frac{p_\nu^*}{q_\nu^*}\right)$ なる有理数の無限数列においては，p_ν^*，q_ν^* は有理整数にして，

$$q_{\nu+1}^* \geqq q_\nu^* > 0, \quad \nu = 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

また分母 q_ν^* は有理整数の積 $q_\nu^* = q_\nu' \cdot q_\nu''$ に分解され，q_ν'' は ν とは無関係な自然数 b の非負累乗を表わすものとする。いま

$$\eta = \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \frac{\log q'_\nu}{\log q_\nu^*} \tag{16}$$

とおき　　$\mu > \eta + 1$　　(17)

とすれば，次の不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q^{-\mu}$$

は数列 $\left(\frac{p_\nu^*}{q_\nu}\right)$ から取出される有限個の数 $\frac{p}{q}=\frac{p_\nu^*}{q_\nu^*}$ によってのみ満足される。

この定理において $\eta=1$ ならば，Roth の定理が得られる。従ってこの成り立ちからこれを Thue-Siegel-Roth の定理と名づけよう。

證明の準備として7つの補助定理（5から11まで）を以下に述べるがそれに附随していろいろな事項を附加えておこう。

第1段階. Roth の証明の本質的イデーは多変数多項式の新しい様式の非アルキメデス付値にある。

$P(x_1,\cdots\cdots,x_k)$ を k 変数 $x_1,\cdots\cdots,x_k$ の 0 と恒等ならざる多項式とす。さらに $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_k$ を任意の実数，$r_1,\cdots\cdots,r_k$ を任意の正数とす。いま $P(\alpha_1+y_1,\cdots\cdots,\alpha_k+y_k)$ を $y_1,\cdots\cdots,y_k$ の巾に従って展開すると

$$P(\alpha_1+y_1,\cdots\cdots,\alpha_k+y_k)$$

$$=\sum_{j_1=0}^{\infty}\cdots\cdots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_1\cdots\cdots j_k}y^{j_1}\cdots\cdots y_k^{j_k}$$

となる。いま

$$\textcircled{H}=\underset{\left(\substack{j_1,\cdots,j_k\\ C_{j_1\cdots j_k}\neq 0}\right)}{\mathrm{Min}}\left(\frac{j_1}{r_1}+\cdots\cdots+\frac{j_k}{r_k}\right)\tag{18}$$

とおくと，これは $C_{j_1\cdots j_k}$ が 0 ならざるすべての非負整数 $j_1,\cdots,j_k$ に対して作った $\frac{j_1}{r_1}+\cdots\cdots+\frac{i_k}{r_k}$ のうちの最小値である。

また $C_{j_1\cdots\cdots j_k}$ が 0 でないとき

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1}\cdots\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{j_k}P(\alpha_1\cdots\cdots,\alpha_k)$$

$$=\left[\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_k}P(x_1\cdots\cdots,x_k)}{\partial x_1^{j_1}\cdots\cdots\partial x_k^{j_k}}\right]_{(x_1,\cdots\cdots,x_k)=(\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_k)}\neq 0$$

である。(18) において定義された Ⓗ のことを Roth に従って多項式 $P(x_1\cdots\cdots,x_k)$ の点 $(\alpha_1\cdots\cdots,\alpha_k)$ における数 $r_1,\cdots\cdots r_k$ に関する**指数** (Index) とよぼう。

しかるとき明らかに多項式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{l_1}\cdots\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{l_k}P(x_1,\cdots\cdots,x_k)$$

の点 $(\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_k)$ における数 $r_1,\cdots\cdots,r_k$ に関する指数は少くとも

$$\Theta-\frac{l_1}{r_1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots-\frac{l_k}{r_k}$$

に等しい。ここに $l_1,\cdots\cdots,l_k$ は任意の非負整数にしてこの多項式の導函数は恒等的に 0 ではないものとする。

後に必要とする指数の性質は次の補助定理に含まれる。

補助定理5. $P(x_1,\cdots\cdots,x_k)$ と $Q(x_1,\cdots\cdots,x_k)$ は恒等的に 0 ならざる多項式にして $P+Q\not\equiv 0$ とす。いまこの2つの多項式の同じ点 $(\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_k)$ および同じ数 $r_1,\cdots\cdots,r_k$ に関する指数をつくると

$P(\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_k)\neq 0$ のとき　$\mathrm{Index}(P)\geqq 0$ なり　(19)

$$\mathrm{Index}(P+Q)\geqq \mathrm{Min}(\mathrm{Index}(P),\ \mathrm{Index}(Q)) \tag{20}$$

$$\mathrm{Index}(PQ)=\mathrm{Index}(P)+\mathrm{Index}(Q) \tag{21}$$

証明. (19) は明らかに成立する。次に P および Q の点 $(\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_k)$ における巾級数展開の係数を $C_{j_1\cdots\cdots j_k}$, $d_{j_1\cdots\cdots j_k}$ とおけば, (20) は次のようにいわれて成立する。即ち $C_{j_1\cdots\cdots j_k}=0$ にして $d_{j_1\cdots\cdots j_k}=0$ ならば $C_{j_1\cdots\cdots j_k}+d_{j_1\cdots\cdots j_k}=0$ となり, また一方両係数の少くとも一つが 0 でないならばその和は 0 とならない。(21) は, P と Q の指数をそれぞれ与える組 $(j_1,\cdots\cdots j_k)$ を2つ取出して, P, Q の両巾級数を掛合せると, 2つの組の和がまさに PQ の指数を与えることから分る。

第2段階. ここでは k 変数多項式の Wronski 行列式について述べておこう。次の形

$$D=\frac{1}{i_1!\cdots\cdots i_k!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1}\cdots\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{i_k} \tag{22}$$

の微分作用素を考え, $i_1+\cdots\cdots+i_k$ を作用素 D の次数とよぼう。l を自然数とし

$$\Phi_0(x_1,\cdots\cdots,x_k),\cdots\cdots,\ \Phi_{l-1}(x_1,\cdots\cdots,x_k)$$

を k 変数の多項式とする。また $D_0, \cdots\cdots, D_{l-1}$ を (22) の形の微分作用素とし D_λ の次数 λ は高々 λ に等しいものとする。ここに $\lambda=0, \cdots\cdots, l-1$ とす。このとき次の行列式

$$\triangle(x_1, \cdots\cdots, x_k) = \mathrm{Det}\,(D_\lambda\, \Phi_\nu(x_1, \cdots\cdots, x_k))$$
$$(\lambda, \nu=0, \cdots\cdots, l-1)$$

を一般化された Wronski 行列式又は単に多項式 $\Phi_0, \cdots\cdots, \Phi_{l-1}$ の Wronski 行列式とよぼう。明らかに $\Phi_0, \cdots\cdots, \Phi_{l-1}$ が一次従属ならば一般化された Wronski 行列式は 0 である。逆は次の補助定理が与える。

補助定理 6. $\Phi_0(x_1, \cdots\cdots, x_k), \cdots\cdots, \Phi_{l-1}(x_1, \cdots\cdots x_k)$ が互に一次独立ならばその Wronski 行列式の少くとも一つは恒等的に 0 とならない。

補助定理 7. $P(x_1, \cdots\cdots, x_k)$ を $k \geqq 2$ 個の変数の有理整係数多項式とし恒等的に 0 ならざるものとする。$i=1, 2, \cdots\cdots k$ とするとき x_i に関する P の次数を高々 r_i とする。しかるとき次の条件を満足する整数 l が少くとも一つ存在する。

$$1 \leqq l \leqq r_k + 1 \tag{25}$$

ここに変数 $x_1, \cdots\cdots, x_{k-1}$ に関する微分作用素 $D_0, \cdots\cdots, D_{l-1}$ においては D_λ の次数は高々 λ にして，

$$W(x_1, \cdots\cdots, x_k) = \mathrm{Det}\left(D_\lambda \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu P\right) \tag{26}$$
$$(\lambda, \nu=0, \cdots\cdots, l-1)$$

とおくとき

(a) W は整係数をもち決して恒等的に 0 とはならない。

(b) $W(x_1, \cdots\cdots, x_k) = U(x_1, \cdots\cdots, x_{k-1})\, V(x_k)$ (27)

と表わされ，多項式 U と V は整係数をもち，U の x_i の次数は高々 lr_i にして $(i=1, \cdots\cdots, k-1)$，V の x_k の次数は高々 lr_k である。

この２つの補助定理の証明は省略する。

第３段階. 以上の補助定理は多項式の指数に対する上界を求めるのに役立つものである。これに加うるに，以下に述べる新しい概念の評価に是非必要な

補助定理を Roth が与えた。

まず一定の正数 $r_1, \cdots\cdots, r_m$ $(m \geqq 1)$ と一定の数 $C \geqq 1$ を固定し，次の性質をもつ m 変数の多項式 $P(x_1, \cdots\cdots, x_m)$ の全体を考えよう。

(a)　P は整係数をもち恒等的に 0 ではない。

(b)　P は x_i に関して高々 r_i 次である。$i=1, \cdots\cdots, m$

(c)　P の係数の絶対値は C を越えない。

いまこれらの多項式の全体を $P_m = P_m(c; r_1, \cdots\cdots, r_m)$ で表わそう。

次に $q_1, \cdots\cdots q_m$ を正数，$p_1, \cdots\cdots, p_m$ を整数とし $(p_i, q_i)=1$ とす，$i=1, \cdots\cdots, m$, その上 $\rho_1 \cdots\cdots \rho_m$ を正数とす。いま Ⓗ(P) を $P(x_1 \cdots\cdots x_m)$ の点 $\left(\frac{p}{q}, \cdots\cdots, \frac{p}{q}\right)$ における $\rho_1 \cdots\cdots \rho_m$ に関する指数とし，次の新しい概念

$$\overline{\text{Ⓗ}}_m(C; r_1, \cdots\cdots, r_m; q_1, \cdots\cdots, q_m; \rho_1, \cdots\cdots, \rho_m) = \text{Ⓗ}(P) \text{ の上界} \tag{28}$$

を考える。ここに P は集合 P_m のすべての多項式を動くものとする。

補助定理8． $r_1, \cdots\cdots, r_k$ は $k \geqq 2$ 個の正整数にして次の条件を満足する $0<\delta<1$ を有するものとする。

$$r_k > 10\delta^{-1}, \quad \frac{r^{i-1}}{r_i} > \delta^{-1} \qquad i=2, \cdots\cdots k \tag{29}$$

また $q_1, \cdots\cdots, q_k$ は正整数にして l は

$$1 \leqq l \leqq r_k + 1 \tag{30}$$

を満足する整数とする。

$$\text{いま } L = (r_1+1)^{kl}\, l!\, C^l\, 2^{klr_1} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \Xi &= \overline{\text{Ⓗ}}_1(L; lr_k; q_k; lr_k) \\ &\quad + \overline{\text{Ⓗ}}_{k-1}(L; lr_1 \cdots\cdots, lr_{k-1}; q_1, \cdots\cdots q_{k-1}; lr_1, \cdots\cdots lr_{k-1}) \end{aligned} \tag{32}$$

によって L と Ξ を導入すると

$$\begin{aligned} &\overline{\text{Ⓗ}}_k(C; r_1, \cdots\cdots, r_k; q_1, \cdots\cdots, q_k; r_1 \cdots\cdots, r_k) \\ &\leqq 2 \operatorname*{Max}_{(l)} \left(\Xi + \Xi^{\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \tag{33}$$

が成立する。

証明は補助定理7を用いてなされる。この補助定理8は多項式の指数の上界を求める次の補助定理9の証明に用いられる。

補助定理9. m は正整数，δ は次の条件

$$0<\delta<m^{-1} \tag{37}$$

を満足するものとする。$r_1,\cdots\cdots,r_m$ は正整数にして次の条件を満足するものとする。

$$r_m>10\delta^{-1},\ \frac{r_i-1}{r}>\delta^{-1},\ i=2,\cdots\cdots,m \tag{38}$$

正整数 $q_1,\cdots\cdots,q_m$ は次の不等式

$$\log q_1>\delta^{-1}m(2m+1) \tag{39}$$

$$r_i\log q_i\geqq r_1\,\mathrm{Log}\,q_1,\ i=2,\cdots\cdots,m \tag{40}$$

を満足するものとする。しかるとき

$$\overline{\Theta}_m(q_1^{\delta r_1};r_1,\cdots\cdots,r_m;q_1,\cdots\cdots,q_m;r_1,\cdots\cdots,r_m)$$
$$<10^m\delta^{(\frac{1}{2})^m} \tag{41}$$

が成立する。

証明は Roth により帰納法によりなされる。この補助定理9は Roth の定理の証明に最も重要な手段を与えるものである。補助定理9さえあれば補助定理5から8までは最早必要としない。

第4段階. 次の補助定理はこれまでのものとは無関係であるが，今迄の数のなかの $r_1,\cdots\cdots,r_m$ だけが表われる。

補助定理10. $r_1,\cdots\cdots,r_m$ を正整数とし ω を正数とする。しかるとき次の条件

$$0\leqq j_1\leqq r_1\cdots\cdots,\ 0\leqq j_m\leqq r_m$$

$$\frac{j_1}{r_1}+\cdots\cdots+\frac{j_m}{r_m}\leqq\frac{1}{2}(m-\omega)$$

を満足する整数 $j_1,\cdots\cdots j_m$ の組 $(j_1,\cdots\cdots,j_m)$ の個数は

$$2m^{\frac{1}{2}}\omega^{-1}(r_1+1)\cdots\cdots(r_m+1)$$

より大きくはない。

証明は帰納法による。Roth の申立てによるとこの証明は Davenport に帰着するものであるという。

第5段階. これまでは Roth の証明にばかり非常に狭く閉じこもっていたが，ここでは一寸離れることにしよう。いま述べた最後の補助定理は或種の多項式の存在を保証するものであって，補助定理9を応用することによって得られる研究の結果次の補助定理が新しく得られる。

補助定理11. $r_1,\cdots\cdots,r_m$ を正整数，α を $s>0$ 次の代数的数とす。また m を十分大きくとって次の条件を満足するようにする。

$$\omega=2\vdots m$$

$$0<\varepsilon<\frac{1}{2}\quad(\varepsilon \text{ は } m \text{ とは独立})$$

$$\left(\frac{1}{2}m^{-\frac{1}{2}}\omega-1\right)^{-1}<\left(2s\right)^{-1} \tag{48}$$

しかるとき次の条件を満足する m 変数 $x_1,\cdots\cdots,x_m$ の函数で恒等的には 0 でない整係数の多項式 $\Phi(x_1,\cdots\cdots,x_m)$ が存在する。ここに多項式は変数 $x_1,\cdots\cdots,x_m$ に関してそれぞれ $r_1,\cdots\cdots r_m$ 次とす。

(a) $$\frac{\tau_1}{r_1}+\cdots\cdots+\frac{\tau_m}{r_m}\geqq m\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$$

を満足する非負整数 $\tau_1,\cdots\cdots\tau_m$ に対して

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\tau_1}\cdots\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\tau_m}\Phi(x_1,\cdots\cdots,x_m)$$

は $x_1,\cdots\cdots,x_m$ において恒等的に 0 となる。

(b) $\Phi(x_1,\cdots\cdots,x_m)$ の $(x_1,\cdots\cdots,x_m)=(\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_m)$ における $r_1,\cdots\cdots,r_m$ に関する指数は $m\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)$ より大である。

(c) $e^{\gamma(\tau_1+\cdots\cdots\tau_m)}$ が $\Phi(x_1,\cdots\cdots,x_m)$ の整係数の絶対値の上界になるような，α にのみ従属する正数 γ が存在する。

定理6の證明の總まとめ. さきに準備した補助定理のうちで以下に有用なものは9と11の二つだけである。

第6段階. 證明の意圖. 有理整係数の m 変数多項式で適当なものを点 $\left(\frac{p_1}{q_1}\right),\cdots\cdots,\left(\frac{p_m}{q_m}\right)$ において考えることにする。ここに多項式は x_i $(i=1,\cdots\cdots,m)$ に関しては r_i 次にして，また $(\alpha,\cdots\cdots,\alpha)$ における $r_1,\cdots\cdots,$

r_m に関する指数は十分大きいものとする。$\frac{p_1}{q_1}$, ……, $\frac{p_m}{q_m}$ は定理6に述べられている数列$\left(\frac{p_\nu^*}{q_\nu^*}\right)$の元とする。多項式の値がこの点において 0 とならないならば，その値は有理数にして分母の上界は容易に評価できる。従ってその値の絶対値は確たる下界を有する。しかるに一方仮定により$\left(\frac{p_\nu^*}{q_\nu^*}\right)$の元の特殊の値$\frac{p_1}{q_1}$, ……, $\frac{p_m}{q_m}$に対して近似式

$$\left|\alpha-\frac{p_i}{q_i}\right|<q_i^{-\mu}\quad(i=1,\cdots\cdots,m)\tag{52}$$

が (17) の条件の下に成立するので，多項式の値の絶対値は上界をもつことになる。この両者の下界，上界が互に矛盾することが示されるので，(52) は成立しない。従て定理6が正しいことになる。この方針の下に以下進めて行こう。

第7段階．適当な多項式． 補助定理11を満足する多項式を $\Phi(x_1,\cdots\cdots,x_m)$ としよう。この式は期待すべき多項式として用いられない。何故なら$\left(\frac{p_1}{q_1},\cdots\cdots,\frac{p_m}{q_m}\right)$において 0 となるからである。しかし補助定理9における仮定が満足されているので，$\Phi(x_1,\cdots\cdots,x_m)$ の$\left(\frac{p_1}{q_1},\cdots\cdots,\frac{p_m}{q_m}\right)$における $r_1,\cdots\cdots r_m$ に関する指数 Ⓗ の上界が与えられる。しかもこれは $\Phi(x_1,\cdots\cdots,x_m)$ の係数の絶対値の最大値 H_1 が

$$H_1<q_1^{\delta r_1}\tag{53}$$

を満足する場合である。補助定理11の性質 (c) と補助定理9の(38) とから

$$H_1\leqq e^{\gamma(r_1+\cdots\cdots+r_m)}<e^{\gamma m r_1}$$

となる。それ故

$$\log q_1>\delta^{-1}m\gamma\tag{54}$$

に対して不等式 (53) が成立する。いま考えている指数に対しては (41) により

$$Ⓗ<10^m\delta^{(\frac{1}{2})^m}$$

が成立している。そこで m, δ と補助定理11にあらわれる ε との間に次の関係

$$10^m\delta^{(\frac{1}{2})^m}<\varepsilon m\tag{55}$$

を仮定する。与えられた ε と m に対して δ を (55) と (37) を満足するよ

うに選ぶと

$$Ⓗ < \varepsilon m$$

となる。従って

$$\frac{j_1}{r_1} + \cdots\cdots + \frac{j_m}{r_m} < \varepsilon m \tag{56}$$

を満足し，多項式

$$F(x_1, \cdots\cdots, x_m) = \frac{1}{j_1! \cdots\cdots j_m!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1} \cdots\cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{j_m} \Phi(x_1 \cdots\cdots, x_m) \tag{57}$$

が点 $\frac{p_1}{q_1}, \cdots\cdots, \frac{p_m}{q_m}$ において 0 とならないような m 個の非負整数 $j_1, \cdots\cdots, j_m$ が存在する。補助定理11と (57) により $F(x_1, \cdots\cdots, x_m)$ は有理整係数をもつ。それ故 $F\left(\frac{p_1}{q_1}, \cdots\cdots, \frac{p_m}{q_m}\right) \neq 0$ は有理数である。

第8段階． $\left|F\left(\frac{p_1}{q_1}, \cdots\cdots, \frac{p_m}{q_m}\right)\right|$ **の下界。** ここでは有理数 $F\left(\frac{p_1}{q_1}, \cdots\cdots, \frac{p_m}{q_m}\right)$ の分母について調べよう。多項式 $F(x_1, \cdots\cdots, x_m)$ は x_i に関しては高々 r_i 次であり $(j=1 \cdots\cdots, m)$，その上直接に明らかなように $F(x_1 \cdots\cdots, x_m)$ に対しては補助定理11の性質 (a) が満足している。各 x_i における最高次の次数に関する注意から $F\left(\frac{p_1}{q_1}, \cdots\cdots, \frac{p_m}{q_m}\right)$ の分母は $q_1^{r_1} \cdots\cdots q_m^{r_m}$ に約数として含まれなければならぬ。しかしこの評価は粗雑である。

いま数 $\frac{p_1}{q_1}, \cdots\cdots, \frac{p_m}{q_m}$ は定理6の数列 $\left(\frac{p_\nu^*}{q_\nu^*}\right)$ の元であると仮定する。しかるとき定理6の仮定により分母 q_i $(i=1, \cdots\cdots, m)$ は因数 b^{λ_i} を含み，(16)により $\varepsilon > 0$ に対して数 $q_0(\varepsilon)$ が存在して，すべての $q_i > q_0(\varepsilon)$ に対して不等式

$$\frac{\lambda_i \log b}{\log q_i} \geqq 1 - \eta - \varepsilon \tag{58}$$

が成立する。

$q_1^{r_1} \cdots\cdots q_m^{r_m}$ には因数 $b^{\lambda_1 r_1 + \cdots\cdots + \lambda_m r_m}$ が含まれる。一方

$F\left(\frac{p_1}{q_1}, \cdots\cdots, \frac{p_m}{q_m}\right)$ の分母には補助定理11の性質 (a) により

$$\frac{\tau_1}{r_1}+\cdots\cdots+\frac{\tau_m}{r_m}\geqq m\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$$

を満足する巾積 $q_1^{\tau_1}\cdots\cdots q_m^{\tau_m}$ はあらわれない。従ってかかる $\tau_1,\cdots\cdots,\tau_m$ に対しては $b^{\lambda_1\tau_1+\cdots\cdots+\lambda_m\tau_m}$ はあらわれない。それ故 $F\left(\frac{p_1}{q_1},\cdots\cdots,\frac{p_m}{q_m}\right)$ の分母のよりよき評価として積 $q_1^{r_1}\cdots\cdots q_m^{r_m}$ から

$$Q=\underset{\left(\frac{\tau_1}{r_1}+\cdots\cdots+\frac{\tau_m}{r_m}<m\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right)}{\mathrm{Min}}\left(b^{(r_1-\tau_1)\lambda_1+\cdots\cdots+(r_m-\tau_m)\lambda_m}\right)$$

を引去るとよい。(58) と (40) により

$$\frac{\tau_1}{r_1}+\cdots\cdots+\frac{\tau_m}{r_m}<m\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$$

に対して不等式

$$\begin{aligned}b^{(r_1-\tau_1)\lambda_1+\cdots\cdots+(r_m-\tau_m)\lambda_m}&\geqq\left(q_1^{r_1-\tau_1}\cdots q_m^{r_m-\tau_m}\right)^{1-\eta\varepsilon}\\&\geqq q_1^{\left(\frac{r_1-\tau_1}{r_1}+\cdots\cdots+\frac{r_m-\tau_m}{r_m}\right)(1-\eta-\varepsilon)r_1}\\&\geqq q_1^{m\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)(1-\eta-\varepsilon)r_1}\end{aligned}$$

が成立する。最後の不等式の右辺は $\tau_1\cdots\cdots,\tau_m$ に無関係である。従って

$$Q\geqq q_1^{m\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)(1-\eta-\varepsilon)r_1} \tag{59}$$

となる。

上の評価により $F\left(\frac{p_1}{q_1},\cdots\cdots,\frac{p_m}{q_m}\right)$ の分母は $q_1^{r_1}\cdots\cdots q_m^{r_m}Q^{-1}$ の約数と考えられるので (40) と調和させて次の条件を仮定しよう。

$$\frac{r_1\log q_1}{\log q_i}\leqq r_i<1+\frac{r_1\log q_1}{\log q_i} \tag{60}$$

$$(i=2,\cdots\cdots,m)$$

(60) の右辺の不等式と (38) により

$$\frac{r_i\log q_i}{r_1\log q_1}<1+\frac{1}{r_i-1}<1+\frac{1}{r_m-1}<1+\frac{1}{9}\delta$$

$$(i=2,\cdots\cdots,m)$$

となる。(55) より $\delta<\varepsilon$ なるを以て

$$r_i \operatorname{Log} q_i < \left(1+\frac{1}{9}\varepsilon\right) r_1 \operatorname{Log} q_1$$

でなければならなず，従って

$$q_1^{r_1} \cdots\cdots q_m^{r_m} < q_1^{m\left(1+\frac{\varepsilon}{9}\right) r_1}$$

となる。そこで (59) と一しよにすれば評価

$$q_1^{r_1} \cdots q_m^{r_m} Q^{-1} < q_1^{m\left((1+\frac{\varepsilon}{9})-(\frac{1}{2}-\varepsilon)(1-\eta-\varepsilon)\right) r_1}$$

$$< q_1^{m\left(\frac{1}{2}+2\varepsilon+\frac{\eta}{2}\right) r_1}$$

となり

$$\left| F\left(\frac{p_1}{q_1}, \cdots\cdots, \frac{p_m}{q_m}\right) \right| > q_1^{-m\left(\frac{1}{2}+2\varepsilon+\frac{\eta}{2}\right) r_1} \qquad (61)$$

となる。

第9段階　$\left| F\left(\frac{p_1}{q_1}, \cdots\cdots, \frac{p_m}{q_m}\right) \right|$ **の上界.**　まず多項式 $F(x_1 \cdots\cdots, x_m)$ の $(x_1-\alpha), \cdots\cdots, (x_m-\alpha)$ の巾による展開から出発しよう。(56) と補助定理11の性質 (b) を有する (57) の式によって，この展開における $F(x_1 \cdots\cdots, x_m)$ の各々の和は，

$$\frac{\tau_1}{r_1} + \cdots\cdots + \frac{\tau_m}{r_m} > m\left(\frac{1}{2}-2\varepsilon\right) \qquad (62)$$

に対して，因数 $(x_1-\alpha)^{\tau_1} \cdots\cdots (x_m-\alpha)^{\tau_m}$ を有する。この因数において $(x_1, \cdots\cdots\cdots, x_m) = \left(\frac{p_1}{q_1}, \cdots\cdots, \frac{p_m}{q_m}\right)$ とおき不等式の仮定の下に

$\left| \left(\frac{p_1}{q_1}-\alpha\right)^{\tau_1} \cdots\cdots \left(\frac{p_m}{q_m}-\alpha\right)^{\tau_m} \right|$ を評価してみよう。

(40)，(52)，と (62) によると

$$\left| \left(\frac{p_1}{q_1}-\alpha\right)^{\tau_1} \cdots\cdots \left(\frac{p_m}{q_m}-\alpha\right)^{\tau_m} \right| < \left(q_1^{\tau_1} \cdots\cdots q_m^{\tau_m}\right)^{-\mu}$$

$$< q_1^{-m\left(\frac{1}{2}-2\varepsilon\right)\mu r_1}$$

となる。$(x_1-\alpha), \cdots\cdots, (x_m-\alpha)$ の巾による $F(x_1 \cdots\cdots, x_m)$ の展開における係数の絶対値の極大値を H_2 で表わすと，

$$\left|F\left(\frac{p_1}{q_1},\cdots\cdots,\frac{p_m}{q_m}\right)\right|<H_2(r_1+1)\cdots\cdots(r_m+1)q_1^{-m(\frac{1}{2}-2\varepsilon)\mu r_1} \tag{63}$$

となる。H_2 の評価のために

$$\frac{1}{\rho_1!\cdots\cdots\rho_m!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\rho_1}\cdots\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\rho_m}F(\alpha,\cdots\cdots,\alpha)$$

なる形の式をしらべてみよう。(57) により F を Φ にておきかえ，評価 (53) を適用し，二項係数の評価 $\binom{\tau}{\rho}\leqq 2^{\tau}$ を用いると，$a=\mathrm{Max}(|\alpha|,1)$ と $r_1\leqq r_m$ に対し

$$\begin{aligned}H_2&<2^{r_1+\cdots\cdots+r_m}(r_1+1)\cdots\cdots(r_m+1)\,a^{r_1+\cdots\cdots r_m}H_1\\&<(4a)^{mr_1}q_1^{\delta r_1}\end{aligned}$$

となる。さらに

$$\log q_1>\delta^{-1}m\log(8a) \tag{64}$$

なるを以て

$$(r_1+1)\cdots\cdots(r_m+1)H_2<2^{mr_1}H_2<q_1^{2\delta r_1}$$

となる。これを (63) に入れて，(55) から得られる $\delta<\varepsilon$ を利用すると次の評価が得られる。

$$\left|F\left(\frac{p_1}{q_1},\cdots\cdots,\frac{p_m}{q_m}\right)\right|<q_1^{-m((\frac{1}{2}-2\varepsilon)\mu-2\varepsilon)r_1}$$

第10段階．証明の結論． 前段階の評価は (61) に対して

$$\frac{1}{2}+2\varepsilon+\frac{\eta}{2}<\left(\frac{1}{2}-2\varepsilon\right)\mu-2\varepsilon$$

即ち
$$\mu>\frac{1+\eta+8\varepsilon}{1-4\varepsilon} \tag{65}$$

なるとき矛盾する。しかもこの不等式は (17) により η と μ の一定の値と十分小さな正数 ε に対してつねに成立する。それ故矛盾が生じたことになり定理6が成立する。但し ε, m, δ, $r_1,\cdots\cdots,r_m$, $q_1,\cdots\cdots,q_m$ に対して条件が満足しているかどうかを検討しておく必要がある。

まず正数 ε を $\varepsilon<\frac{1}{2}$ なるように選ぶと，(17) を満足するような与えられた数 η と μ に対して不等式 (65) は成立する。この ε に対して自然数 m を

補助定理11の（48）を満足するように選ぶ。ε と m に対して（37）と（55）を満足するように δ を定める。次に数列$\left(\frac{p_\nu^*}{q_\nu^*}\right)$から（52）を満足する元 $\frac{p_1}{q_1}$ を選び，q_1 に対しては（39）（54）（64）を満足するように，その上 i=1 に対しては確かに（58）を満足するようにする。さらに数列$\left(\frac{p_\nu^*}{q_\nu^*}\right)$からは（52）を満足しかつ次の不等式

$$\frac{\log q_i}{\log q_{i-1}} > \frac{2}{\delta} \quad (i=2,\cdots\cdots,\ m) \tag{66}$$

を満足する元 $\frac{p_2}{q_2},\cdots\cdots,\ \frac{p_m}{q_m}$ をとり出す。最後に r_1 は次の式

$$r_1 > \frac{10 \log q_m}{\delta \log q_1} \tag{67}$$

を満足する自然数とする。$r_2,\cdots\cdots,\ r_m$ は（60）により一意的に定まる整数である。（60）から（40）が成立する。（60）と（67）により

$$r_m \geqq \frac{r_1 \log q_1}{\log q_m} > 10\delta^{-1}$$

にしてその上

$$\frac{r_i \log q_i}{r_1 \log q_1} < 1 + \frac{\log q_1}{r_1 \log q_1} \leqq 1 + \frac{\log q_m}{r_1 \log q_1} < 1 + \frac{1}{10}\delta$$

となる。最後の関係式と（60）の左の不等式により，また（66）を一しよにすると

$$\frac{r_{i-1}}{r_i} > \frac{\log q_i}{\log q_{i-1}}\left(1+\frac{1}{10}\delta\right)^{-1} > \delta^{-1}$$

$$(i=2,\ \cdots\cdots,\ m)$$

が得られる。それ故（38）が成立するので二つの補助定理9と11のすべての仮定が成立している。

これにより定理6の証明が果たされたことになる。

文　　献

[1] Cassel, J. W. S. An introduction to Diophantine approximation. (1957).

[2] Dyson, F. J. The approximation to algebraic numbers by rationals. Acta. Math. 79 (1947) 225—240.

[3] Liouville, J. Sur les classes très étendus de quantités dont la valeur n'est ni algébriques, ni même réductible à des irrationelles algébriques. C. R. Acad. Sci. 18 (1844) 883—885, 910—911, J. math. pures. appl. 16 (1851) 133—142.

[4] Mahler, K. On Dyson's improvement of the Thue Siegel theorem. Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam. 52 (1949) 1175—1184.

[5] Roth, K.F. Rational approximations to algebraic numbers. Mathematika 2 (1955) 1—20.

[6] Schneider, Th. Über die Approximation algebraischer Zahlen. J. reine. angew. Math. 175 (1936) 182—192.

[7] Schneider, Th. Über eine Dysonsche Verschärfung des Siegel-Thueschen Satzes. Arch. d. Math. 1 (1948—49) 288—295.

[8] Schneider, Th. Einführung in die transzendenten Zahlen. (1957).

[9] Siegel, C. L. Approximation algebraischer Zahlen. Math. Zeit. 10 (1921) 173—213.

[10] Siegel, C. L. Über Näherungswerte algebraischer Zahlen. Math. Ann. 84 (1921) 80—99.

[11] Thue, A. Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen. Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania. (1908).

[12] Thue, A. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. J. reine. angew. Math. 135 (1909) 284—305.

[13] Cassels, J. W. S. An introduction to the geometry of numbers. (1959).

[14] Landau, E. Diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen. (1959).

(1959.12.17.)