整数論と計算機 II*

武隈良一

§7. 親　和　数

2つの数は，もしもおのおのが他の数の真の約数の和に等しいならば，**親和数**とよばれる。

たとえば，220と284は親和数である。なぜならば，

$$220=1+2+4+71+142$$

$$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$$

と分解されるからである。

親和数とこの例は遠くピタゴラスの時代から知られていた。

ニコマコス(Nikomakhos, 50—約150)の「数論入門」の注釈のなかで，イヤンブリコス（約283—330）は次のように述べている。「ある人びとは，完全数はピタゴラス学派においては愛とよばれ，それは完全数のなかに存在する異なる元の統一性と親和性のゆえであると考えたが，それは誤まった見解に落入ったものである。というのは実際はこれに反して，ピタゴラス学派は284と220のような他の2数に，徳と社交性を与え，それらを親和数とよんだ。なぜならばピタゴラスが確言したように友情の原理によると，おのお

＊ Iは人文研究第33輯（1967年1月）に掲載。

のの数の約数が他の数を生む能力をもつからである。友とは何であるかと問われたとき，ピタゴラスは‘もう一人の私’と答えたが，このことがこれらの数のなかに示されている。アリストテレスも彼の著書倫理学において友をそのように定義している」。[1, p. 38]。

9世紀にアラビアの数学者サービット・イブン・クッラ (Thābit ibn Qurra, 836—901) は親和数に関する論文をかいているが，これはアラビア数学における最初の独創的な業績である。すなわち彼は

$$h=3\cdot2^n-1,\ t=3\cdot2^{n-1}-1,\ s=9\cdot2^{2n-1}-1$$

がみな2より大なる素数なるとき，

$$\mathrm{P}=2^nht,\ \mathrm{Q}=2^ns$$

は親和数であることに注目した [2, p. 99]。

これによると次の表から3組の親和数が得られる。

n	h	t	s	P	Q
2	11	5	71	220	284
4	47	23	1151	17296	18416
7	383	191	73727	9363584	9437056

メルセンヌのいうところによると，1636年にフェルマは親和数の上の第2組を見出していたとのことである。

$$17296=2^4\cdot23\cdot47,\ 18416=2^4\cdot1151$$

デカルトも1638年に上の第3組を見出している。

$$9363584=2^7\cdot191\cdot383,$$

$$9437056=2^7\cdot73727$$

その他オイラーは64組の親和数を見出した。その後いろいろと親和数の組が得られたが，1911年にはディックソンによって次のものが発見された。

$$2^4\times10103\times735263$$

$$2^4\times17\times137\times2990783$$

最近 J. Alanen, O. Ore, J. Stemple によって親和数の計算機による系統的な求め方が行なわれたので，それについて述べよう［3］。

親和数を求める公式はいろいろとあり，それにより現在では数百組が知られている。しかしすべての親和数を網羅しているか否かを検証することは困難であり，ディックソンは 1913 年に 6232 より大きくない親和数は次の 5 組に限ることを証明した。

(220, 284) (1184, 1210) (2620, 2924)

(5020, 5564) (6232, 6368)

これを実際に進めたのが上記 3 氏であり，10^6 を超えない親和数は次の 42 組であることを計算機によって確かめた。

$220=2^2\cdot5\cdot11$	$284=2^2\cdot71$
$1184=2^5\cdot37$	$1210=2\cdot5\cdot11^2$
$2620=2^2\cdot5\cdot131$	$2924=2^2\cdot17\cdot43$
$5020=2^2\cdot5\cdot251$	$5564=2^2\cdot13\cdot107$
$6232=2^3\cdot19\cdot41$	$6368=2^5\cdot199$
$10744=2^3\cdot17\cdot79$	$10856=2^3\cdot23\cdot59$
$12285=3^3\cdot5\cdot7\cdot13$	$14595=3\cdot5\cdot7\cdot139$
$17296=2^4\cdot23\cdot47$	$18416=2^4\cdot1151$
$63020=2^2\cdot5\cdot23\cdot137$	$76084=2^2\cdot23\cdot827$
$66928=2^4\cdot47\cdot89$	$66992=2^4\cdot53\cdot79$
$67095=3^3\cdot5\cdot7\cdot71$	$71145=3^3\cdot5\cdot17\cdot31$
$69615=3^2\cdot5\cdot7\cdot13\cdot17$	$87633=3^2\cdot7\cdot13\cdot107$
$*79750=2\cdot5^3\cdot11\cdot29$	$88730=2\cdot5\cdot19\cdot467$
$100485=3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot29$	$124155=3^2\cdot5\cdot31\cdot89$
$122265=3^2\cdot5\cdot11\cdot13\cdot19$	$139815=3^2\cdot5\cdot13\cdot239$
$122368=2^9\cdot239$	$123152=2^4\cdot43\cdot179$
$141664=2^5\cdot19\cdot233$	$153176=2^3\cdot41\cdot467$

$142310=2\cdot5\cdot7\cdot19\cdot107$	$168730=2\cdot5\cdot47\cdot359$
$171856=2^4\cdot23\cdot467$	$176336=2^4\cdot103\cdot107$
$176272=2^4\cdot23\cdot479$	$180848=2^4\cdot89\cdot127$
*$185368=2^3\cdot17\cdot29\cdot47$	$203432=2^3\cdot59\cdot431$
$196724=2^2\cdot11\cdot17\cdot263$	$202444=2^2\cdot11\cdot43\cdot107$
*$280540=2^2\cdot5\cdot13^2\cdot83$	$365084=2^2\cdot107\cdot853$
$308620=2^2\cdot5\cdot13\cdot1187$	$389924=2^2\cdot43\cdot2267$
*$319550=2\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot83$	$430402=2\cdot7\cdot71\cdot433$
$356408=2^3\cdot13\cdot23\cdot149$	$399592=2^3\cdot199\cdot251$
$437456=2^4\cdot19\cdot1439$	$455344=2^4\cdot149\cdot191$
*$469028=2^2\cdot7^2\cdot2393$	$486178=2\cdot7^2\cdot11^2\cdot41$
$503056=2^4\cdot23\cdot1367$	$514736=2^4\cdot53\cdot607$
$522405=3^2\cdot5\cdot13\cdot19\cdot47$	$525915=3^25\cdot13\cdot29\cdot31$
$600392=2^3\cdot13\cdot23\cdot251$	$669688=2^3\cdot97\cdot863$
$609928=2^3\cdot11\cdot29\cdot239$	$686072=2^3\cdot191\cdot449$
$624184=2^3\cdot11\cdot41\cdot173$	$691256=2^3\cdot71\cdot1217$
$635624=2^3\cdot11\cdot31\cdot233$	$712216=2^3\cdot127\cdot701$
$643336=2^3\cdot29\cdot47\cdot59$	$652664=2^3\cdot17\cdot4799$
*$667964=2^2\cdot11\cdot17\cdot19\cdot47$	$783556=2^2\cdot31\cdot71\cdot89$
$726104=2^3\cdot17\cdot19\cdot281$	$796696=2^3\cdot53\cdot1879$
*$802725=3\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot139$	$863835=3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot433$
*$879712=2^5\cdot37\cdot743$	$901424=2^4\cdot53\cdot1063$
$898216=2^3\cdot11\cdot59\cdot173$	$980984=2^3\cdot47\cdot2609$
$947835=3^3\cdot5\cdot7\cdot17\cdot59$	$1125765=3^3\cdot5\cdot31\cdot269$
*$998104=2^3\cdot17\cdot41\cdot179$	$1043096=2^3\cdot23\cdot5669$

このうち＊印のついているもの9組は，これまでに知られなかったものである。ただし（79750，88730）は H. L. Rolf によって1965年に見出されて

いる [4]。用いられた計算機は Yale IBM 7094 で 2 時間を要した。

手法. 親和数の一組を (m, n) とし $m<n$ なるものとする。このとき m の約数の和を $S(m)$ とおくと,

$$\left.\begin{array}{l} S(n)-n=m \\ S(m)-m=n \end{array}\right\} \tag{1}$$

となる。ここに約数の和というとき 1 と m の両方をいれるものとする。

したがって(1)より

$$S(m)=S(n)=m+n \tag{2}$$

となる。すなわち親和数とは 2 数の約数の和が，ともにその 2 数の和に等しいものである。

いま $S_0(m)=S(m)-m$ (3)

とおくと(2)は

$$S_0(m)=n,\ S_0(n)=m \tag{4}$$

と変形される。したがって

$$S_0^2(m)\equiv S_0(S_0(m))\equiv m \tag{5}$$

が成立する。

S_0 に対しては(5)が成立するので，$S_0(m)$ を求めるとき m の約数の和の計算の正確を期するために，この(5)をチェックすることが考えられた。しかしその計算にはほぼ 20 時間を要した。

計算は結局 m の素因数分解に基礎をおく。いま $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}\dots p_n^{\alpha_n}$ とするとき

$$S_0(n)=S(n)-n=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\right)-n \tag{6}$$

となる。また $S_0(m)>m$ のとき，$S_0(m)$ はふたたび因数分解され(5)に対するチェックがなされた。

以上は計算機による計算上の手法についてであるが，親和数を求める問題はいろいろな結果を予想させる。それについて少しく述べよう。

Ⅰ. 完全数は, $S_0(m)=m$ すなわち $S(m)=2m$ をみたす整数である。また親和数は, $S_0^{(2)}(m)=m$ をみたす整数である。これより $S_0^{(3)}(m)=m$ をみたす整数の存在が問題となる。3氏の計算によると $m<10^6$ の範囲内にはかかる m は存在しなかった。この周期的問題に関するこれまでの結果としては P. Poulet (1929) の次の2つがある。

$$S_0^{(5)}(12496)=12496,\ S_0^{(28)}(14316)=14316.$$

Ⅱ. 親和数の組が無限に存在するか否かは知られておらない。しかし上に得られた表から

$$m\to\infty \text{ のとき, } \lim\frac{m}{n}\to 1 \tag{7}$$

が予想される。これは上の表の計算を続行することからうかがわれる。またクッラの古い公式から, もしもそれらが親和数の無限個の組をあらわすならば, (7)を満足するであろうことが理解される。

Ⅲ. 上に得られた表をみると, 親和数の2つの数は, 多くの場合に両方とも偶数であり, ときとして両方とも奇数である。そして一方が偶数で, 一方が奇数であることはない。このことから偶数と奇数になる親和数は, もっとはるかに高い限界においても存在しないのではないかと予想される。それは次の理由にもとずくものである。

(2)において m と n の一方が奇数で, 他方が偶数ならば, その和 $S(m)$, $S(n)$ はともに奇数である。また p が奇数ならば(6)の $S(n)$ の因数

$$1+p+\ldots+p^{\alpha}=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$$

は α が偶数のときのみ奇数である。したがって, $S(n)$ の因数において, α_i はみな偶数となり, n は平方数となる。同様に $S(m)$の奇数から m も平方数になる。すなわち

$$m=2^{r}M^2,\ n=2^{s}N^2$$

となる。ここに M と N は奇数である。このうちどちらかが奇数であるとき (たとえば m が奇数のとき,)

$$m=M^2,\ n=2^sN^2$$

とあらわされる。

以上により，親和数の一方が奇数で他方が偶数ならば，その奇数は奇数の平方としてあらわされるが，(5)をチェックしてみると

$$m \leqq 3,469,563,409$$

なる $m=M^2$ に対しては(5)が成立していない。この計算は m と M とが同じ素数を含んでいることから速やかに行なうことができた。この m の限界は今日の計算機の能力としては時間ぎりぎりのものである。したがって親和数の一方が平方数であるようなものは存在しないとの予想にまで広大することができる。

IIIの予想に関しては A. A. Gioia と A. M. Vaidya [5] が種々の定理を得ているので，それを述べておこう。

定理 1. m と n とが親和数で，m は偶数，n は奇数とする。このとき

$$m=2^rM^2,\ r\geqq 1,\ n=N^2$$

となる。ここに M と N は 1 より大きい奇数である。

定理 2. $m=2^rM^2$ と $n=N^2$ が反対の偶奇性（一方が偶数，他方が奇数）をもつならば，N は合成数である。

系. M が素数で N が奇数ならば，$2M^2$ と N^2 は親和数ではない。

定理 3. 2^rM^2 と N^2 とが反対の偶奇性をもつものとする。

r が奇数ならば，

(1)　$(M,3)=(N,3)$ にして，

(2)　$q^t \| N,\ q\equiv t\equiv 1 \pmod{3}$ をみたす素数 q と正整数 t とが存在する。

またもし $r\equiv 3 \pmod{4}$ ならば，

(3)　$p^u \| N,\ 2p\equiv u\equiv 2 \pmod{5}$ をみたす素数 p（q と異なる必要はない）と正整数 u が存在する。

(4)　$M \equiv N \equiv \frac{r+1}{4} S(M^2) \equiv 0 \pmod{5}$.

定理 4. $m=2^r M^2$, $n=N^2$ を親和数とする。 $r=1$ ならば，N は平方数ではない。 $r>1$ ならば，M は平方数でもなく，$4k+3$ の形の素数でもない。

以上の定理の証明は原論文にゆずる。しかしⅢの予想から，かかる親和数が存在しないとすれば，これらの定理はすべて無意味になる。

§8.　メルセンヌ数

戦前において知られていた最大の素数は

$$2^{127}-1=170141183460469231731687303715884105727 \text{（39桁）}$$

であり，これは E. Lucas が1876年に見出したものである。

戦後計算機の発達により，最大の素数として $2^{11213}-1$ が見出された。これは 3381 桁の数であり，1963年に D. B. Gillies が Illiac II を用いて求めたものである [6]。その後は進展していないようなので，最大の素数に対する一応の結論が出されたことになるが，本節ではこの間の経過について少しく記述しておこう。

まず上の2数はともに**メルセンヌ数**である。メルセンヌ数というのは17世紀の神父メルセンヌ (M. Mersenne, 1588–1648) によって考えられた次の整数である。

$$M_p=2^p-1$$

ここに p はすべての素数をうごくものであるが，このとき M_p は必ずしも素数とはならない。M_p が素数であると，ユークリッドの原本にあるように $2^{p-1}(2^p-1)$ が完全数となるのであるが，素数でないとこうはいかない。

また M_p が素数であるためには，p が素数であることが必要条件であることは容易に証明されるが，明らかにこれは十分条件ではない。

そこでいかなる素数 p に対して M_p が素数になるかの問題が古くから論じられ調べられてきたが，まず，$p=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$

のとき M_p は素数である。したがって $p=11, 23, 29$ …… のとき M_p は素数ではない。このことは戦前に既に知られていたが，その後の素数については戦後の計算機によって次のように確められた。以下にまとめた一覧表をかかげよう。

No.	p	M_p	年代	人名	計算機名
1	2	3			
2	3	7			
3	5	31			
4	7	127			
5	13	8191		Cataldi	
6	17	131071		Cataldi	
7	19	524287	1588	Cataldi	
8	31	2147483647	1750	Euler	
9	61	19桁	1883	Pervouchine	
10	89		1911	Powers	
11	107		1914	Powers	
12	127	39桁	1876	Lucas	
13	521	157桁	1952	Lehmer	SWAC
14	607	183桁			
15	1279	376桁			
16	2203	664桁			
17	2281	687桁			
18	3217	969桁	1957	Riesel	SWAC
19	4253		1961	Hurwitz	IBM 7090
20	4423				
21	9689		1963		Illiac. II.
22	9941				
23	11213	3381桁			

ここで計算に要した時間を比較してみると，$p=8191$ に対して M_p が素数でないことを確かめるのに IBM 7090 は 5.2 時を要し，Illiac II (Illinois 大学計算機研究所備付) は 49 分ですませたとの ことである。また後者の計算機は M_{9689}, M_{9941}, M_{11213} を確かめるのに それぞれ 1 時間 23 分， 1 時間 30 分， 2 時間 15 分を要したという。

ルカスのテスト. M_p が素数であることを判定するのに Lucas のテストというのがある。それは,

$$u_1=4,\ u_{i+1}=u_i^2-2$$

とおくとき, $u_{p-1}\equiv 0 \pmod{M_p}$ ならば, そしてこのときに限り M_p は素数である。

というものである [7] [8] [9, p. 194] [10, p. 336]。

このテストにより戦前は $p=257$ まで確かめられた。また Illiac II では $p<12000$ までこのテストがなされたとのことである。普通は M_p が合成数であることを判定するためにその因数を求めるのであるが, M_p のすべての因数を求めることは困難なので, ルカス の テスト が 大いに役立ったのである。

さて上の表をみると 素なる メルセンヌ数はかなり 偏在していることが 分る。すなわち

31—61, 127—521, 4423—9689

の間には1つも存在しておらない。ことに最後の場合は間隙がいちじるしく大きい。このことから素なるメルセンヌ数の分布が問題となってくる。また合成数であるメルセンヌ数の 素因数の 個数は 如何という 問題もおこってくる。これらについてはいろいろと論ぜられている。

I. G. Good は $M_p<x$ なる素数の個数は漸近的に $2.3\log\log x$ に等しい, D. Shanks はまさしく $\frac{5}{\log 10}\log\log x$ に近似してるという [9, p. 198]。したがって $\frac{2}{\log 2}\log\log x$ が正しい漸近関数であろう。

また M_p の素因数の個数については, 次の推測がある。

$A<B\leqq\sqrt{M_p}$, $\frac{B}{A}\to\infty$, $M_p\to\infty$ なるとき, [A, B] における M_p の素因数の個数は平均が

$$\sim \log(\log B/\log A),\ A \geqq 2p$$

$$\sim \log(\log B/\log A),\ A < 2p$$

であたえられるポアッソン分布をなす。

もしこの推測が正しければ次の結果が成立する。

(1) x より小さいメルセンヌ素数の個数

$$\sim \frac{2}{\log 2} \log \log x$$

(2) 区間 $[x, 2x]$ にあるメルセンヌ素数の期待個数

$$\sim 2 + 2 \log\left(\frac{\log 2x}{\log x}\right) \sim 2$$

(3) M_p が素数である確率 $\sim \dfrac{2 \log 2p}{p \log 2}$.

これらに関連した実際の観測頻度数は次の表の通りである。

x	5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120
$[x, 2x]$ における素数の個数	2	3	1	1	3	0	2	1	2	3	2

$5000 < p < 7000$ にあるメルセンヌ数の 2^{36} より小さい素因数の全個数は

$$[\pi(7000) - \pi(5000)] \log\left(\frac{\log 2^{36}}{\log 12{,}000}\right)$$

と推定されている。これは実際の素数表から求められるので両者を比較することができる。これを p の他の範囲においても調べたものが次の表である。

p の範囲	5000から 7000	7000から 9000	9000から 11000	11000から 13000	13000から 15000	15000から 17000
2^{36} より小さい素因数の観測数	223	209	206	192	175	169
推定数	226	205	206	192	184	181

§ 9. ヒンチンの定数

いま x を実数とし，その正則連分数展開を

$$x=a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots \tag{1}$$

とする。ここに a_0 は整数であり，$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ は正整数なるものとする。このとき

$$G_n(x)=\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n} \tag{2}$$

とおくと，ほとんどすべての x に対して

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x)=K \tag{3}$$

が成立し，この K は絶対定数で次の値をもつ。

$$K=\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{1}{r(r+1)}\right\}^{\log_2 r}=2.685452001\cdots\cdots \tag{4}$$

このことはヒンチンが 1934 年に証明したので，この定数を**ヒンチンの定数**という。

ここにいう「ほとんどすべての」とは，測度０の集合を除去することであり，測度０の集合に含まれるものは，すべての有理数，すべての平方根 $\left(\frac{b+\sqrt{c}}{a}\text{の形のもの}\right)$，それに

$$e=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots \tag{5}$$

なので，このような e およびこれに類するものである。

D. Schanks [11] はこの K 自身が「ほとんどすべての」なかに入っているかどうかは未解決の問題であるといった。

ここでは K について知られていることを述べよう [12]。

数年前に D. Shanks は [13] において求めた K の値を用いて，連分数の部分商の最初の 30 を次のように計算した。

$$K\approx 2+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{1} \tag{6}$$

その結果幾何平均として

$$G_{30}(K)=2.126 \tag{7}$$

を得たが，これは K よりも小さい。

さらに Wrench [14] はより精密に K を155桁まで計算したので，これを用いて K の正則連分数の最初の150の部分商を次の表のように求めた。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2	1	2	5	1	1	2	1	1	3
1	10	2	1	3	2	24	1	3	2	3
2	1	1	1	90	2	1	12	1	1	1
3	1	5	2	6	1	6	3	1	1	2
4	5	2	1	2	1	1	4	1	2	2
5	3	2	1	1	4	1	1	2	5	2
6	1	1	3	29	8	3	1	4	3	1
7	10	50	1	2	2	7	6	2	2	16
8	4	4	2	2	3	1	1	7	1	5
9	1	2	1	5	3	1	1	1	2	2
10	2	1	13	11	770	1	4	2	1	14
11	1	14	2	1	6	1	1	1	9	2
12	53	1	2	2	1	9	5	6	2	1
13	2	1	5	4	1	234	7	1	1	4
14	3	19	3	1	10	18	8	24	1	12
15	1									

これによって幾何平均 $G_n(K)$ と K との偏差 $G_n(K)-K$ を求めると次の表のようになる。

n	$G_n(K)$	$G_n(K)-K$
10	1.89590	−0.78955
20	2.11174	−0.57371
30	2.12606	−0.55939
40	2.22084	−0.46461
50	2.10320	−0.58225
60	2.02209	−0.66336
70	2.18395	−0.50150
80	2.37681	−0.30864
90	2.34452	−0.34093
100	2.27432	−0.41113
110	2.44835	−0.23710
120	2.51097	−0.17448
130	2.49488	−0.19057
140	2.56242	−0.12303
150	2.69503	+0.00958

これによると偏差は $n=150$ においてはじめて＋になる。つまりそれまでは－ばかりがつづいていたのであるが，＋になることもあるので，このことから K が「ほとんどすべての」なかにないと信ずる理由がもはやなくなっ

たということが少なくともはっきり言える。しかし問題がこれで決定的に解決されたわけではない。

§ 4 A.* 一般化されたフェルマの問題

(IX)　$m=4,\ n=5$

$$x^5+y^5+z+u^5=v^5$$

は不能であろうと予想されたが，最近次のような解が見出された。

$$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$$

(X)　$m=5,\ n=5$

$$x^5+y^5+z^5+u^5+v^5=w^5$$

は可能であろうと予想されてはいたが，具体的な解は1つも知られておらなかった。これも最近次のように見出された。

$$19^5+43^5+46^5+47^5+67^5=72^5$$

以上は L. J. Lander と T. R. Parkin によって1966年に求められたが，これについて少し詳しく述べておこう［15］。

この2人は CDC 6600 計算機を用いて，

$$x_1{}^5+x_2{}^5+\dots+x_m{}^5=y^5,\ m\leqq 6$$

の非負整数解を求めた。その結果は次の表の通りである。

$m=5$ の場合。

$$x_1{}^5+x_2{}^5+x_3{}^5+x_4{}^5+x_5{}^5=y^5,\ y\leqq 250$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
19	43	46	47	67	72
21	23	37	79	84	94
7	43	57	80	100	107
0	27	84	110	133	144

これらは全部新しい解である。$y=107$ の第3の解は1934年に得られた次の Sastry の公式［16］をみたす最小の解である。すなわち

＊ §4A は§4の続きを意味する。

$$(75v^5-u^5)^5+(u^5+25v^5)^5+(u^5-25v^5)^5$$
$$+(10u^3v^2)^5+(50uv^4)^5=(v^5+75v^5)^5$$

において，$u=2$, $v=1$ とおいたものである。

第4の解は期せずして得られたものであるが，これは最初に述べた (IX) の解となり，われわれを驚かすものである。それというのもこの方程式は解をもたないであろうという ($n=5$ に対する一般化されたフェルマの問題に対する) オイラーの予想をくつがえすからである。

なお $m=4$ の場合を $y\leqq 750$ の範囲まで調べたが，その範囲では解は得られなかった。

$m=6$ の場合。

$$x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5+x^5=y^5,\ y\leqq 100$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y
4	5	6	7	9	11	12
5	10	11	16	19	29	30
15	16	17	22	24	28	32
13	18	23	31	36	66	67
7	20	29	31	34	66	67
0	19	43	46	47	67	72
22	35	48	58	61	64	78
0	21	23	37	79	84	94
4	13	19	20	67	96	99
6	17	60	64	73	89	99

このうちの最初の2つは既に A. Martin によって1888年に見出されている。

(VII)　$m=3$, $n=4$

$$x^4+y^4+z^4=u^4$$

これが解をもつかどうかは，まだ知られておらない。$u<10^4$ まで解をもたないことが Ward [17] によって確かめられている。

引用文献

[1] L. E. Dickson, History of the theory of numbers. vol. 1. (Chelsea, 1952).

[2] O. Ore, Number theory and its history. (1948).

[3] J. Alanen, O. Ore and J. Stemple, Systematic Computations on Amicable Numbers. Math. of Comp. vol. 21. No. 98. (1967) pp. 242–245.

[4] H. L. Rolf, Friendly numbers. Amer. Math. Monthly. 72 (1965) 455.

[5] A. A. Gioia and A. M. Vaidya, Amicable numbers with opposite parity, Amer. Math. Monthly. vol. 74, (1967) pp. 969–973.

[6] Donald B. Gillies, Three New Mersenne Primes and a Statical Theory. Math. of Comp. vol. 18. No. 65. (1964) pp. 93–95.

[7] I. Kaplansky, Lucas's tests for Mersenne numbers. Amer. Math. Monthly. vol. 52 (1945) pp. 188–190.

[8] D.H. Lehmer, An extended theory of Lucas' functions. Ann. of Math. vol. 31 (1930) pp. 419–448.

[9] D. Shanks, Solved and Unsolved Problems in Number Theory. (1962).

[10] W. Sierpiński, Elementary theory of numbers. (1964).

[11] D. Shanks. Reviews. Math. of Comp. vol. 20 (1966) p. 173.

[12] J. W. Wrench, Jr. and D. Shanks, Questions Concerning Khintchine's Constant and the Efficient Computation of Regular Continued Fractions. Math, of Comp. vol. 20 (1966) pp. 444–448.

[13] D. Shanks and J. W. Wrench, JR., Khintchine's Constant, Amer. Math. Monthly. vol. 66 (1959) pp. 276–279.

[14] J. W. Wrench, JR., Further evalution of Khintchine's constant. Math. of Comp. vol. 14 (1960) pp. 370–371.

[15] L. J. Lander and T. R. Parkin, A counterexemple to Euler's Sum of Powers Conjecture. Math. of Comp. vol. 21 (1967) pp. 101–103.

[16] S. Sastry, J. London Math. Soc. vol. 9 (1934) p. 242.

[17] M. Ward, Euler's problem on sums of three fourth powers. Duke Math. J. vol. 15 (1948) pp. 827–837.

(1968. 1. 30.)