

Brueckner 理論と

変分法の関係について^{*}

原 田 稔

Brueckner 理論の reaction matrix を用いて核物質の結合エネルギーを計算することは, reaction matrix によって trial function を作り出して変分計算を遂行することに等しいことを, Brueckner-Levinson の議論を修正・拡張することにより示す; Brueckner 理論は核物質の結合エネルギーの upper bound を与える。

§ 1 Introduction

「核物質」とは現実の種々の原子核のもつ性質を一般化し理想化した仮想の物質で, 同数の proton と neutron より構成され, proton 間のクーロン力は考えに入れず, 核力のみ支配される多体系である。原子核が結合エネルギーと密度に関して飽和性を示す事実により「核物質」という概念の有用性が保証される。核力が short-range であって非常に強いという特異な性質をもつにもかかわらず「独立粒子像」が原子核の多くの面で大きな成功をおさめている要因を明らかにするうえで, 核物質はきわめて重要な場を提供する。こうして核物質の性質を知ることにより原子核に特有な性質の理解を深めることが可能となるのである。さらに, 核物質の諸性質が至近距離での核力に非常に sensitive であることから, この領域の核力のふるまいについての知識を得る可能性もある。

核物質の結合エネルギーは Bethe-Weizsäcker の質量公式の volume term

* 本文は近く Progress of Theoretical Physics (Kyoto) に投稿予定の “The Brueckner Theory and its Relation to the Variation Method” のメモである。

を通じて現実の原子核の結合エネルギーと結びついている。ところで上に述べたように核力が singular な性質をもつために、多体系に対して多く用いられる Hartree-Fock 理論が原子核にはそのままでは適用できず、核力から核物質の結合エネルギーを求めることは果されずに来た。1954 年になって、Brueckner と Levinson⁽¹⁾ により、なまの核力から一旦 reaction matrix というものを作って核力の singularity をくりこみ、これに対して Hartree-Fock 流の理論を適用するという処法が考えられた。Reaction matrix には二核子相関のみが explicit にとり入れられ、他の核子の影響は Pauli 原理を通じて入っている。1958 年には Brueckner と Gammel⁽²⁾ がこの処法に従って、当時としては最も新しい核力を用いて核物質の結合エネルギーと密度を歴大な数値計算により求めた。結果は実験より求められている値と驚くべき良い一致をみせた。しかし、その後、核力の研究が進むにつれて、新しい核力を用いて結合エネルギーを計算すると、どうも実験値の約半分しか再現できないことが判りだした。^{(3)~(5)} このずれの原因は 1) Brueckner 理論の枠組自体、2) 用いた核力、3) 具体的な数値計算の過程、に求められようが、現在、この 3 種の原因がからみ合っていて決定的なことは言えない状況にある。もし、2), 3) がずれの原因でないとすると、原子核においては、二核子相関が第一義的役割をなさず、より複雑な核子相関が必要となる。このような事情をはっきりさせるために、われわれは次のような立場をとった⁽⁶⁾：核力の singularity である中心附近の非常に強い斥力は通常、無限大の強さの斥力 (hard core) で代表させているが、これを有限の強さの斥力 (soft core) とする方がより自然であること。Brueckner の reaction matrix 方程式はこのような核力の hard core のために座標空間でしか解くことができず、したがって実際の計算が非常に複雑になるが、soft core ならば reaction matrix 方程式を運動量空間で matrix element のまま解くことが可能となり計算の過程が大変短縮され、それだけ結果の信頼性が増すこと。つまり、2) の核力としてはできる限り有利なものを採用し、3) においては入りうる不定性

をできる限り取り除いてみて、上に述べた事情がどう変わるかを調べることが先決だと考えた。われわれはこのような立場で計算を遂行して、soft core を用いた最新の核力で結合エネルギーに対する実験値の 80 % 以上は確実に再現可能であることを示した。⁽⁷⁾ このことは原子核では二核子相関がやはり主要な役目をなしており、より複雑な相関は補正としてとり入れればよいことを示しているものと考えられる。

ところで、Brueckner 理論はなまの核力から核物質の結合エネルギーを求める唯一の強力な方法であるが、当然のことながら、核物質に対する Schrödinger 方程式の exact solution を与えるものではない。Exact solution に対する近似である。Schrödinger 方程式の近似解を見つける有力な手段として Rayleigh-Ritz の変分法がある。この変分法で与える近似解は常に ground state のエネルギーよりも高い値を与えるという重要な性質をもつ。つまり変分法で求めたエネルギーは、少なくともその値までは再現可能だという非常にはっきりした意味をもつ。これに対して Brueckner 理論で与えるエネルギーは ground state energy より大なのか小なのか明らかではない。したがって Brueckner 理論で結合エネルギーが 100 % 再現されたとしても、用いられた核力に対する真のエネルギーより低い値を出している可能性が残る。

この論文の目的は Brueckner 理論の reaction matrix を用いて、核力より核物質の結合エネルギーを算出する手続は、reaction matrix から trial function を構成し、それで変分計算を遂行することと同じであることを示すことにある。

§ 2 Formalism

Brueckner 理論の reaction matrix $t_\alpha = t_{ij}$ は次式で定義される⁽¹⁾：

$$t_\alpha = v_\alpha + v_\alpha \frac{Q}{E_c - H_0 - V_c} t_\alpha \equiv v_\alpha + v_\alpha \frac{Q}{e} t_\alpha, \quad (1)$$

$$V_c = \sum_{\alpha} t_{c, \alpha} = \frac{1}{2} \sum_{ij} t_{c; ij}. \quad (2)$$

ここで、 $v_{\alpha} = v_{ij}$ は2体の核力、 H_0 は kinetic energy の和であり、 $t_{c, \alpha}$ は t_{α} の、 $H_c = H_0 + V_c$ の eigenstate Ψ_m についての diagonal part、 E_c は H_c の lowest eigenvalue である：

$$H_c \Psi_c = (H_0 + V_c) \Psi_c = E_c \Psi_c. \quad (3)$$

さらに(1)式の Q は Ψ_c への projection operator である*。(2)式にて V_c は two-body operator であって、通常行なわれるような one-body operator の sum ではないことに注意しておく**。さて、Brueckner-Levinson に従って、(1)式で定義される t_{α} より次の operator を導入する：

$$F = 1 + \frac{Q}{e} \sum_{\alpha} I_{\alpha} F_{\alpha} = 1 + \frac{Q}{2e} \sum_{ijkl} I_{ij, kl} F_{kl}, \quad (4)$$

$$F_{kl} = 1 + \frac{Q}{2e} \sum_{pq \neq kl} \sum_{rs} I_{pq, rs} F_{rs}, \quad (5)$$

$$I_{\alpha} = t_{\alpha} - t_{c, \alpha}. \quad (6)$$

これらの operator の間には次の identity*** が成立することが Brueckner-Levinson⁽¹⁾ により示された：

* Q のこの定義に従えば、 t_{α} には “ladder diagram” だけでなく “particle-hole”, “hole-hole” scattering も入る。しかし、中間状態で hole へ jump することによる effect は非常な highly excited configuration の場合以外は $1/N$ (N : 粒子数) の order であるし、highly excited configuration の lowest state への feed back による effect は非常に小さいので、通常なされる定義

$$Q(m, n) = \begin{cases} 1 & \dots k_m, k_n > k_F \\ 0 & \dots \text{その他の場合,} \end{cases}$$

と上での定義の差による E_c への effect は無視してよい。しかし finite nucleus の場合には appreciable となるであろう。

** この場合も、定義の差による E_c への effect は*と同様な事情により、核物質に対しては無視してよいと考えられる。

*** この式には v_{α} がなまの形で入っているので hard core の場合には用いられない。しかし、hard core より soft core の方が、より realistic で、結合エネルギーに有利であることは確かな事実となってきたので、soft core の場合に話を限っても議論の趣旨が本質的にそこなわれることはない。

$$\begin{aligned}
(E_c - H_0 - \sum_{\alpha} v_{\alpha}) F\Psi_c = \sum_{\alpha} \left\{ t_{c, \alpha} \frac{Q}{e} I_{\alpha} + v_{\alpha} \frac{Q}{e} t_{c, \alpha} \right\} F_{\alpha} \Psi_c \\
+ \sum_{\alpha} (Q-1) I_{\alpha} F_{\alpha} \Psi_c.
\end{aligned} \tag{7}$$

われわれの意図は $\varphi = F\Psi_c$ を trial function として, $H = H_0 + \sum_{\alpha} v_{\alpha}$ の期待値を計算することにある。H の lowest eigenvalue を E_0 とすると, よく知られているように, Rayleigh-Ritz の変分法により次式が成立する:

$$E_0 \leq \frac{\langle \varphi | H | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle} = \frac{\langle F\Psi_c | H | F\Psi_c \rangle}{\langle F\Psi_c | F\Psi_c \rangle}. \tag{8}$$

ここで $HF\Psi_c$ に対して, (7)式を用いて書換えて

$$\begin{aligned}
E_0 \leq & \left[\langle F\Psi_c | E_c F\Psi_c \rangle + \langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} (1-Q) I_{\alpha} F_{\alpha} \Psi_c \right. \\
& \left. - \langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} \left\{ t_{c, \alpha} \frac{Q}{e} I_{\alpha} + v_{\alpha} \frac{Q}{e} t_{c, \alpha} \right\} | F_{\alpha} \Psi_c \rangle \right] / \langle F\Psi_c | F\Psi_c \rangle, \tag{9} \\
= & E_c + \frac{\langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} (1-Q) I_{\alpha} F_{\alpha} \Psi_c \rangle}{\langle F\Psi_c | F\Psi_c \rangle} \\
& - \frac{\langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} \left\{ t_{c, \alpha} \frac{Q}{e} I_{\alpha} + v_{\alpha} \frac{Q}{e} t_{c, \alpha} \right\} | F_{\alpha} \Psi_c \rangle}{\langle F\Psi_c | F\Psi_c \rangle}, \tag{10}
\end{aligned}$$

を得る。(10)式の第1項 E_c は明らかに粒子数 N に比例する量である。核物質の場合は $N \rightarrow \infty$ であるから, (第2項+第3項) / $E_c \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$ が言えれば, $E_0 \leq E_c$ が成立して, われわれの目的が達せられる。以下で(10)式の第2項と第3項の N -dependence をみることにする。

§ 3 N-Dependence

(10)式の第2項, 第3項の N -dependence は既に Brueckner-Levinson によって調べられ, 第2項 $\propto N$ で E_c への correction を与え, 第3項 = N -independent で main term E_c に対しては $1/N$ の correction しか与えないとされていたが, その後 Brueckner⁽⁸⁾ により unlinked cluster の問題が出され, 第2項の寄与の中には, N の高次の巾に比例する term があることが

指摘され, Brueckner-Levinson の得た結論は正しくないことがわかった。彼らの議論では, F は unitary operator として扱っているが実は F は unitary ではない:

$$\langle F\Psi_c | F\Psi_c \rangle \neq \langle \Psi_c | \Psi_c \rangle = 1. \quad (11)$$

F も unlinked cluster を生み出すのである。したがって, 分母の $\langle F\Psi_c | F\Psi_c \rangle$ の unlinked cluster contribution と分子の $\langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} (1-Q) | I_{\alpha} F_{\alpha} \Psi_c \rangle$, あるいは $\langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} \left\{ t_{c, \alpha} \frac{Q}{e} I_{\alpha} + v_{\alpha} \frac{Q}{e} t_{c, \alpha} \right\} | F_{\alpha} \Psi_c \rangle$ から出てくる unlinked cluster contribution とが cancel する事情にあるが, このことを次に調べる。

A. Normalization: $\langle F\Psi_c | F\Psi_c \rangle$

(4)式を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} \langle F\Psi_c | F\Psi_c \rangle &= \langle \Psi_c | F^{\dagger} F | \Psi_c \rangle \\ &= \langle \Psi_c | \left\{ 1 + \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{\dagger} I_{\alpha}^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right)^{\dagger} \right\} \left\{ 1 + \frac{Q}{e} \sum_{\beta} I_{\beta} F_{\beta} \right\} | \Psi_c \rangle \\ &= \langle \Psi_c | \Psi_c \rangle + \langle \Psi_c | \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{\dagger} I_{\alpha}^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right)^{\dagger} | \Psi_c \rangle + \langle \Psi_c | \frac{Q}{e} \sum_{\beta} I_{\beta} F_{\beta} | \Psi_c \rangle \\ &\quad + \langle \Psi_c | \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{\dagger} I_{\alpha}^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right)^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right) \sum_{\beta} I_{\beta} F_{\beta} | \Psi_c \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ここで†印は hermite conjugate を示す。(12)式で第2項, 第3項は Q -operator のためにゼロになる:

$$\begin{aligned} \langle F\Psi_c | F\Psi_c \rangle &= 1 + \langle \Psi_c | \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{\dagger} I_{\alpha}^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right)^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right) \sum_{\beta} I_{\beta} F_{\beta} | \Psi_c \rangle \\ &= 1 + (1/4) \sum_{ijkl} \sum_{pqrs} \sum_{mn} \langle \Psi_m | F_{kl} | \Psi_c \rangle^* \langle \Psi_m | I_{ij, kl}^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right)^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right) I_{pq, rs} | \Psi_n \rangle \\ &\quad \times \langle \Psi_n | F_{rs} | \Psi_c \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

次に(13)式の第2項目の N -dependence をみるために, 次のように変形する:

$$\begin{aligned} \text{第2項} &= (1/4) \sum_{\mathbf{R}} \sum_{ijkl} \sum_{pqrs} \langle \Psi(pq, kl; \mathbf{R}) | F_{kl} | \Psi_c \rangle^* \\ &\quad \times \langle \Psi(rs, ij; \mathbf{R}) | F_{rs} | \Psi_c \rangle \\ &\quad \langle \Psi(pq, kl; \mathbf{R}) | I_{ij, kl}^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right)^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right) I_{pq, rs} | \Psi(rs, ij; \mathbf{R}) \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

ここで R は (ij, kl) または (pq, rs) 以外の $N-4$ 々の nucleon の state を示す, *i. e.*, $\Psi(pq, kl; R)$ と $\Psi(rs, ij; R)$ とは (pq, kl) , (rs, ij) の 4 々の state だけが異なる。

$\langle \Psi(pq, kl; R) | F_{kl} | \Psi_c \rangle$ の形の matrix element は F_{kl} のために unlinked cluster をもち, N の高次の巾の term を含みその explicit evaluation は容易ではない。それで, 上にも述べてきたように, このような higher-power term が分子にだけでなく分母の normalization term にも出てくるので, またわれわれが知りたいのは (10) 式の第 2 項, 第 3 項の N -dependence であって, その absolute value ではないのであるから, 分母, 分子の N -dependence を正しく保存し, その ratio の N -dependence を知るようにすればよい。これが idea である。この方針に沿って,

$$Y(N, R) = \overline{\langle \Psi(pq, kl; R) | F_{kl} | \Psi_c \rangle}, \quad (15)$$

$$X(N, R) = \overline{\langle \Psi(pq, kl; R) | I_{ij, kl} \left(\frac{Q}{e} \right)^\dagger \left(\frac{Q}{e} \right) I_{pq, rs} | \Psi(rs, ij; R) \rangle}, \quad (16)$$

とおく。上式にて $\overline{\langle \Psi(pq, kl; R) | F_{kl} | \Psi_c \rangle}$ は (pq, kl) について $\langle \Psi(pq, kl; R) | F_{kl} | \Psi_c \rangle$ を平均することを示す。同様に (16) 式では (pq, kl, ij) についての平均を示す。ここで N -dependence は (pq, kl) または (pq, kl, ij) には independent であることに注意する。 $Y(N, R)$ の N -dependence は複雑であるが, $X(N, R)$ の N -dependence は割合に簡単で次のようになる:

$$X(N, R) \sim \begin{cases} N^{-2} \dots & 4 \text{ 粒子以外はほとんどすべて Fermi} \\ & \text{sea の中にある場合,} \\ N^{-4} \dots & \text{ほとんどが Fermi surface の上にあ} \\ & \text{る場合.} \end{cases} \quad (17)$$

これらの差異は (16) 式に energy denominator e を含むところから生じる。(14) 式にて (ij, kl) , (pq, rs) にそれぞれ momentum conservation が作用するから $\sum_{ijkl} \sum_{pqrs}$ は $(N^4-1)^2 = N^6$ の factor を生む。以上まとめて次の結果を得る:

$$\begin{aligned} (14) \text{式} &= \text{constant} \times \sum_{\mathbf{R}} N^6 \cdot Y^*(N, R) Y(N, R) X(N, R) \\ &\sim N^6 \cdot \sum_{\mathbf{R}} |Y(N, R)|^2 \cdot X(N, R). \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{B. } \langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} (1-Q) I_{\alpha} F_{\alpha} \Psi_c \rangle$$

$1-Q$ は Ψ_c をとりだす operator であるから,

$$\begin{aligned} \langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} (1-Q) I_{\alpha} F_{\alpha} \Psi_c \rangle &= \langle \Psi_c | \sum_{\alpha} I_{\alpha} F_{\alpha} | \Psi_c \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle \Psi_c | I_{ij,kl} F_{kl} | \Psi_c \rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

となる。さらにこれを $I_{ij,kl}$ と F_{kl} の matrix element の積に分ける：

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl} \langle \Psi_c | I_{ij,kl} F_{kl} | \Psi_c \rangle &= \sum_{ijkl} \sum_m \langle \Psi_c | I_{ij,kl} | \Psi_m \rangle \langle \Psi_m | F_{kl} | \Psi_c \rangle \\ &= \sum_{ijkl} \sum_m \langle \Psi(kl, ij) | F_{kl} | \Psi_c \rangle \langle ij | I | kl \rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

ここで $\Psi(kl, ij)$ は Ψ_c と (kl, ij) state だけが異なる。したがって,

$$\Psi(kl, ij) = \Psi(kl, ij; R)_{R=0} = \Psi(kl, ij; 0), \quad (21)$$

である。 $\langle ij | I | kl \rangle \sim N^{-1}$ であるから結局次のようになる：

$$\begin{aligned} \langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} (1-Q) I_{\alpha} F_{\alpha} | \Psi_c \rangle \\ = \text{constant} \times N^3 \times \overline{\langle \Psi(kl, ij; 0) | F_{kl} | \Psi_c \rangle} \times N^{-1} \sim N^2 \cdot Y(N, 0). \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{C. } \langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} \left\{ t_{c, \alpha} \frac{Q}{e} I_{\alpha} + v_{\alpha} \frac{Q}{e} t_{c, \alpha} \right\} | F_{\alpha} \Psi_c \rangle$$

A の場合と同様に F の定義を代入して変形する：

$$\begin{aligned} \langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} \left\{ t_{c, \alpha} \frac{Q}{e} I_{\alpha} + v_{\alpha} \frac{Q}{e} t_{c, \alpha} \right\} | F_{\alpha} \Psi_c \rangle \\ = \sum_{\alpha} \langle \Psi_c | \left\{ 1 + \sum_{\beta} F_{\beta}^{\dagger} I_{\beta}^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right)^{\dagger} \right\} \left\{ t_{c, \alpha} \frac{Q}{e} I_{\alpha} + v_{\alpha} \frac{Q}{e} t_{c, \alpha} \right\} F_{\alpha} | \Psi_c \rangle \\ = \sum_{\alpha} \langle \Psi_c | v_{\alpha} \frac{Q}{e} t_{c, \alpha} F_{\alpha} | \Psi_c \rangle + \sum_{\alpha\beta} \langle \Psi_c | F_{\beta}^{\dagger} I_{\beta}^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right)^{\dagger} t_{c, \alpha} \frac{Q}{e} I_{\alpha} F_{\alpha} | \Psi_c \rangle \\ + \sum_{\alpha\beta} \langle \Psi_c | F_{\beta}^{\dagger} I_{\beta}^{\dagger} \left(\frac{Q}{e} \right)^{\dagger} v_{\alpha} \frac{Q}{e} t_{c, \alpha} F_{\alpha} | \Psi_c \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

尚、ここで $\langle \Psi_c | t_{c, \alpha} \frac{Q}{e} I_{\alpha} F_{\alpha} | \Psi_c \rangle = 0$ なることを用いた。(23)式の第1項 = J_1 ,

第2項 = J_2 , 第3項 = J_3 とおく。

$$J_1: \quad J_1 = \sum_{\alpha} \langle \Psi_c | v_{\alpha} \frac{Q}{e} t_{c, \alpha} F_{\alpha} | \Psi_c \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \sum_m \langle \Psi_c | v_{ij, kl} \left(\frac{Q}{e} \right) t_{kl, kl} | \Psi_m \rangle \langle \Psi_m | F_{kl} | \Psi_c \rangle. \quad (24)$$

しかるに, $\langle \Psi_c | v_{ij, kl} \left(\frac{Q}{e} \right) t_{kl, kl} | \Psi_m \rangle$ にて non-vanishing contribution を与えるのは Ψ_m が excited state に 2 ケの粒子をもつ時だけである。したがって $\langle \frac{Q}{e} \rangle \sim N^0$ である。 $t_{kl, kl} \sim N^{-1}$, $v_{ij, kl} \sim N^{-1}$ であるから J_1 の N-dependence は (20) 式に N^{-1} をかけたものに等しい。ゆえに (22) 式より,

$$J_1 \sim N^2 \cdot Y(N, 0) \cdot N^{-1} = N \cdot Y(N, 0), \quad (25)$$

を得る。

$$\begin{aligned} J_2: \quad J_2 &= \sum_{\alpha\beta} \langle \Psi_c | F_\beta^\dagger I_\beta^\dagger \left(\frac{Q}{e} \right)^\dagger t_{c, \alpha} \frac{Q}{e} I_\alpha F_\alpha | \Psi_c \rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{R}} \sum_{ijkl} \sum_{pqrs} \langle \Psi(pq, kl; \mathbf{R}) | F_{kl} | \Psi_c \rangle^* \langle \Psi(rs, ij; \mathbf{R}) | F_{rs} | \Psi_c \rangle \\ &\quad \times \langle \Psi(pq, kl; \mathbf{R}) | I_{ij, kl}^\dagger \left(\frac{Q}{e} \right)^\dagger t_{pq, pq} \frac{Q}{e} I_{pq, rs} | \Psi(rs, ij; \mathbf{R}) \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

しかるに, $\langle \Psi(pq, kl; \mathbf{R}) | I_{ij, kl}^\dagger \left(\frac{Q}{e} \right)^\dagger t_{pq, pq} \frac{Q}{e} I_{pq, rs} | \Psi(rs, ij; \mathbf{R}) \rangle$ の N-dependence は, normalization に出てくる $\langle \Psi(pq, kl; \mathbf{R}) | I_{ij, kl}^\dagger \left(\frac{Q}{e} \right)^\dagger \frac{Q}{e} I_{pq, rs} | \Psi(rs, ij; \mathbf{R}) \rangle$ に $t_{pq, pq}$ から出る N^{-1} をかけたものに等しい。ゆえに (18) 式を用いて次の結果を得る:

$$\begin{aligned} J_2 &\sim N^6 \cdot \sum_{\mathbf{R}} |Y(N, \mathbf{R})|^2 X(N, \mathbf{R}) \cdot N^{-1} \\ &= N^5 \cdot \sum_{\mathbf{R}} |Y(N, \mathbf{R})|^2 X(N, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} J_3: \quad J_3 &= \sum_{\alpha\beta} \langle \Psi_c | F_\beta^\dagger I_\beta^\dagger \left(\frac{Q}{e} \right)^\dagger v_\alpha \frac{Q}{e} t_{c, \alpha} | \Psi_c \rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{R}} \sum_{ijkl} \sum_{pqrs} \langle \Psi(pq, kl; \mathbf{R}) | F_{kl} | \Psi_c \rangle^* \langle \Psi(rs, ij; \mathbf{R}) | F_{rs} | \Psi_c \rangle \\ &\quad \times \langle \Psi(pq, kl; \mathbf{R}) | I_{ij, kl}^\dagger \left(\frac{Q}{e} \right)^\dagger v_{pq, rs} \frac{Q}{e} t_{rs, rs} | \Psi(rs, ij; \mathbf{R}) \rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

上式と (26) 式 (J_2 の expression) をくらべてみると, 最後の matrix element の中で $t_{pq, pq} \frac{Q}{e} I_{pq, rs} \longrightarrow v_{pq, rs} \frac{Q}{e} t_{rs, rs}$ と変わっているだけである。し

たがって J_3 の N -dependence は J_2 と同じである：

$$J_3 \sim N^5 \cdot \sum_{\mathbf{R}} |Y(N, \mathbf{R})|^2 X(N, \mathbf{R}). \quad (29)$$

以上をまとめて、(10) 式の第2項、第3項の N -dependence を知ることができる。

(10) 式の第2項：

$$\frac{\langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} (1-Q) | I_{\alpha} F_{\alpha} \Psi_c \rangle}{\langle F\Psi_c | F\Psi_c \rangle} \sim \frac{N^2 \cdot Y(N, 0)}{N^6 \cdot \sum_{\mathbf{R}} |Y(N, \mathbf{R})|^2 X(N, \mathbf{R})}. \quad (30)$$

(17) 式を考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{Y(N, 0)}{N^2 \cdot \sum_{\mathbf{R}} |Y(N, \mathbf{R})|^2} &\lesssim \frac{N^2 \cdot Y(N, 0)}{N^6 \cdot \sum_{\mathbf{R}} |Y(N, \mathbf{R})|^2 X(N, \mathbf{R})} \\ &\lesssim \frac{Y(N, 0)}{\sum_{\mathbf{R}} |Y(N, \mathbf{R})|^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

$Y(N, \mathbf{R})$ は N の高次の巾を含んでいて、

$$Y(N, \mathbf{R}) \rightarrow \infty \text{ as } N \rightarrow \infty, \quad (32)$$

であることから次のようになる：

$$\frac{\langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} (1-Q) | I_{\alpha} F_{\alpha} \Psi_c \rangle}{\langle F\Psi_c | F\Psi_c \rangle} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty. \quad (33)$$

(10) 式の第3項：

$$\begin{aligned} \frac{\langle F\Psi_c | \sum_{\alpha} \left\{ t_{c, \alpha} \frac{Q}{e} I_{\alpha} + v_{\alpha} \frac{Q}{e} t_{c, \alpha} \right\} | F_{\alpha} \Psi_c \rangle}{\langle F\Psi_c | F\Psi_c \rangle} \\ \sim \frac{N^5 \cdot \sum_{\mathbf{R}} |Y(N, \mathbf{R})|^2 X(N, \mathbf{R})}{N^6 \cdot \sum_{\mathbf{R}} |Y(N, \mathbf{R})|^2 X(N, \mathbf{R})} = N^{-1} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (34)$$

したがって(10)式は $N \rightarrow \infty$ の核物質に対して

$$E_0 \leq E_c, \quad (35)$$

となりわれわれの目的は達せられた。

§ 4 Conclusion

以上でみてきたように, hard core をもたない interaction が支配している核物質においては, Brueckner 理論の reaction matrix 方程式を解いて得られる model energy E_c は真の energy E_0 の上限を与えることがわかった。Brueckner 理論は Hartree-Fock method のもつ変分的性格を保存するものであることが明らかになったのである。

Acknowledgment

この問題に興味をもたれ, 議論してくださった北大物理教室の田中一教授, 京大基礎物理学研究所の玉垣良三教授に感謝します。

References

- (1) K. A. Brueckner and C. A. Levinson, Phys. Rev. **97**, 1344 (1955).
- (2) K. A. Brueckner and J. L. Gammel, Phys. Rev. **109**, 1023 (1958).
- (3) K. A. Brueckner and K. S. Masterson, Jr., Phys. Rev. **128**, 2267 (1963).
- (4) M. Razary, Phys. Rev. **130**, 1091 (1963).
- (5) Y. Akaishi, K. Takada and S. Takagi, Progr. Theoret. Phys. **35**, 978 (1966); **36**, 1135 (1966).
- (6) M. Harada, R. Tamagaki and H. Tanaka, Progr. Theoret. Phys. **35**, 177 (1966); **36**, 1003 (1966).
- (7) M. Harada, Progr. Theoret. Phys. **38**, 353 (1967).
- (8) K. A. Brueckner, Phys. Rev. **100**, 36 (1955).

