勾配法と変分問題

古 瀬 大 六

§1 前書き：—

多くの物理現象の均衡状態が，或る函数（ポテンシャル函数）の極大又は極小の点として記述できることは，周知の通りである。与えられた初期状態からスタートして，その均衡状態に向って収束する過程もまた，上記の函数の勾配（gradient）に等しい力をうけて，その力線上を進む過程として，記述できる場合が少くない。

同じ手法を，経済諸量の運動の表わし方として利用できるにちがいないと気がついた最初の人は，MIT のサミュエルソンであった。彼の最初の着想以来現在まで，約10年にわたって，このアナロジーを追求しようとする多くの試みが行なわれてきた。然し，その試みは，ようやく開始されたばかりであり，今後開拓しなければならない幾多の問題が残されている。

その一つは，与えられた函数の極値点を求める問題から，更に，与えられた函数を極大又は極小にするような函数を求める問題に進むことである。数学的には，単純な極値問題から，複雑な変分問題（variational problems）に進むことを意味する。もう一つの残された問題は，勾配運動（gradient motion）を，単なる紙上計画のやりとり，取引所におけるワルラス的 tâtonnement 過程としてでなしに，現実の生産・現実の消費行動として表わしてみることである。現実の経済活動になってくると，一たん実施した生産・消費は，後でこれを取消すことは不可能であり，売れ残り在庫，生産設備の遊休が発生してきて，その行動方程式は非常に複雑になってくるであろう。

以下，この論文で取り上げようとするのは，このうちの第一の問題，すなわち，変分問題を勾配法によって解くことの可能性を追求すること，である。これは，数学的に多くの困難が予想される問題であり，筆者の貧しい数学的能力を以てしては，完全な解決を与えることはむづかしい。ただ，このような重

要な問題が未解決のまま残されていることを指摘し，より優れた人々の興味と関心とを呼び起すことができさえすれば，この論文の役割は果たされたものといってよいであろう。

§ 2　変分問題（discrete な場合）の勾配法による解法：—

変分法のどの教科書にも出てくる典型的な変分問題は，次のようなものである。閉区間 $[a, b]$ において連続な変数 x と，同じく連続な函数 $u(x)$, du/dxを考える。この三つの変数についての連続且つ微分可能な函数 $F\{u(x), du/dx, x\}$ が与えられたとき，

$$J(u)=\int_a^b F\{u(x), du/dx, x\}dx$$

を最小にする函数 $u=\bar{u}(x)$ を求めよ。ただし，

$$u(a)=c_0,\quad u(b)=c_1$$

とする。

われわれが知っている勾配法は，このような停留函数 $u(x)$ を求める問題についてではなく，停留変数 $(x_1,\cdots, x_n)$ を求める問題についてである。そこで連続函数 $u(x)$ を，Δx を問題とする n 個の区間に区切って，$u_1, u_2,\cdots,u_n$ という n 個の変数の組によって近似的に表わすことを考えてみる。こうすれば，この変分問題は，普通の型の極値問題に書き換えられ，従って，勾配法をそのままの形で適用することが可能となる。すなわち，問題は，

$$J(u)\equiv\sum_{i=1}^{n} F\left\{u_i, \frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}, x_i\right\}$$

を最小にする $u_1,\cdots, u_n$ の値を求めよ，ということになってくる。ただし，$u_0=c_1$, $u_n=c_1$ とする。

この函数 F が，すべての変数 $u_1,\cdots, u_n$ について凸函数であれば，その停留値は同時に大域的な最小値に一致する。従って，任意の初期値からスタートする勾配方程式の解は，この極小点に向って収束し，その極小点で安定的に停止する。すなわち，変数 $u_1,\cdots,u_n$ を，この勾配運動に要する時間 t をパラメーターとして表わせば，勾配運動方程式は，

$$\frac{du_i(t)}{dt}=-\frac{\partial\Sigma_{i=1}^{n}F\{u_i,(u_i-u_{i-1})/\Delta x,\ x_i\}}{\partial u_i}$$

$$=-\frac{\partial F\{u_i,(u_i-u_{i-1})/\Delta x,,x_i\}}{\partial u_i}-\frac{\partial F\{u_{i+1},(u_{i+1}-u_i)/\Delta x,x_{i+1}\}}{\partial u_i}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(i=1,\cdots,n)$$

となる。ここで，簡単のために，$F\{u_i,(u_i-u_{i-1})/\Delta x,x_i\}$ を $F(x_i)$ で表わせば，

$$\frac{du_i(t)}{dt}=-\frac{\partial F(x_i)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial u_i}-\frac{\partial F(x_i)}{\partial(du/dx)}\cdot\frac{\partial\{(u_i-u_{i-1})/\Delta x\}}{\partial u_i}$$

$$-\frac{\partial F(x_{i+1})}{\partial(du/dx)}\cdot\frac{\partial\{(u_{i+1}-u_i)/\Delta x\}}{\partial u_i}$$

$$=-\frac{\partial F(x_i)}{\partial u}-\frac{\partial F(x_i)}{\partial(du/dx)}\cdot\frac{1}{\Delta x}+\frac{\partial F(x_{i+1})}{\partial(du/dx)}\cdot\frac{1}{\Delta x}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(i=1,\cdots,n)$$

となる。

これは，典型的な concave programmig についての勾配運動方程式であり，どの初期値からスタートしても，必らず，問題の最適解に収束する。

§ 3　変分問題（連続の場合）の勾配法による解法：—

上の連立微分方程式において，x 軸の切り目を無限に細かくして行なったならば，式の形はどのように変化するであろうか。まず個々の微分方程式について考えてみよう。n 個の数 $x_1,\cdots,x_n$ は，これによって，c_1 から c_2 までの閉区間内のすべての実数値をとることになる。$u_1,\cdots,u_n$ も，従って，x についての連続函数 $u(x)$ の $x=x_1,\cdots,x=x_n$ における値に外ならないことになる。それ故，上の式は，次のように改められる。

$$\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial t}=-\frac{\partial F\{u(x_i),du(x_i)/dx,x_i\}}{\partial u}-\frac{\partial F\{u(x_i),du(x_i)/dx,x_i\}}{\partial\{du/dx\}}\cdot\frac{1}{dx}$$

$$+\frac{\partial F\{u(x_{i+1}),du(x_{i+1})/dx,x_{i+1}\}}{\partial\{du/dx\}}\cdot\frac{1}{dx}$$

$$=-\frac{\partial F\{u(x_i),du(x_i)/dx,x_i\}}{\partial u}+d\left[\frac{\partial F\{u(x_i),du(x_i)/dx,x_i\}}{\partial u}\right]/dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(i=1,\cdots,n)$$

次に，$\Delta x \to 0$ になるに従って，i 番目の方程式と，$(i+1)$ 番目の方程式との間の間隔も無限に小さくなるから，全体系は，次の唯一つの偏微分方程式にまとめ上げられてしまう。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial F\{u(x),du(x)/dx,x\}}{\partial u}+\frac{d[\partial F\{u(x),du(x)/dx,x\}/\partial(du/dx)]}{dx}$$

更に簡単化して，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{d\{\partial F/\partial(du/dx)\}}{dx}$$

この右辺が，与えられた変分問題についての Euler の微分方程式に外ならないことに，読者は直ちに気附かれるであろう。

§4　一つの計算例（最短曲線）：—

二点 a, b を結ぶ最短曲線は直線であること，勿論である。これを変分問題として表わすならば，それは，

$$J(u)=\int_a^b\sqrt{u'(x)^2+1}\,dx$$

$$u(a)=c_1,\ u(b)=c_2$$

を最小にする函数 $u(x)$ を求めることに等しい。そのオイラーの微分方程式は $F_u=0$ であるから

$$\frac{d\{\partial F/\partial(du/dx)\}}{dx}=d\left\{\frac{u'(x)}{\sqrt{u'(x)^2+1}}\right\}/dx$$

$$=\frac{u''(x)\{u'(x)^2+1\}-u'(x)^2u''(x)}{\sqrt{u'(x)^2+1}\cdot\{u'(x)^2+1\}}$$

$$=\frac{u''(x)}{\sqrt{\{u'(x)^2+1\}^3}}=0$$

となる。従って，その勾配運動方程式は

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{u''(x)}{\sqrt{\{u'(x)^2+1\}^3}}$$

で表わされる。

この $J(u)=\int_a^b \sqrt{u'(x)^2+1}\,dx$ が区間 $[a, b]$ 上のすべての点 x_i において，$u(x_i)$ の凸函数であることは，次のようにして証明される。

凸函数の定義は，二つの任意の連続解 $u(x)$ と $\bar{u}(x)$ とについて，次の不等式関係が成り立つことを要請している。

$$\lambda J(u)+(1-\lambda)J(\bar{u})>J\{\lambda u+(1-\lambda)\bar{u}\}$$

われわれの問題としている函数 $J(u)=\int_a^b \sqrt{u'(x)^2+1}\,dx$ が，この条件を満たしているかどうかを検討してみよう。

$$\lambda J(u)+(1-\lambda)J(\bar{u})$$
$$=\lambda\int_a^b \sqrt{u'(x)^2+1}\,dx+(1-\lambda)\int_a^b \sqrt{\bar{u}'(x^2)+1}\,dx$$

$$J\{\lambda u+(1-\lambda)\bar{u}\}$$
$$=\int_a^b \sqrt{\{\lambda u'(x)+(1-\lambda)\bar{u}'(x)\}^2+1}\,dx$$
$$=\int_a^b \sqrt{\lambda^2 u'(x)^2+(1-\lambda)^2\bar{u}'(x)^2+2\lambda(1-\lambda)u'(x)\bar{u}'(x)+1}\,dx$$

何れの項も非負であるから，それぞれ二乗したものの大小を比べればよい。

$$\{\lambda J(u)+(1-\lambda)J(\bar{u})\}^2$$
$$=\int_a^b \lambda^2\{u'(x)^2+1\}\,dx+\int_a^b (1-\lambda)^2\{\bar{u}'(x)^2+1\}\,dx$$
$$+\int_a^b 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{u'(x)^2+1}\sqrt{\bar{u}'(x)^2+1}\,dx$$
$$=\int_a^b \lambda^2 u'(x)^2 dx+\int_a^b (1-\lambda)^2\bar{u}'(x)^2 dx+\int_a^b \{\lambda^2+(1-\lambda)^2\}\,dx$$
$$+\int_a^b 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{u'(x)^2+1}\sqrt{\bar{u}'(x)^2+1}\,dx$$

$$J\{\lambda u+(1-\lambda)\bar{u}\}^2$$
$$=\int_a^b \lambda^2 u'(x)^2 dx+\int_a^b (1-\lambda)^2\bar{u}'(x)^2 dx+\int_a^b 1\,dx$$
$$+\int_a^b 2\lambda(1-\lambda)u'(x)\bar{u}'(x)\,dx$$

$$\therefore \{\lambda J(u)+(1-\lambda)J(\bar{u})\}^2-J\{\lambda u+(1-\lambda)\bar{u}\}^2$$

$$=\int_a^b 2\lambda(\lambda-1)dx+\int_a^b 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{u'(x)+1}\sqrt{\bar{u}'(x)+1}\,dx$$

$$-\int_a^b 2\lambda(1-\lambda)u'(x)\bar{u}'(x)dx$$

$$=\int_a^b 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{u'(x)^2+1}\sqrt{\bar{u}'(x)^2+1}\,dx$$

$$-\int_a^b 2\lambda(1-\lambda)\{u'(x)\bar{u}'(x)+1\}\,dx$$

$$=2\lambda(1-\lambda)\int_a^b\left[\sqrt{u'(x)^2+1}\sqrt{\bar{u}'(x)^2+1}-\{u'(x)\bar{u}'(x)+1\}\right]dx$$

上の式の係数は $2\lambda(1-\lambda)$ 非負であり，$\sqrt{u'(x)^2+1}>0$，$\sqrt{\bar{u}'(x)^2+1}>0$ である。従って，もしも最終項 $\{u'(x)\bar{u}'(x)+1\}$ が負であるならば，全体は必らず正となる。最終項が非負であるならば，被積分項の二乗をとって比較すればよい。すなわち，

$$\{\sqrt{u'(x)^2+1}\sqrt{\bar{u}'(x)^2+1}\}^2-\{u'(x)\bar{u}'(x)+1\}^2$$

$$=\{u'(x)^2+1\}\{\bar{u}'(x)^2+1\}-\{u'(x)^2\bar{u}'(x)^2+2u'(x)\bar{u}'(x)+1\}$$

$$=u'(x)^2+\bar{u}'(x)^2-2u'(x)\bar{u}'(x)$$

$$=\{u'(x)-\bar{u}'(x)\}^2>0 \qquad \{u(x)\neq\bar{u}(x)\}$$

となり，$u'(x)\bar{u}'(x)+1$ の符号の如何にかかわらず

$$\{\lambda J(u)+(1-\lambda)J(\bar{u})\}-J\{\lambda u+(1-\lambda)\bar{u}\}>0$$

$$(u\neq\bar{u})$$

であること，すなわち，$J(u)$ が u の厳密な意味での凸函数であることが証明された。この凸函数性は，勾配方程式の任意の初期値よりの収束性を保証するものである。

§ 5　不連絡函数の場合：—

与えられた変分問題の最適解 $u(x)$ が，閉区間 [a, b] において有界ではあるが，有限個の不連続点をもつ場合，すなわち，$u(x)$ が piece-wise linear な場合が少なくない。勾配法が，このような場合にもなお，正しい解を与えることのできるような配慮を加えておくことが望ましい。

任意の初期解 $u(x)$ からスタートして，不連続点を含む最適解 $\bar{u}(x)$ に収束するためには，その収束過程のどこかで，連続曲線に突然不連続点が現われてこなければならない。そのためには，その点において，du/dx が正又は負の無限大になる必要がある。その結果，その点における u の値は正又は負の無限大に跳ぶであろうが，最適解における $u(x)$ の値は，その切断点において勿論ある有限値をとるはずであるから，そのような無限遠点への飛躍は，正しい解を与えない。すなわち，前述の勾配方程式は，u の不連続切断点における正しい値を与えてはくれない。

これを解決するための一つの対策は，$u(x)$ の代りに，

$$\int_a^x u(\tau)\,d\tau = U(x)$$

を使うことである。$u(x)$ が有限個の点において不連続であっても，それが有界でありさえすれば，その積分値 $U(x)$ は連続曲線になる。従って，勾配方程式 $\partial u/\partial t = -\partial F/\partial u + d\{\partial F/\partial(du/dx)\}/dx$ を積分して，

$$\int_\iota^t \{\partial u(\tau)/\partial\tau\}\,d\tau = -\int_\iota^t (\partial F/\partial u)\,d\tau + \int_a^t \frac{d\{\partial F/\partial(du/d\tau)\}}{d\tau}\,dx$$

$$\therefore\ \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = -\int_a^t \frac{\partial F(x, U', U'')}{\partial U'}\,d\tau + \frac{\partial F\{x, U', U''\}}{\partial U''} \quad +\text{定数}$$

とすれば，困難を回避することができる。

この右辺は，被積分函数がある点で無限大又は無限小になったとしても，それを積分することによりその値を有限におさえる（その点で不連続な値をとるけれども $\pm\infty$ にはならない）ことが可能になる。従って，$U(x,t)$ はこの点でその傾きは不連続的に変るけれども，曲線自体としては切れ目のない連続な曲線として収束を続けることができるわけである。

§ 6　条件附き変分問題の場合：—

concave programming problems，すなわち，不等式条件附き極値問題が，そのラグランジュ函数の鞍点を求める問題に外ならないこと，従って，その場合にも勾配法の適用が可能であること，周知の通りである。とすれば，いまわれわれが問題としている変分問題についてもまた，同様の取り扱いが可能になり

はしないだろうか。

例えば，次の $J(u)$ を最小にする問題を考えてみよう。

$$J(u)=\int_a^b F(u, du/dx, x)\,dx \quad \cdots\cdots(6.1)$$

$$-\int_a^x G(u, du/dx, \tau)\,d\tau \leqq 0 \quad \cdots\cdots(6.2)$$

$$u(x) \geqq 0 \quad \cdots\cdots(6.3)$$

これに対応するラグランジュ函数中 $\phi(u, \lambda)$ は，

$$\int_a^b \phi(u, \lambda)\,dt \equiv \int_a^b \left[F(u, du/dx, x) - \lambda(x)\int_a^x G(u, du/dx, \tau)\,d\tau\right] dt$$

であり，その勾配方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial u} + \dfrac{d\{\partial\phi/\partial(du/dx)\}}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial u} + \displaystyle\int_x^b \lambda(\tau)\,d\tau \dfrac{\partial G}{\partial u} \\ \qquad + \dfrac{d\{\partial F/\partial(du/dx)\}}{dx} - \displaystyle\int_x^b \lambda(\tau)\,d\tau \dfrac{d\{\partial G/\partial(du/dx)\}}{dt} \quad \cdots\cdots(6.4) \\ \dfrac{\partial \lambda(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda} - \dfrac{d\{\partial\phi/\partial(d\lambda/dx)\}}{dt} = -\displaystyle\int_a^x G(u, du/dx, \tau)\,d\tau \quad \cdots\cdots(6.5) \end{cases}$$

となる。ただし，上の (6.4), (6.5) の右辺については，それぞれ $u(x, t)$, $\lambda(x, t)$ が 0 又は負であって，かつ同時にそれぞれの右辺の値が負であるような区間については，0 となるものと約束する。これは，非負変数の勾配問題を扱う場合の周知のテクニックである。

F が u の厳格な凸函数であり，かつ，G が u の厳密な凹函数であるならば，上の勾配運動は，初期値の如何にかかわらず，与えられた問題の最適解 $\bar{u}(x)$ に収束するであろう。そうして，この最適解 $\bar{u}(x)$, λ の収束値 $\bar{\lambda}(x)$ について，下記の関係式が成り立つであろう。

$$-\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{d\{\partial F/\partial(du/dx)\}}{dx} + \int_x^b \lambda(\tau)\,d\tau \left[\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d\{\partial F/\partial(du/dx)\}}{dt}\right] \leqq 0 \quad \cdots\cdots(6.6)$$

$$\bar{u}(x, t)\left[-\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{d\{\partial F/\partial(du/dx)\}}{dt} + \int_x^b \lambda(\tau)\,d\tau \frac{\partial G}{\partial u} - \int_x^b \lambda(\tau)\,d\tau \frac{d\{\partial F/\partial(du/dx)\}}{dt}\right] = 0 \quad \cdots\cdots(6.7)$$

$$-\int_a^x G(\bar{u}, d\bar{u}/dx, \tau)d\tau \leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.8)$$

$$\bar{\lambda}(x, t)\int_a^x G(\bar{u}, d\bar{u}/dx, \tau)d\tau = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6.9)$$

これは同時に，$\bar{\lambda}(x)$, $\bar{u}(x)$ が与えられた変分問題の最適解であるための必要十分条件でもある。

§ 7　生産計画問題への応用例：—

前節の(6.6)〜(6.9)が，不等式条件附き変分問題の最適解についてこの必要十分条件であるとするならば，例の Arrow, Karlin and Scarf : Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford Univ. Press, 1958 の中に記されたこの種の問題についてこのすべての結論は，この四つの条件式の中から，完全に導き出すことができるはずである。

その手始めとして，Arrow and Karlin : Production over Time with Incseasing Marginal Costs, Chapter 4 of the abore "Studies", pp. 61〜69 を取り上げてみよう。与えられた問題は，次のようなものである。

$r(x)$ ……… x 時点における需要の rate

$z(x)$ ……… x 時点における生産の rate

$y(x)$ ……… x 時点における在庫量

$c(z)$ ……… 単位時間当りの生産費，但し z の単調増加且つ凸な函数とする。

h ………… 単位時間・単位在庫量当り在庫費用。

以上のように定義された記号を使えば，一定期間 ($0 \leq x \leq T$)内の需要 $r(x)$ を完全にまかなうことのできる生産計画 $z(x)$ のうちで，総原価の最も低いものを求める問題は，次の条件を満足し，且つ $J(z)$ の最小値を与える函数 $\bar{z}(x)$ を求める変分問題になる。

$$J(z) = \int_0^T [c\{z(x)\} + h\{y(0) + \int_0^t z(\tau)d - \int_0^t r(\tau)d\tau] \, dt \qquad \cdots\cdots\cdots(7.1)$$

$$\int_0^t r(\tau)\, dt - y(0) - \int_0^t r(\tau)d\tau \leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(7.2)$$

$$z(x) \geqq 0 \qquad \cdots\cdots (7.3)$$

この問題に対するラグランジュ式 $\int_0^T \phi(z, \lambda)dx$ は,

$$\int_0^T \phi(z, \lambda)dx = \int_0^T \Big[c\{z(x)\} + h\{y(0) + \int_0^t z(\tau)d\tau - \int_0^t r(\tau)d\tau$$

$$+ \lambda(x)\{\int_0^t r(\tau)d\tau - y(0) - \int_0^t z(\tau)d\tau\} \Big] dx \qquad \cdots\cdots (7.4)$$

であり，従って，その勾配運動方程式は

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = -\frac{dc}{dz} - h(T-t) + \int_x^T \lambda(\tau)d\tau \qquad \cdots\cdots (7.5)$$

$$\frac{\partial \lambda(x,t)}{\partial t} = \int_0^x r(\tau)d\tau - y(0) - \int_0^x z(\tau)d\tau \qquad \cdots\cdots (7.6)$$

となる。例の z, λ の負変域侵入を防止する機構は，明記はしてないが，働いているものと考える。その均衡解 $\bar{z}, \bar{\lambda}$ を与える必要十分条件は，

$$\int_x^T \bar{\lambda}(\tau)d\tau - h(T-x) - \frac{dc(\bar{z})}{dz} \leqq 0 \qquad \cdots\cdots (7.7)$$

$$\bar{z}(x)\left\{\int_x^T \bar{\lambda}(\tau)d\tau - h(T-x) - \frac{dc(\bar{z})}{dz}\right\} = 0 \qquad \cdots\cdots (7.8)$$

$$\int_0^x r(\tau)d\tau - y(0) - \int_0^x \bar{z}(\tau)d\tau \leqq 0 \qquad \cdots\cdots (7.9)$$

$$\bar{\lambda}(x)\left\{\int_0^x r(\tau)d\tau - y(0) - \int_0^x \bar{z}(\tau)d\tau\right\} = 0 \qquad \cdots\cdots (7.10)$$

Arrow and Karlin が得た結論の第一は，次のようなものであった。

Lemma 1. 最適生産計画 $\bar{z}(x)$ は

$$\int_0^T r(x)dx = y_0 + \int_0^T \bar{z}(x)dx \qquad \cdots\cdots (7.11)$$

$$\int_0^o z(x)dx = 0 \qquad \cdots\cdots (7.12)$$

$$h - \frac{d^2c(\bar{z})}{dz^2} \cdot \frac{d\bar{z}(x)}{dx} \geqq 0 \qquad \cdots\cdots (7.13)$$

を満足し，かつ，(7.13) の不等式が成り立っている期間 [a, b] 中は

$$\int_0^x \bar{z}(\tau)d\tau = max\left\{\int_0^a \bar{z}(x)\,dx, \int_0^x r(\tau)d\tau - y(0)\right\} \qquad \cdots\cdots (7.14)$$

の等式が成り立っており，また，(7.13) の等式が成り立っている期間（その期間内の任意の二点を x, x' とする）中は，

$$\frac{dc\{\bar{z}(x)\}}{dz}-\frac{dc\{\bar{z}(x')\}}{dz}=h(x-x') \qquad \cdots\cdots\cdots(7.15)$$

が成立する。

以上の結論を，(7.7)〜(7.10) からの必然的結論として導き出してみよう。まず，$\bar{z}$ は問題の解であるから，在庫の非負条件 (7.2) を満足している。

$$\int_0^x \bar{z}(\tau)d\tau \geqq \int_0^x r(\tau)d\tau-y(0)$$

ここで，T 時点において上の不等式が成り立っている，すなわち，期末在庫が正であるとする。$\int_0^x \bar{z}(\tau)d\tau$ も，$\int_0^x r(\tau)d\tau$ も，いずれも x の連続函数であるから，T 時点だけで不等号が成り立っているということはありえない。それは，必らず，ある有限期間 [a, T] の間，引きつづいて不等号が保たれていなければならない。

この [a, T] 期間中も，(7.10) が成立しているのだから，$\bar{\lambda}(x)$ は，その間中，引きつずいて 0 に保たれているはずである。従って，

$$\int_x^T \bar{\lambda}(\tau)d\tau=0 \qquad (a\leq x\leq T)$$

となり，これを (7.8) の左辺括弧内に代入すれば，

$$\int_x^T \bar{\lambda}(\tau)d\tau-h(T-x)-\frac{dc(\bar{z})}{dz}$$

$$=-h(T-x)-\frac{dc(\bar{z})}{dz}<0$$

$$(a\leq x\leq T)$$

である。これは，(7.8) より，

$$\bar{z}(x)=0 \qquad (a\leq x\leq T)$$

を意味する。

再び (7.10) に戻って考えてみると，

$$\int_0^x \bar{z}(\tau)\,d\tau=\int_0^a \bar{z}(\tau)d\tau=const. \qquad (a\leq x\leq T)$$

$$\int_0^x r(\tau)d\tau \geqq 0$$

であるから，(7.10) 左辺の括弧内（在庫量にマイナスを附けたもの）の大きさは，T から溯れば溯るほど，減少するか，または，一定に保たれるか，何れかであって，決してふえることはない。従って

$$\int_0^a r(\tau)d\tau - y(0) - \int_0^a z(\tau)d\tau < 0$$

となり，この a 時点について，上の T 時点について論じたと同じ結論が再びくりかえされることになる。これは，結局，[0, T] の全期間を通じて $\bar{z}(x)=0$ であることを意味する。従って

$$\int_0^x r(\tau)d\tau - y(0) < 0 \qquad (0 \leq x \leq T) \qquad \cdots\cdots\cdots(7.16)$$

でなければならず，初期在庫だけで全期間の需要をまかなうことができる場合に該当する。

この trivial な場合を除けば，(7.16) の成立は不可能であり，最初に，T 時点における正の在庫を仮定したことは，矛盾であることになる。それ故，

$$\int_0^T z(\tau)d\tau = \int_0^T r(\tau)d\tau - y(0)$$

でなくてはならず，上記 Lemma の (7.2) が証明された。

次に (7.13)，すなわち，

$$h - \frac{d^2c(\bar{z})}{dz^3} \cdot \frac{d\bar{z}(x)}{dx} \geqq 0$$

の証明に移る。均衡条件式 (7.8) の両辺を x について微分すれば，

$$\bar{z}(x)\left\{-\bar{\lambda}(x) + h - \frac{d^2c(\bar{z})}{dz^2} \cdot \frac{d\bar{z}(x)}{dx}\right\}$$
$$+ \frac{d\bar{z}(x)}{dx}\left\{\int_x^T \bar{\lambda}(\tau)d\tau - h(T-x) - \frac{dc(\bar{z})}{dz}\right\} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(7.17)$$

ここで，dz/dx が出てくる。$\bar{z}(x)$ の連続性を事前に仮定することは，面白くないけれども，この点は後日の問題として，ここでは一応 $\bar{z}(x)$ は連続であり $d\bar{z}/dx$ が存在するものとして話を進めたい。

$\bar{z}(x)$ が連続であるとすれば，それは，ある区間に亘って引続いて正である

が，引続いて零であるか，或いはまた，一点において零（その瞬間の dz/dt は零）であるか，そのうちの何れか一つでなければならない。ワイヤーストラスの函数のような特殊なケースは，解函数として起りえないので，勿論，除外して考えての話しである。

まず，$\bar{z}(x)$ が正の期間においては，(7.17) の両辺に $\bar{z}(x)>0$ を乗じて，

$$\bar{z}(x)^2\left\{-\bar{\lambda}(x)+h-c''(\bar{z})\frac{d\bar{z}(x)}{dx}\right\}$$
$$+\frac{d\bar{z}(x)}{dx}z(x)\left\{\int_x^T\bar{\lambda}(\tau)d\tau-h(T-t)-c'(\bar{z})\right\}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(7.18)$$

が得られる。ここで，(7.8) を代入すれば，(7.18) の左辺第二項は零となり，

$$\bar{z}(x)^2\left\{-\bar{\lambda}(x)+h-c''(\bar{z})\frac{d\bar{z}(x)}{dx}\right\}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(7.19)$$

が成り立つ。$\bar{z}(x)^2$ は仮定により正であるから，

$$-\bar{\lambda}(x)+h-c''(\bar{z})\frac{d\bar{z}(x)}{dx}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(7.20)$$

$$\therefore \quad h-c''(\bar{z})\frac{d\bar{z}(x)}{dx}=\bar{\lambda}(x)\geqq 0$$

となって，Lemma の結論 (7.13) に到達する。

第二に，$\bar{z}(x)$ が，ある期間に亘って零である場合には，$d\bar{z}(x)/dx=0$ であるから，

$$h-c''(\bar{z})\cdot\frac{d\bar{z}(x)}{dx}=h>0$$

となり，やはり (7.13) が成り立つ。最後の，$\bar{z}(x)$ がある x の一点においてのみ零である場合についてもまた，$d\bar{z}(x)/dx=0$ であるから，(7.13) の成り立つこと，全く同様である。従って，(7.13) は全期間 [0, T] を通じて成立することが明らかとなった。

(7.13) の左辺が正 (strictly positive) である期間を考える。更にそのうちで，$z(x)>0$ なる期間をとると，その期間中は，(7.8) より，

$$\int_x^T\bar{\lambda}(\tau)d\tau-h(T-x)-\frac{dc(\bar{z})}{dz}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(7.21)$$

が成り立つ。上の式のうち，$hx-dc(\bar{z})/dz$ は $h-c''dz/dx>0$ の x についての

積分であるから，時間 x の経過につれて strictly increasing である。hT は一定であるから，

(7.21) より

$$\int_x^T \bar{\lambda}(\tau)d\tau = hT - \{hx - dc(\bar{z})/dx\}$$

$$= strictly\ decreasing$$

となる。従って，(7.13) が不等式をとり，且つ $z(t)>0$ なる期間中は，

$$\bar{\lambda}(\tau)>0$$

でなければならない。

(7.10) の均衡条件式にこの $\bar{\lambda}(\tau)<0$ を代入すれば，

$$\int_0^x r(\tau)d\tau - y_0 - \int_0^x z(\tau)d\tau = 0$$

$$\therefore\quad \int_0^x \bar{z}(\tau)\,d\tau = \int_0^x r(\tau)d\tau - y_0$$

$$= max\left[\int_0^a \bar{z}(x)\,dx, \int_0^x r(\tau)d\tau - y(0)\right]$$

という，Lemma の結論 (7.14) が得られる。

同じく $h-c''dz/dx>0$ ではあるが，$\bar{z}(x)=0$ なる期間 [a, b] については，$h-c''dz/dx=h>0$ であり，かつ，

$$\int_0^x r(\tau)d\tau - y(0) - \int_0^x \bar{z}(\tau)d\tau \leqq 0$$

$$\therefore\quad \int_0^x \bar{z}(\tau)d\tau \geqq \int_0^x r(\tau)d\tau - y(0)$$

$$\frac{d\bar{z}(x)}{dx}>0$$

$$\therefore\quad z(x)>0$$

従って，(7.8) より，

$$\int_0^T \bar{\lambda}(x)dx - h(T-x) - \frac{dc(\bar{z})}{dz} = 0$$

更に，(7.18) が $z(x)>0$ なる期間にわたって成り立つことを考慮すれば，

$$\bar{z}(x)^2\left\{-\bar{\lambda}(x) + h - c''(\bar{z})\frac{d\bar{z}(x)}{dx}\right\} = 0$$

$$\therefore \quad \int_0^x \bar{z}(\tau)\,d\tau = \int_0^a \bar{z}(\tau)\,d\tau \geqq \int_0^x r(\tau)\,d\tau - y(0)$$

$$\therefore \quad \int_0^x \bar{z}(\tau)\,d\tau = max\left[\int_0^a \bar{z}(\tau)\,d\tau,\ \int_0^x r(\tau)\,d\tau - y(0)\right]$$

となって，同様の結果に到達する。

次に，(7.13) の左辺が 0 である期間を考えてみよう。すなわち，

$$h - c'' dz/dx = 0$$

$$\therefore \quad h = c''\frac{d\bar{z}}{dx} > 0$$

ここで，$c'' > 0$ *for any* $z \geqq 0$ であることを考慮すれば，

$$\frac{d\bar{z}(x)}{dx} > 0$$

$$\therefore \quad \bar{z}(x) > 0$$

従って，(7.8) より，$h - c'' d\bar{z}/dx = 0$ の成り立っている任意の二時点 x, x' について，

$$\int_x^T \bar{\lambda}(\tau)\,d\tau - h(T-x) - \frac{dc\{\bar{z}(x)\}}{dz} = 0$$

$$\int_{x'}^T \bar{\lambda}(\tau)\,d\tau - h(T-x') - \frac{dc\{\bar{z}(x')\}}{dz} = 0$$

が成り立つ。よって，辺々差し引けば，

$$\int_x^T \bar{\lambda}(\tau)\,d\tau - \int_{x'}^T \bar{\lambda}(\tau)\,d\tau + h(x-x') = \frac{dc\{\bar{z}(x)\}}{dz} - \frac{dc\{\bar{z}(x')\}}{dz} \quad \cdots\cdots\cdots (7.22)$$

ここで，この期間中は $\bar{z}(x) > 0$ であることと，(7.18), (7.8) とより，

$$-\bar{\lambda}(x) + h - c'' d\bar{z}/dx = 0$$

であり，更に前提により $h - c'' d\bar{z}/dx = 0$ であるから，

$$\bar{\lambda}(x) = 0$$

$$\therefore \quad \int_x^T \bar{\lambda}(\tau)\,d\tau = \int_{x'}^T \bar{\lambda}(\tau)\,d\tau$$

を得る。これを (7.22) に代入して，

$$h(x-x') = \frac{dc\{\bar{z}(x)\}}{dz} - \frac{dc\{\bar{z}(x')\}}{dz}$$

に到達する。これは，上の Lemma の結論 (7.15) に外ならない。

以上により，われわれの勾配法によって得られた必要十分条件から，Arrow and Karlin の Lemma 1 を導き出すことができた。(7.12) のそれは自明のことであり，証明を必要としない。

§ 8 勾配法の経済的意味づけ：—

一般に，条件附き極値問題からラグランジュ函数を作り，その鞍点に向って収束する勾配運動を考えることは，ある種の分権的管理体勢と，内部振替価格制度とを考えることと analogous であることが，よく知られている。前節の変分問題の場合にもまた，同様のことを言いうる。

まず，(7.5) 式を次のように変形してみる。

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\left\{\int_x^T \lambda(\tau)\,d\tau-h(T-x)\right\}-\frac{dc(z)}{dz} \qquad \cdots\cdots\cdots(8.1)$$

上の式の右辺括弧内を，製品の x 時点における価格とみなすことができる。(8.1) の右辺は，従って，x 時点における限界利潤を表わす。生産者は，x 時点において，その限界利潤が正であれば生産量をふやし，負であればそれを減らす。限界生産費 $c(z)$ は z の凸函数（限界生産費逓増）であり，限界収入 $\left\{\int_x^T \lambda(\tau)\,d\tau-h(T-x)\right\}$ の方は生産費 z には無関係であるから，その差額としての限界利潤は，生産量 z の増加とともに，strictly に減少し，z のある値において 0 となり，その点において利潤が最大となる。限界収入が非常に小さくて，生産量を 0 まで下げても限界利潤が非負にならないときは，(8.1) の方程式に組み込まれている stopping mechanism（明記はしてないが，存在するものとみなす）が働いて，z を 0 に保持する。

この (7.5) が，生産者の利潤極大化動機にともなう，生産計画の修正行動を表わす行動方程式と解釈されるのに対し，(7.6) の方は，x 時点における製品価格 $\left\{\int_x^T \lambda(\tau)\,d\tau-h(T-x)\right\}$ の自由市場における価格決定機構の働きを simulate したものとみなすことができる。(7.6) の右辺の $\int_0^x r(\tau)\,d\tau$ は，x 時点における累積需要，$y(0)+\int_0^x z(\tau)\,d\tau$ は累積供給であるから，その差額（右辺の値）

は x 時点における需要超過（それ以前に生じた満たされざる需要はすべて現在に繰りのべられたものとして）を意味する。従って，(7.6) 式は，x 時迄における市場価格が，その需要超過に比例して上昇し，また，供給超過に比例して減少する動きを示している。価格が0になってもなお供給超過を示すときはそれが0以下には下らないこと，勿論である。ただし，この (7.6) が動かすものは $\lambda(x)$，すなわち，価格の時間的上昇率，であって，価格それ自体ではないこと，に注意しなければならない。λ は，それ故，利子率の次元をもち，価格はこの λ の時間積分として与えられることになる。

以上の (7.5), (7.6) の連立微分方程式における生産量と価格との調整機構の働きは，従来の mathematical programming problems におけるそれと全く analogous であるかのように見える。しかし，一つの重大な違いを含んでいることに注目しなければならない。それは，z は x について連続であるから，これを有限個の時点に区切って，それぞれの時点の生産量 $z(x_i)$ を担当する分権的決定権者を仮定することは，非現実的であるという非難を蒙らなければならない，という点である。この難点を避けるためには，$0 \leq x \leq T$ の全期間を通じて，$z(x)$ が同時点且つ x について連続的に修正されなければならない。従って，この修正は，個々の x_i 点における $z(x_i)$ の修正のよせ集めとしてではなく，(7.5) の右辺で表わされる連続函数 $\eta(x)$ によって，連続函数 $z(x)$ を修正する，という形をとらなければならない。物理学的な表現を借りるならば，それは，質点の動きではなく，弦の振動を表わすものである。このように理解するならば，(7.5) の微分方程式は，無限に多くの分権的決定者を要請するものではなく，唯一人の管理者が，［$0 \leq x \leq T$］の全期間についての修正量 $\eta(x)$ を決定しさえすれば十分であることを知る。そのような修正は単に特定の瞬間における利潤を極大化するだけでなく，その全期間における利潤の合計を最大ならしめようとするものである。しかし，この全期間の利潤最大化のための計算は何等の複雑な変分計算をも必要としない。何となれば，各時点における限界収入は，その管理者にとっては与えられた値であり，かつ，生産物はその場で全部が売りつくされるものと考えてよいからである。このような場合には，在庫は存在せず，問題は各時点におけるばらばらな静態的極大化のよせ集めに

他ならないことになる。この分権化の利点は，分権的決定者の数をふやすことではなく，複雑な長期的最適化の問題を，単なる静態的最適化の寄せ集めに解消することによって，決定者の判定を容易ならしめる点にある。

この利点は，同時にまた，不等式条件附き変分問題を，計算機によって解く場合の有力な計算法を提供するものである。Bellman の dynamic programming は，時間を不連続に切断することを要求するけれども，勾配法は，それを連続のまま取扱うことができるという利点をもつ。

このような勾配運動は，$\phi(z, \lambda)$ が z についての凸函数，λ についての凹函数である限り，収束性をもち，(7.7)～(7.10) によって示される均衡値に安定する。ϕ が (z, λ) の双方について線型の場合にも，勾配方程式を若干修正することにより，同様に収束性をもたせることが可能である。

(7.7), (7.8) は，各時点における限界利潤が負であれば生産は0，零であれば生産量は非負であることを示す。(7.9). (7.10) は，各時点における在庫量が正であれば $\lambda=0$（価格は上昇しない），在庫量が0であれば λ は非負（価格は上昇しうる）であることを示している。これは，経済的合理性に完全に合致するものである。

最後に，同じ条件を別の言葉で表わしている Lemma 1 の経済的意味を考えてみよう。計画の終りの時点 T に在庫が残ることは全くの無駄であるから，最適計画における期末在庫は必らず0でなければならない。従って，(7.11) の成立は当然である。

(7.13) の経済的意味は次の通りである。最適生産計画 $\bar{z}(x)$ が与えられたとする。在庫の非負条件式 (7.9) に違反することなしに，その一時点の生産量を僅か (Δz) ふやし，次の隣接時点 $x+\Delta x$ の生産量を等量だけ減らすことは常に可能である。その結果，在庫費用は $h\Delta z\,\Delta x$ だけふえ，生産費は $\{c''(\bar{z})\,d\bar{z}(x)/dx\}\times\Delta x\times\Delta z$ だけ減少するであろう。それ故，もしも

$$h-c''(\bar{z})\,d\bar{z}(x)/dx>0$$

であるならば，このような修正によって，拘束条件を破らずに，総原価を切り下げることができることになる。これは，$\bar{z}(x)$ が最小原価の生産計画である，というわれわの仮定に反することになるから，

$$h-c''(\bar{z})d\bar{z}(x)/dx \nless 0$$

でなくてはならない。

反対に，$h-c''(\bar{z})d\bar{z}(x)/dx>0$ であるとすると，x 時点における生産量 $\bar{z}(x)$ を Δz だけ減らして，その等量を $x-\Delta x$ 時点において追加生産することが，原価切り下げの効果をもつ。何故ならば，そのような修正は，$h\Delta x\Delta z$ の在庫費用の減少と，$c''(\bar{z})d\bar{z}(x)/dx\ \Delta x\Delta z$ の生産費増加をもたらすことになるから，

$$-h+c''(\bar{z})d\bar{z}(x)/dx>0$$

$$\therefore\quad h-c''(\bar{z})d\bar{z}(x)/dx>0$$

となって，全体として原価を引き下げる結果となる。しかし，在庫の存在しない期間，すなわち

$$\int_0^x r(\tau)d\tau-y(0)-\int_0^x \bar{z}(\tau)d\tau=0$$

が成り立っている期間内では，このような修正は在庫を負ならしめるために，実行不可能である。それ故，最適計画における在庫が 0 である期間内ならば，

$$h-c''(\bar{z})d\bar{z}(x)/dx>0$$

であっても，$\bar{z}$ の最適性は失われない。

残された可能性，すなわち

$$h-c''(\bar{z})d\bar{z}(x)/dx=0$$

が成り立っている期間中は，上の二つの型の修正は，その何れをとっても，原価を減少させ得ない。故に $h-c''(\bar{z})d\bar{z}(x)/dx=0$ は，$0\leq x\leq T$ の全期間を通じて，$\bar{z}(x)$ の最適性に矛盾せずに成り立つ。以上により（7.13）のもつ経済的意味が明白となった。

この $h-c''(\bar{z})d\bar{z}(x)/dx>0$ のときは，累積生産曲線 $\left(=\int_0^x \bar{z}(\tau)d\tau\right)$ の一部に上方への小 hump をつくることを不利益とし，下方への小 hump をつくることを有利（原価減少）とする。従って，$\bar{z}(x)$ がその期間［a, b］中における最適性を失わないためには，それが下方への hump を作りえないこと，すなわち，在庫の在存しないこと，

$$\int_0^x r(\tau)d\tau-y(0)-\int_0^x \bar{z}(\tau)d\tau=0$$

または，期首 a における在庫が十分に存在して，全然生産をしなくても需要をまかなえること，

$$\int_0^x \bar{z}(\tau)d\tau=\int_0^a \bar{z}(\tau)d\tau>\int_0^x r(\tau)d\tau-y(0)>0$$

を必要とする。以上二つの場合を一まとめにすれば，

$$\int_0^x \bar{z}(\tau)d\tau=max\left[\int_0^a \bar{z}(\tau)d\tau,\int_0^x r(\tau)d\tau-y(0)\right]$$

となって，(7.14) に到達する。

等号が成り立つ期間（$h-c''(\bar{z})d\bar{z}/dx=0$）中は，$\bar{z}(x)$ が最適解であるためには，上下何れの方向への hump の可能・不可能ということは何等必要条件とはならず，$\bar{z}(x)$ の形だけによって，その最適性が保証される。すなわち，この等式を x について積分すれば，

$$hx-dc(\bar{z})/dz=const$$

故に，この区間内の任意の二時点 x, x' について，

$$hx-dc\{\bar{z}(x)\}/dz=const,$$

$$hx'-dc\{\bar{z}(x')\}/dz=const,$$

が成り立つ。これを辺々差引けば，

$$h(x-x')=dc\{\bar{z}(x)\}/dz-dc\{\bar{z}(x')\}/dz$$

となって，(7.15) が得られる。

これは，需要が制約にならずに，生産量 $z(x)$ が，在庫費用 h と限界生産費 dc/dz とだけによって決められている状態を示している。この状態の λ では，$\bar{z}(x)$ が最適計画であるためには，任意の二時点（$x<x'$）の間の生産量のやりとりによって生ずる在庫費用の増加

$$h(x'-x)$$

が，生産費の減少

$$-dc\{\bar{z}(x)\}/dz+dc\{\bar{z}(x')\}/dz$$

に比べて，等しくなければならない。それは，

$$h(x'-x)=-dc\{\bar{z}(x)\}/dz+dc\{\bar{z}(x')\}/dz$$

$$\therefore\quad h(x-x')=dc\{\bar{z}(x)\}/dz-dc\{\bar{z}(x')\}/dz$$

の成立を意味する。すなわち，この区間中の生産量の時間配分をどのように微

分的に修正してみても，それによる在庫費用の増減は，生産費の方の減増によって正確に双殺されてしまうわけである。

§9　附記：—

以上は燥急の間に書かれたノートであり，数学的厳密さに缺けるものであることを附記しておかなければならない。この点についての修正，および，Arrow, Karlin and Scarf の著作の第5章以降のモデルの検討については，引きつづいて他の論文として発表するであろう。

（昭和37年1月13日）