古典確率論における諸問題（III）*

武 隈 良 一

VIII モ ン モ ー ル

モンモールはその数学の力においてヤコブス・ベルヌーイやド・モアヴルとは比ぶべくもないし，また確率論を一きわ高揚しその重要さをますような素晴らしいアイデアを打出したというわけでもない。しかし彼は確率論に熱狂的なほど凝り固まり，彼自身労を惜しむことなく努力したので，その結果として直接又は間接的にニコラウス・ベルヌーイやド・モアヴルの奮起をうながすこととなった。

モンモール（Pierre Rémond de Montmort, 1678—1719）はパリに生れパリで生涯を終えた。彼の指導者であった哲学者マルブランシュの影響の下に彼自身は宗教，哲学，数学に耽った。ノートルダムの僧職を不本意ながら引受けたが1704年に結婚のため僧職を辞任した。しかしその後も単純で世間と没交渉な生活を続けた。

彼は主としてその著書 Essai d'analyse sur les jeux de hasard（運まかせの勝負ごとについての解析試論）によって知られているので以下これについて述べよう。この書物は1708年に初版が出たが，第2版は1713年と伝えられている。初版は189頁，第2版は414頁である。ここでは主として第2版によって述べていこう。

この書物は4つの部分に分かれている。第1部は組合せの理論，第2部はカードについての運まかせの勝負ごと，第3部はサイコロについての運まかせの勝負ごと，第4部は偶然についての種々の問題の解を論じホイヘンスによって提出された5つの問題をも含んでいる。これら4部の外に第5部としてモンモ

＊（I）は本誌第8巻第3号（1958年2月），
（II）は 同 第10巻第1号（1959年7月）に掲載。

ールとベルヌーイの間にとり交わされた書簡が掲載されている。

第1部は Traité des Combinaisons（組合せの理論）と題され1頁から72頁にわたる。それは代数学における組合せの章としてよりも偶然に関する章として述べられている。というのもカードを引いたりサイコロを投げたりする例題が数多くあるからである。2項定理についていえば $(a+b)^n$ の展開の係数は，n人が勝手に黒と白の面をもつ硬貨を投げたとき，黒と白の面があらわれる場合の数に等しいと論じている。多項定理についても同様である。以下興味深い問題を拾ってみよう。

問題1（46頁)。n個のサイコロがある。各々はf個の面をもち，それを1からfまでの数で表わす。いまこれらを勝手に投げるとき，面に表われる数の和がpになる場合の数を決定せよ。

これは $(x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^f)^n$ の展開における x^p の係数を求めることに帰着する。結果は $p-n=s$ とおくとき

$$\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+s-1)}{S!}-n\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+s-f-1)}{(s-f)!}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\ \frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+s-2f-1)}{(s-2f)!}-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

となる。この級数はすべての因数が正なる限りつづく。モンモールはこの公式を非常に骨の折れる方法で証明した。

この公式は興味深いものなので一寸その歴史にふれておこう。これははじめ証明なしにド・モアヴルの論文 De Mensura Sortis（籤引きの計算について）に発表された。モンモールは自著の第1版においてnがqまでの場合の表を作り，第2版でこれを証明したのである。モンモールからヨハンネス・ベルヌーイへの書簡(1710.11.15)によると彼はド・モアヴルの論文以前に上の公式を得ているという。ド・モアヴルが後に証明を公表したのは Miscellanea Analytica（解析雑論 1730）においてである。その証明はモンモールのものとは異なり，$(1-x)^{-n}(1-x^f)^n$ の展開における x^{p-n} の係数を求めることにあった。

問題2．カードが3組ある。その各組は1から10までの数がしるしてある10枚の札からなる。いまこの30枚から3枚を抜きとったとき，その数の和が与えられた数になる場合の数を求めよ。

この問題は3つの場合に分かれる。3枚のカードのうち，(1) いずれの2枚をとっても同組のものではない，(2) 2枚は同じ組のもので他の1枚は別の組のものである，(3) 3枚とも同じ組のものである。

第1の場合は問題1に帰着するが，他は新しい問題である。これに対してモンモールは一般の解法を与えていない。ただ要求された結果をあらわす表の作り方をしめしているだけである。そして自分の方法は一寸長いが，より短かい方法でこれを求めることが出来るとは思えないと結論している。この問題は結局不定方程式 $x+y+z=p$ の解法に帰着する。

問題3（63頁）。有限差の問題における一般項 u_n を求めること。

$$u_n=u_0+n\triangle u_0+\frac{n(n-1)1}{1.2}\triangle^2 u_0+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\triangle^m u_0$$

となるこの公式はモンモールの与えたもので原文では $\triangle u_0$，$\triangle^2 u_0$，$\triangle^3 u_0$，……の代りに A, B, C, …… が用いられている。この公式のおかげで有限差の級数を与えられた項まで求めることができるようになった。有限差の問題は既にニュートンのプリンキピアと微分法（Methodus Differentialis）のなかに含まれているが，これを明確に記述したのはモンモールである。

第2部は73頁から172頁にわたる。それはカードに関する運まかせの勝負ごとを述べている。最初のゲームはファラオン（Pharaon）とよばれるものである。ファラオンとは古代エジプト王の呼称で天子という意味である。袋のなかに親元のカードがp枚，対手方のカードがq枚あるという。ゲームの遊び方は不明であるが，親元の利益を u_p と表わし，対手方が賭ける金額の総額をAとするとき，

$$u_p=\frac{q(q-1)}{p(p-1)}\frac{1}{2}A+\frac{(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)}u_{p-2}$$

になることをモンモールがしめした。これより u_p を求めるには次の式

$$\phi(n,r)=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{r!}$$

の値をしることが必要であり，以下これについて論じている。

次のゲームはランスクネ（Lansquenet）とよばれるものであるが，これは興

味がうすいので省略する。

これに反してトレーズ (Treize) とよばれるゲームは興味深く，確率論において永遠の座を占めるものである。これはモンモールによって考えられた次のものである。

いま1から13までの数字がしるされた13枚のカードがある。これらを袋のなかに入れておく。いま袋から全部のカードを1枚ずつ取出すとき，カードの番号と取出した順番の番号とが少なくとも1回一致する確率を求めよ。

モンモールはこの問題の解法をニコラウス・ベルヌーイから教わり，それを2種類述べている。求める確率は周知の如く一般に

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

である。

これよりカードの番号と順番の番号とが全部異なる場合の確率は，上の式を1から引くことによって

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\cdots-\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

となる。これの例として次の問題がある。

封筒と書筒が同じ数ある。いまでたらめに1通ずつ封入したとき全部の宛先が間違う確率はいくらであるか。

トレーズは13という意味であるが，このゲームは今日ランコントル (Rencontre，一致) と呼ばれている。

このあとモンモールは古来から有名なゲームであるバセット(Bassette)，その他について論じている。バゼットは既にベルヌーイの「推論法」においてその公式が証明されている。

第3部は173頁から215頁にわたる。それはサイコロについての運まかせの勝負ごとを数種類述べている。ここでは核の遊戯 (Le Jeu des Noyaux) とよばれるものについて述べておこう。

8つの核があり表は黒裏は白とする。2人はAずつ賭ける。いま1人が8つの核を空中に投げ，黒が奇数個でたら対手のAをもらう。白が奇数個でたら対手にAをわたす。全部が黒か又は白ならば対手から2倍の2Aをもらう。このとき

両者の期待値はいくらであるか。

解，投げた人の期待値は

$$\frac{1}{256}\left\{(8+8+56+56)(2A)+2(2A+A)\right\}=\frac{131}{256}(2A)$$

対手方の期待値は

$$\frac{1}{256}\left\{(28+28+70)(2A)+2(0-A)\right\}=\frac{125}{256}(2A)$$

である。

この問題はある貴婦人からモンモールに提出されたものであるが，確率論に貢献した貴婦人というだけでその名は記されていない。モンモールは白黒でなく4つの面をもつ核について同様に論じた。

第4部は216頁から282頁にわたる。それは偶然についての種々の問題の解を述べ，特にホイヘンスによって提出された5つの問題を含んでいる。ホイヘンスの問題はベルヌーイの「推論法」に詳論されているが，モンモールは自著を完成するまでにこれを見ておらない様子である。したがってベルヌーイの解法と似ているのもあるが，まわりくどいのもある。

まず得点の問題について述べよう。パスカルとフェマがこの問題を取扱ったとき，2人の競技者の技倆は相等しいとみなしたが，モンモールは相等しくない場合について公式を与えた。

Aがさらにm点を得ることが必要であり，Bがさらにn点を得ることが必要のとき，ゲームはもうm+n+1回行なう必要がある。いまm+n−1=rとおき，pをAの技倆，qをBの技倆とし，p+q=1とす。

このときAが勝つ確率は

$$p^r+rp^{r-1}q+\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}p^{r-2}q^2+\cdots\cdots+\frac{r!}{m!(n-1)!}p^m q^{n-1}\cdots\cdots(1)$$

にして，Bが勝つ確率は

$$q^r+rq^{r-1}p+\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}q^{r-2}p^2+\cdots\cdots+\frac{r!}{n!(m-1)!}q^n p^{m-1}\cdots\cdots(2)$$

である。これらはまた次のようにもあらわせる。

$$p^m\left\{1+mq+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}q^2+\cdots\cdots+\frac{(r-1)!}{(m-1)!(n-1)!}q^{n-1}\right\}\cdots\cdots(3)$$

$$q^n\left\{1+np+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}p^2+\cdots\cdots+\frac{(r-1)!}{(m-1)!(n-1)!}p^{m-1}\right\}\cdots\cdots(4)$$

これらは今日初等代数の書物において説明されるので，詳論する必要はないが，モンモールは $p+q$ が1より小さい場合にこの2種の公式は意味が異なつてくると述べている。$p+q$ が1より小さいというのは，引分けの確率 $1-p-q$ が0でなく実際に存在する場合である。

(3)は引分けが起つたり又はBが n 点を得る以前に，Aが m 点を得る確率を表わすが，(1)は r 回の勝負が実際行なわれたときAが r 回から m 点を得る確率を表わすだけで，Aが m 点を得た後でさえ，もし引分けが起つたならばAは勝ったことにならないのである。

次に遊戯の持続に関する問題を述べよう。　これはホイヘンスの第5の問題（拙稿（Ⅱ），83頁参照）に由来する。

いまAが l 枚の硬貨（模造貨幣），Bは m 枚の硬貨をもっている。1回の試合における両者の技倆の比は a 対 b とす。試合で負けたら対手に硬貨を1枚わたす。AがBの硬貨をすべてとり上げる確率又は x 回の試合の前にとり上げる確率を求めよ。

モンモールはこの問題を解いたがニコラウス・ベルヌーイにも解くことを要請した。ベルヌーイが自分の解を送ったとき、モンモールは賞讃したが、実は理解することができなかった。モンモールは自分の研究の方法とベルヌーイのものとが非常に異なっていると思ったが，ベルヌーイからの説明により同じものであることが分った。これより先モンモールが第2版を出版する以前に，ド・モァヴルは別の方法でこの問題を解いたのを De Mensura に発表した。

ここでモンモールの一般解法を述べようとは思わない。それは後に述べるド・モァヴルの研究と関連させながら記述した方が良いと思うからである。ただ証明なしにモンモールが与えた次の2つの特別な場合だけを述べておこう。

(1)　2人の競技者は同技倆でともに2つの硬貨をもっている。そのとき試合が多くとも $2x$ 回で終わる確率は $1-\frac{1}{2^x}$ である。

(2)　3つの硬貨をもっているとき，試合が多くとも $2x+1$ 回で終わる確率は $1-\frac{3^x}{4^x}$ である。

これらは勿論モンモールの一般解法から導かれる。彼はさらに，競技者の技倆が等しく奇数個mの硬貨をもっているとき，$f=\frac{m+1}{2}$ とおけば試合は$3f^2-3f+1$回すなわち$\frac{3}{4}m^2+\frac{1}{4}$回で終わると述べている。しかしこの近似公式を如何にして得たかはしめしていない。ド・モァヴルは彼自身の近似解法によると$m=45$のとき1531回の試合が必要であると計算しているが，モンモールによれば今の公式により1519回となる。この2つの数値は食違っているがその反面良く似ている点に注目すべきである。

ここで問題を次のように規定し，その現代的解法を述べておこう。

問　Aはl個，Bはm個の硬貨をもつ。試合をして負けたものは勝った者に1個の硬貨を与え1人が他の硬貨を全部とりつくしたとき勝負は終わるものとする。毎回の試合においてAの勝つ確率をp，Bの勝つ確率を$q=1-p$とするとき，A，Bの全勝する（対手の硬貨をとりつくす）確率を求めよ。

解　Aがx個の硬貨をもっているとき全勝する確率をu_xとす。しかるときAが次に勝つ確率はpにしてそのとき硬貨は$x+1$になるので次に全勝する確率はu_{x+1}となる。またAが次に負ける確率はqにしてそのとき硬貨は$x-1$になるので全勝する確率はu_{x-1}となる。それ故

$$u_x=pu_{x+1}+qu_{x-1}$$

$$pu_{x+1}-u_x+qu_{x-1}=0$$

となる。これよりu_l，u_mを求めるとよい。

いま

$$\frac{K+Lx}{p-x+qx^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

とおき分母を払い係数を比較すると

$$\begin{cases} a_0p=K \\ a_1p-a_0=L \\ a_2p-a_1+a_0q=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_np-a_{n-1}+a_{n-2}q=0 \end{cases}$$

となるので，$u_n=a_n$が得られる。しかるに$p+q=1$なので

$$\frac{K+Lx}{p-x+qx^2}=\frac{K+Lx}{(p-qx)(1-x)}=\frac{M}{p-qx}+\frac{N}{1-x}$$

$$=\frac{M}{p}\left(1-\frac{q}{p}\right)^{-1}+N(1-x)^{-1}$$

$$=\frac{M}{p}\left(1+\frac{q}{p}x+\frac{q^2}{p^2}x^2+\cdots\cdots\right)$$

$$+N\,(1+x+x^2+\cdots\cdots)$$

これより $a_n=\dfrac{M}{p}\left(\dfrac{q}{p}\right)^n+N=u_n$

しかるに $u_0=0$, $u_{l+m}=1$ なるを以て

$$\frac{M}{p}+N=0,\ \ \frac{M}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^{1+m}+N=1$$

故に $M=\dfrac{-p}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{l+m}}$, $N=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{l+m}}$

故に $u_n=\dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{l+m}}$

これより $u_l=\dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{l}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{l+m}}$, $u_m=\dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{m}}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{l+m}}$

となりAおよびBの全勝する確率が得られる。

モンモールは2人の競技者が同じ技倆で，6個の硬貨をもっているときの確率を与えている。この場合には $u_x=\dfrac{1}{2}(u_{x+1}+u_{x-1})$ となり，$u_x=Cx+C_1$ となる。このCと C_1 を決定するには，$u_0=0$, $u_{2n}=1$ を代入することにより $u_x=\dfrac{x}{2n}$ となる。ただし n=6 なり。

次にエール (Her) という遊戯について述べよう。いまピーターが1組のトランプカードをもっている。彼は対手のポールと自分自身にアト・ランダムに1枚ずつカードをくばる。この2枚のカードの得点の比較によって勝負を争う。ただしカードの得点の優位の順序は上からK，Q，J，10，……2，Aと

する。

いまポールがくばられたカードに満足しないならば，ピーターと一しょに他のものと変えようと要求できる。しかしこのときピーターはこれに応じても応じなくともよい。またもしピーターが最初のカードに不満足か又はポールの要求によりとりかえたカードに不満足ならば，別のカードととりかえることができる。しかしその結果がKであったらそれを所有することはできず不満足のままでいなければならない。また最後にカードを比較したとき同じ得点ならばポールは負けとする。

これを解くのにおのずと原理がある。ポールが8又はそれ以上のものをくばられたらおそらく変えないであろうし，6又はそれ以下ならばピーターに変更をせまるであろう。問題はポールに7がくばられたときであるが，この7に満足するかしないかでまた場合が別かれる。以上について種々の細かな計算がなされているが述べるまでもなかろう。

最後に**第5部**は283頁から414頁にわたる。これはモンモールとニコラウス・ベルヌーイとの間にとり交わされた書簡とヨハンネス・ベルヌーイからモンモールへの書簡とその返事からなっている。いまそのうち興味のあるものを拾ってみよう。

第1の書簡はヨハンネス・ベルヌーイからモンモールへのもので，ファラオンやトレーズの他いろいろなことについて注意を与えている。これによるとファラオンにおける親元の利益をあらわす一般の公式はヨハンネスが与えモンモールがこれを採用したことが分かる。またトレーズについていえば

$$\phi(n)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

および

$$\psi(n)=\phi(n)+\frac{1}{1}\phi(n-1)+\frac{1}{2}\phi(n-2)+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\phi(1)$$

とおくとき

$$\psi(n)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$

になることを注意している。この式は帰納法によって証明され，

$\psi(n+1)=\psi(n)+\frac{1}{(n+1)!}$ なることが分かる。

モンモールからニコラウスへの書簡のなかに次の問題がある。これはその後多くの学者によって論ぜられるようになった。

いまn+1人の競技者がいる。そのうち2の人が勝負を争い，負けた者が1シリングを供託する。勝った者は第3の者と争い，負けた者はやはり1シリングを供託する。勝った者は第4の者と争う。以下これと同様につづく。このようにして勝負は進められるが，最初に負けたものはn+1人が勝負を終わるまで再び出場することができない。かくして誰かが全部を負かしたとき勝負は終わり，彼は供託されたすべての金を受取る。各競技者の期待値および何回かのゲームが行なわれるか又はそれ以前に賞金が獲得される確率を求めよ。

この問題は英国の Waldegrave によって解かれたので Waldegrave の問題とよばれる。この勝負は各競技者の技倆が同じであると仮定している。モンモールは3人の場合についてすべてを述べているが証明はしておらない。4人の場合に3回から13回までの間に賞金が獲得される確率を計算しているが，その法則は一寸受取り難い。またそれ以上の人数の場合も計算しているが彼自身非常に困難であると述べている。この問題に関してニコラウスとモンモールとの間にとり交わされた書簡は数多い。ニコラウスは一般に何人かの場合にこの問題を解くことに成功したがこれは素晴らしいものである。

またモンモールからニコラウスへの他の書簡に次の問題がある。これはホイヘンスの第2の問題（拙稿（I），92頁参照）に対する注意である。

いま3人の競技者がいる。袋のなかに白球がa個，黒球がb個，合計 a+b=c個ある。これを1球ずつ取出して元へ戻さないものとする。そのとき最初の競技者が白球を取出す確率は次の式で表わされる。

$$\frac{a}{c}+\frac{b(b-1)(b-2)a}{c(c-1)(c-2)(c-3)}+\frac{b(b-1)\cdots\cdots(b-5)a}{c(c-1)\cdots\cdots(c-6)}+\cdots\cdots$$

モンモールはa, bが大きい数のときこの級数の和を求めることに自信をもってはいたが，そうは言わずにa=4とおいた。そのとき級数は

$$\frac{4b!}{c!}\left\{\frac{(c-1)!}{b!}+\frac{(c-4)!}{(b-3)!}+\frac{(c-7)!}{(b-6)!}+\cdots\cdots\right\}$$

となる。いま p=b+3、すなわち c=p+1 とおくと括弧内は

$$p(p-1)(p-2)+(p-3)(p-4)(p-5)+(p-6)(p-7)(p-8)+\cdots\cdots$$

となる。いまこの級数の n 項の和を求めよう。まず第 r 番目の項は

$$(p-3r+3)(p-3r+2)(p-3r+1)$$

となるのでこれを

$$A+B(r-1)+\frac{C(r-1)(r-2)}{1\cdot 2}+\frac{D(r-1)(r-2)(r-3)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

とおき，A，B，C，Dの値を求めると

$$A=p(p-1)(p-2) \qquad B=(9p^2-45p+60)$$

$$C=54p-216 \qquad C=-162$$

となるので，最初の級数の和は

$$np(p-1)(p-2)-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(9p^2-45p+60)$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(54p-216)-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}162$$

となる。 この解法はモンモールのものにほど近く，n として $\frac{p}{3}$ に含まれる最大の整数を代入するとよい。

ニコラウスからモンモールへの書簡のなかに，男女の出生の割合がほとんど一定であるという神の摂理について論じている。ニコラウスは実際の調査の結果一定ではないと反論した。ロンドンにおいて1629年から1710年までの間では平均して男18女17の割合であるが，この比から一番はずれているのは1661年の男4748対女4100と，1703年の男7765対女7683であるという。さらに進んでニコラウスは理論的に男が生れる確率の最大と最小との差は43分の 1 であることをしめした。これを具体的にいえば，14000 人の赤児のなかで男は多いとき 7363 人であり少ないとき7037人であるという。彼の研究はベルヌーイの定理とよばれる彼の叔父ヤコブスの定理の一般の証明を含むものである。これには 2 項級数の項の総和が必要になる。

またニコラウスからモンモールへの他の書簡に次の問題がある。

AとBがサイコロで勝負をする。Bが最初に 6 を出したらAはBに 1 クラウン（5 シリング）を与える。2 度目に 6 を出したら 2 クラウン，3 度目に 6 を

出したら3クラウンを与える，以下同様につづく。このときBの期待値は

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{6^2}+\frac{3}{6^3}+\frac{4}{6^4}+\cdots\cdots$$

である。

この級数は普通の方法で和が求められる。これと類似の問題が後にダニエル・ベルヌーイその他によって論ぜられ，有名なペテルスブルグの問題となったのである。

以上でモンモールを終わるが，実際彼の業績はその英智の鋭さにおいて，堅忍不抜の点において，精力的な点において高い名声を博するものである。これまでほとんど開拓されなかった分野において彼を活躍せしめたその勇気はまさに賞讃さるべきものがあり，彼のつくった例は彼より著名な後継者に恰好な刺激を与えた。ド・モァヴルは確かに数学の力においてモンモールよりまさり，またモンモールの生涯の2倍も生きたいという長い人生から多くの利益を得ている。しかしその反面モンモールの地位は幸運な境遇にあったため多くの閑暇が与えられたが，ド・モァヴルはナントの勅令の廃止により追放の身となり，加えて貧困のため安定な生活を送ることができなかった。

IX　ド・モアヴル

ド・モアヴル (Abraham de Moivre) は1667年シァンパニュのヴィトリにおいて生れた。彼はユグノー（カルヴァン派のプロテスタント）であったためナント勅令の廃止により1685年にイギリスへ避難し，そこにおいて数学を教えたり偶然や年金に関する問題について解答を与えたりして生計をたてた。そして1754年ロンドンにおいて生涯の幕を閉じた。

彼は1697年に王立学会の会員に選ばれた。彼の肖像画は，当時の偉大な科学者のなかでも一際光彩をはなっていたので，学会の会合に用いられる部屋の壁を飾る蒐集画のなかに見出される。またニュートンが晩年に数学に関する質問に答えたとき「ド・モァヴル君のところへ行ってごらん。彼はこれらのことについて私よりよく知っているよ」と付け加えたと記録されている。イギリスに保護された人で，天才と美徳としかも不運によりその名を高めた人の表を作っ

てみると，ド・モァヴル以上にその名を讃えられる人は見出し難いであろう。

彼の死についてはしばしば次のような逸話が伝えられている。すなわち毎日¼時間ずつ睡眠時間を増していってついに死に至るであろうと予言したということである。

さてド・モァヴルの著名な論文 De Mensura Sortis は哲学紀要（Philosophical Transactions）の第329号（1711）に発表され，その詳しい題名は De Mensura Sortis, seu, de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus（籤引きの計算について，又は未決の偶然の出来事に関するゲームにおける事象の確率について）である。この論文はのちに彼の著書「偶然の教理」（The Doctrine of Chances; or, a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play）において拡張された。この書物の初版は1718年に，第２版は1738年に，第３版は1756年彼の死後に出版された。

まず論文の内容について述べよう。これは26個の問題と確率の計算法を述べた手短かな注意からなっている。

第１の問題。１つのサイコロを８回投げたとき，１の目が２度又はそれ以上出る偶然（確率）を求めよ。

第２の問題（得点の問題）。Aは４点不足し，Bは６点不足している。１回の勝負においてAとBの勝つ割合は３対２である。このとき勝負を中止したら賭金は如何に分けるべきか。（ここに注意すべきはAとBとの技倆の等しくない場合がはじめて論ぜられていることである。）

第３の問題。AがBに３回のゲームのうち２回を与えることができるならば１回の勝負においてA，Bが勝つ確率はいくらか。（この問題の意味については偶然の教理D．C．問題１をみよ。）

第４の問題。AがBに３回のゲームのうち１回を与えることができるならば１回の勝負においてA，Bが勝つ確率はいくらか。（D．C．問題２をみよ。）

第５の問題。１つのサイコロを投げたとき６の目が少なくとも１回出る確率が½になるようにする（これを even chance という）には何回投げるとよいか。これはすでにモンモールによって解かれているが，ド・モァヴルは有用な近似公式を付け加えた。（D．C．問題３をみよ。）

これに引きつづき補題としてド・モァヴルは，等しい個数の面をもつサイコロをいくつか投げたとき，出る目の和が予め指定された数になる確率を見出している。これについては既にモンモールの著書第1部（問題1）において詳述しておいた。

第6の問題。1つのサイコロを投げたとき6の目が少なくとも2回出る確率が½になるようにするには何回投げるとよいか。

第7の問題。同じく，少なくとも3回，少なくとも4回，……についてしらべよ。（D．C．問題3，4をみよ。）

第8の問題。3人の競技者による得点の問題について。（D．C．問題6をみよ。）

第9の問題。ホイヘンスの第5の問題について。これについてはモンモールの著書第4部において述べたが，実はヨハンネス・ベルヌーイが注意したように第1版においてモンモールは誤った陳述をした。ド・モァヴルはここではじめて一般の公式，すなわちゲームの回数を利限しない場合に2人の競技者が互いに対手を破滅させる確率に関する一般の公式を出版したのである。（D．C．問題7をみよ。）

第10の問題。2人の競技者が24枚の硬貨で勝負を争う。3つのサイコロを振ったとき11が出たらAは1枚の硬貨をもらい，14が出たらBがもらう。かくして先に12枚の硬貨を得たものを勝ちとする。このとき2人の勝つ確率はいくらか。（D．C．問題8をみよ。）

第11と第12の問題。ホイヘンスの第2の問題について。（拙稿（Ⅱ）p 82，D．C．問題10，11をみよ。）

第13の問題。ホイヘンスの第1の問題について。

第14の問題。ホイヘンスの第4の問題について。

第15の問題。Waldegrave の問題について。これについてはモンモールの著書第5部において述べたが，ド・モァヴルは3人の場合について研究している。そしてこれは後に4人の場合に拡張された。彼がこの問題の解法をはじめて出版したのである。

第16と第17の問題。木球のゲームに関する問題について。（モンモール第4

部。ただし本稿においては省略。D．C．問題37，38をみよ。）

第18と第19の問題。（D．C．問題39と40をみよ。）

残りの7つの問題は遊戯の持続に関するものである。（D．C．問題58，60，61, 62, 63, 65, 66 をみよ。）

以上の説明から明らかなように De Mensura Sortis は歴史的に貴重な文献であり，それに含まれている結果は既に Ars Conjectandi の写本やモンモールとベルヌーイの間の書簡にあらわれているとはいえ，多くの重要な結果がはじめて出版されたという点が注目に値する。

さていよいよ「偶然の教理」の内容について述べよう。これの第3版は年金に関するものを除外して74個の問題を含んでいる。

問題 1．1個の勝負においてAとBの勝つ確率をそれぞれ p, q とする。Bが1個勝つ以前にAが3回勝つ確率が$\frac{1}{2}$（すなわち even chance）なりとすれば p, q はいくらか。（これは De Mensura Sortis の第3の問題である。）

解　$p^3=\frac{1}{2}$，故に $p=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$q=1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

問題 2．同じくBが2回勝つ以前にAが3回勝つ確率が$\frac{1}{2}$のとき，p，q はいくらか。（M．S．第4の問題。）

解　$p^4+4p^3q=\frac{1}{2}$　を解くとよい。

問題 3. 4. 5. これは一般に次のように述べられる。1回の試行で事象が起る偶然の数を a，起らない偶然の数を b とする。このとき事象が少なくとも r 回起ることが同等偶然（even chance）であるためには何回試行を行なわなければならないか。（M．S．第5，第7の問題。）

解　r=1 のとき x を求める試行の数とする。事象が x 回引きつづき起らない確率は $\frac{b^x}{(a+b)^x}$ なる故，事象が少なくとも1回起る確率は $1-\frac{b^x}{(a+b)^x}$ である。それ故 $\frac{b^x}{(a+b)^x}=\frac{1}{2}$ を解くとよい。

ド・モァヴルはこれより以下の近似公式を導いた。$\frac{b}{a}=q$ とおくと上式より

$$x\log\left(1+\frac{1}{q}\right)=\log 2$$

これより $q=1$ ならば $x=1$。また q が 1 より大ならば $\log\left(1+\frac{1}{q}\right)$ を展開して

$$x\left\{\frac{1}{q}-\frac{1}{2q^2}+\frac{1}{3q^3}-\frac{1}{49^4}+\cdots\cdots\right\}=\log 2$$

となる。故に　$x \doteqdot q\log 2 \doteqdot \frac{7}{10}q$　となる。

次に $r=3$ のとき，事象が x 回のうち少なくとも 3 回起る確率は $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)^x$ の展開式の最初の $(x-2)$ 項の和でありこれが $\frac{1}{2}$ なるを以て，最後の 3 項の和も $\frac{1}{2}$ でなければならぬ。すなわち

$$b^x+xb^{x-1}a+\frac{(x-1)}{1\cdot 2}b^{x-2}a^2=\frac{1}{2}(a+b)^x$$

となる。

$\frac{b}{a}=q$ とおけば $\left(1+\frac{1}{q}\right)^x=2\left\{1+\frac{x}{q}+\frac{x(x-1)}{2q^2}\right\}$ となり，$q=1$ のとき $x=5$ となる。

q がしだいに大きくなるとき $\frac{x}{q}=Z$ とおくと，$e^z=2\left(1+Z+\frac{Z^2}{2}\right)$ となる。この Z はほぼ 2·675 に等しいので，ド・モァヴルは x がつねに 5q と 2·675q の間にあると結論した。しかし証明はしておらない。

なおこの問題に関し一般に彼は x が次の値の間にあるとその表を与えた。

$r=1$ のとき	1q	と	0.693q	の間に
$r=2$	3q		1.678q	
$r=3$	5q		2.675q	
$r=4$	7q		3.672q	
$r=5$	9q		4.670q	
$r=6$	11q		5.668q	

そして q が十分大きい場合に，少なくとも n 回起るためには，試行を $\frac{2n-1}{2}q$

回すなわち大略 nq 回行なわねばならぬと推論している。しかしこれに関して深い研究をしているわけではない。

さてこの問題の次に，ド・モァヴルは等しい個数の面をもつサイコロをいくつか投げたとき，出る目の和が予め指定された数になる確率を論じている。

問題 6．3人の競技者による得点の問題について。(M．S．第8の問題。)

これに関してド・モァヴルはフェルマと同じ解法を与えている。その上競技者が何人であってもできるだけ計算がしやすい法則を与えているがそれはやはりフェルマの解法に基礎をおくものである。

問題 7．ホイヘンスの第5の問題について。（M．S．第9の問題。)

さきに述べたようにド・モァヴルはヤコブス・ベルヌーイと同じ方法でこの問題を一般化し，証明を附したその結果を De Mensura Sortis においてはじめて出版した。しかしその証明は非常に単純であり完全というわけにはいかない。何故ならAがBを破滅させる確率とBがAを破滅させる確率との比を求め結果的にはいずれか一方は破滅しなければならぬと仮定することにより，2つの確率の絶対値を求めているからである。詳細は De Morgan の著書 Essay on Probabilities (1838) 附録Ⅰを見られたい。なおこの古い書物は本学の書庫において実際に見ることができる。

問題 8．(M．S．第10の問題。)

問題 9．AとBとの技倆の比は a 対 b である。Aは賭金から q を得るか又は p を失なうまで争い，BはAが金額Gを供託したならば自分は金額Lを供託するという。このときAの有利不利をしらべよ。

これは問題7の拡張である。というのは一方が破滅するまで勝負をする訳ではなく，また両者の供託の仕方が同一でないからである。

問題 10．11．A，B，C が n 個の面をもつサイコロを投げて勝負を争う。そのうち a 面はAに，b 面はBに，c 面はCに有利とし，$a+b+c=n$ とす。いま3人が順次に投げるとき各人の期待値の比を求めよ。（M．S．第11と第12の問題。)

問題 12．AとBが2つのサイコロを交互に投げ，Aが7を出したら勝，Bが6を出したら勝とする。2人の期待値の関係を求めよ。（ホイヘンスの第14

の問題，拙稿（Ⅱ）80頁。）

問題 13．Bassette のゲームについて。（拙稿（Ⅱ）96頁第21の問題。）

問題 14．Pharaon のゲームについて。（モンモール第２部。）

問題 15——20．これらにおいてド・モァヴルは偶然の簡単な問題から順列組合せの理論へと進んでいる。これは現代の流儀にくらべると逆である。

問題 21——25．これらは籤の問題の応用を論じている。そのなかに註として次の級数の公式を述べている。

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a-1}$$

$$=\log\frac{a}{n}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2a}+\frac{A}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{B}{4}\left(\frac{1}{n^4}-\frac{1}{a^4}\right)$$

$$+\frac{C}{6}\left(\frac{1}{n^6}-\frac{1}{a^6}\right)+\cdots\cdots$$

ここに $A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{1}{30}$, $C=\frac{1}{42}$, ……

問題 27——32．Quadrille のゲームについて。これは組合せの理論の簡単な例である。

問題 33．Pharaon のゲームについて。

問題 34．AとBが勝つ偶然の比は a 対 b である。Aが妨害されずに勝つ限りBは彼自身をAにむけることを余儀なくされる。このときAが彼自身の手により得る利益は何程か。

解　求める結果は

$$\frac{a-b}{a+b}\left\{1+\frac{a}{a+b}+\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{a^3}{(a+b)^3}+\cdots\cdots\right\}=\frac{a-b}{b}\quad ある。$$

問題 35．全部相異なる文字 a, b, c, d, e, f,…… を１例にならべる。もしaが１番目にあり，bが２番目にある，…… というようにならんでいればそれらは正しい排列にあるというが，cが４番目，dが７番目 …… というようにならんでいればそれらは乱雑な排列にあるという。n 個の文字のうち p 個が正しい排列にあり，q 個が乱雑ではあるが指定された位置にあり，残りの n−p−q 個が自由な排列にある確率を求めよ。（モンモール第２部。Treize, Rencontre の問題。）

解　求める確率は

$$\frac{1}{n(n-1)\cdots\cdots(n-p+1)}\left\{1-\frac{q}{1}\frac{1}{n-p}+\frac{q(q-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{(n-p)(n-p-1)}-\cdots\cdots\right\}$$

である。とくに $p=0$ ならば

$$1-\frac{q}{1}\frac{1}{n}+\frac{q(q-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n(n-1)}-\cdots\cdots$$

その上 $q=m-1$ ならば

$$1-\frac{m-1}{1}\frac{1}{n}+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\frac{1}{n(n-1)}-\cdots\cdots$$

となるが，これはモンモールの与えたものである。

上の公式を求めたド・モァヴルの方法を述べておこう。まず a が 1 番目にある確率は $\frac{1}{n}$ で，a が 1 番目にあり b が 2 番目にある確率は $\frac{1}{n(n-1)}$ である。故に a が 1 番目にあり b が 2 番目にない確率は $\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n-1)}$ である。同様に a, b, c が各自の位置にある確率は $\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ であり，これから a と b が各自の位置にある確率をひくと，a と b が各自の位置にあり c が自分の位置にない確率として

$$\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

が得られる。次に説明を簡単にするために $+a$ を以て正しい位置にあることをしめし，$-a$ を以て乱雑な位置にあることをしめす。例えば $+a+b+c-d-e$ は a, b, c が正しい位置にあって d, e が乱雑な位置にあることをしめす。これより

$$\frac{1}{n}=r,\quad \frac{1}{n(n-1)}=s,\quad \frac{1}{n(n-1)(n-2)}=t,\quad \cdots\cdots$$

とおくことによりド・モァヴルは

$$+b-a=r-s$$

$$+c+b-a=s-t$$

$$+c-a-b=r-2s+t$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

等々をみちびいた。しかし彼は一般の証明をすることなく，簡単な場合だけをしらべそれが一般に成立するものと仮定していた。

問題 36．前題の拡張，これには6つの系が附されている。

問題 37．38．（M．S．第16と第17の問題。）

問題 39．面の数が一定のサイコロを何回か投げるとき，あらかじめ約束した目を出す確率はいくらか。（M．S．第18の問題。）

解　面の数を p+1 とし，n を投げる回数，f を約束の目の数とすれば確率は

$$\frac{1}{(p+1)^n}\left\{(p+1)^n\frac{f}{1}p^n+\frac{f(f-1)}{1\cdot 2}(p-1)^n\right.$$
$$\left.-\frac{f(f-1)(f-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(p-2)^n+\cdots\cdots\right\}$$

となる。

問題 40．面の数が一定のサイコロを何回投げると，あらかじめ約束した目を出すことが可能になるか。（M．S．第19の問題。）

解　可能というのは確率が $\frac{1}{2}$ になる意味なので，上式を $\frac{1}{2}$ とおいて n を求めるとよい。しかしこれを解くことは精確にはできないのでド・モァヴルは次のような近似計算をした。すなわち

$$p+1,\ p,\ p-1,\ ,p-2,\cdots\cdots$$

を等比数列と考える。そして $r=\frac{p+1}{p}$ とおけば上式は

$$1-\frac{f}{1}\frac{1}{r^n}+\frac{f(f-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{r^{2n}}-\frac{f(f-1)(f-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{r^{3n}}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}$$

となりこれより $\left(1-\frac{1}{r^n}\right)^f=\frac{1}{2}$　故に $\frac{1}{r^n}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{f}}$

となって n を対数により求めることができる。

この近似が成功したのは等差数列を等比数列と考えることができたからであり，それは数列の各数が大きくて間隔が小さい場合に可能である。このアイデアは王立学会の秘書 Halley 博士に負うものであるとド・モァヴルが感謝の意を表している。このすぐれたアイデアは後年ラプラスによっても注目された。

問題 41．1としるされた面を a 個，2としるされた面を b 個，3としるされ

た面をc個，……をもつプリズムをn回投げたとき，1の面と2の面が必ずあらわれる確率を求めよ。

解　a+b+c+d+……=s とすれば求める確率は

$$\frac{1}{s^n}[s^n-\{(s-a)^n+(s-b)^n\}+(s-a-b)^n]$$

である。

問題 42.（重要ではないので省略。）

問題 43. いくつかの事象の確率が与えられているとき，それが与えられた順序に起る確率を求めよ。ただし何回起ってもかまわないものとする。

問題 44．45． Waldegrave の問題（M．S．第15の問題。）

問題 46．47． Hazard（偶然）のゲームについて。

問題 48．49． Raffling（富籤）のゲームについて。これは3つのサイコロを投げたとき，同じ目が3つ，又は2つ出た場合を論ずるものである。

問題 50． Whisk（箒）について。このゲームにおいて一方が名誉（カードの表を上にしておく）をうけない確率は

$$\frac{4}{13}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{25\cdot26\cdot25}{51\cdot50\cdot49}+\frac{9}{13}\cdot\frac{4\cdot3}{1\cdot2}\cdot\frac{25\cdot24\cdot26\cdot25}{51\cdot50\cdot49\cdot48}=\frac{650}{1666}$$

であると計算した。

問題 51——55．Piquet（杭）について。これは組合せの簡単な計算によって解けるカードの問題である。

さていよいよド・モァヴルの業績のうち最も重要な部分である遊戯の持続（モンモール，第4部）について述べよう。彼は序文において次のように述べている。「私が最初に遊戯の持続に関する問題の一般解法を試みようとはじめたときには，この題目に対して私に光を与えてくれる書物で当時存在するものは何にもなかった。というのはモンモールでさえも，彼の書物の第1版においてこの問題の解を与えたとはいえ，得失される賭は3個に限られ，競技者の間の技倆は等しいと仮定され，その上彼の解には証明がなく，またのちに証明が得られたときでも問題の一般の解を得るのに役立たなかった。したがって私自身の探求がもたらした結果は成功しているとはいえ，正しいかどうかをしらべてみることが強要された。私の見出した結果は後に一般に述べられる前に私の

雛形で出版された。」ここでいう雛形とは De Mensura Sortis のことである。

遊戯の持続の問題は一般に次のように述べられる。Aはm個の硬貨をもち，Bはn個の硬貨をもつ。1回のゲームにおいて2人の勝つ割合は a:b である。ゲームの敗者は相手に1つの硬貨をわたす。或回数のゲームが行なわれるか又はそれ以前に，競技者の1人が相手の硬貨を全部獲得する確率を求めよ。

ホイヘンスの第5の問題では回数の制限なしに全部を取り上げる場合を論じているが，これはそれより一般的である。

問題 58 59 においては $m=n$ の場合を解いている。そして $n=2, 3$ の場合をしらべた後に次の一般法則をみちびいた。

与えられた回数において勝負が終わらない確率を決定する法則。

いま n を競技者の各々がもっている硬貨の個数とする。$n+d$ を与えられた回数とする。このとき $a+b$ を n 乗して両端の項をすてる。次にこの残りに $a^2+2ab+b^2$ を掛けてまた両端の項をすてる。さらに $a^2+2ab+b^2$ を掛けて両端をすてる。これを繰返すこと $\frac{d}{2}$ 回におよんで得られた式を分子とし，分母を $(a+b)^{n+d}$ とする分数を作ればこれが求める確率である。ここに d が奇数のとき $d-1$ をもっておきかえる。

これによると $n=4, d=6$ のとき求める確率は次のようになる。まず $(a+b)^4$ を展開して両端をすて，$a^2+2ab+b^2$ を掛け両端をすて，さらに2回これを行なう。そして上に述べた分数を作ると

$$\frac{164a^6b^4+232a^5b^5+164a^4b^6}{(a+b)^{10}}$$

となる。これは勝負が10回のうちに終わらない確率である。

また上の計算において捨てた部分を集めると，それは与えられた回数において勝負が終了する確率となる。したがってそれは

$$\frac{a^4+b^4}{(a+b)^4}+\frac{4a^5b+4ab^5}{(a+b)^6}+\frac{14a^6b^2+14a^2b^6}{(a+b)^8}+\frac{48a^7b^3+48a^3b^7}{(a+b)^{10}}$$

$$=\frac{a^4+b^4}{(a+b^4)}\left\{1+\frac{4ab}{(a+b)^2}+\frac{14a^2b^2}{(a+b)^4}+\frac{48a^3b^3}{(a+b)^6}\right\}$$

となる。

さて $n=4.\ d=6$ のときいまの式における分子の係数は 4, 14, 48 となるが，

ド・モァヴルはこれについて一般の公式を与えた。これは非常に重要な結果である証明が与えておらないのが残念である。後年ラプラスがその著 Théorie analytique des probabilités においてAが n+2x 回においてまさしく勝つ確率は

$$\frac{a^n t^n}{\left\{\dfrac{1+\sqrt{1-4abt^2}}{2}\right\}^2+\left\{\dfrac{1-\sqrt{1-4abt^2}}{2}\right\}^2}$$

の展開における t^{n+2x} の数係であると証明した。ここに $a+b=1$ である。

問題 60. AとBの一方が4つの賭を得るか又は失なうまで争う。4回のゲームで勝負を終らせないためには2人の技倆の比をいかにすべきか。

問題 61. 同条件で，勝負が4回のゲームで終わることを3対1の賭にするためには，2人の技倆の比をいかにすべきか。

問題 62. 同条件で，勝負が6回のゲームで終わることを同程度の賭にするためには，2人の技倆の比をいかにすべきか。

問題 63. 64 においては $m \neq n$ の場合を解いているがやはり証明を与えておらないのが残念である。後年ラプラスが証明したように，Aが n+2x 回においてまさしく勝つ確率は

$$a^n t^n \frac{\left\{\dfrac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right\}^m-\left\{\dfrac{1-\sqrt{1-4c}}{2}\right\}^m}{\left\{\dfrac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right\}^{m+n}-\left\{\dfrac{1-\sqrt{1-4c}}{2}\right\}^{m+n}}$$

の展開における t^{n+2x} の係数であらわされる。ここに $c=abt^2$ とす。

問題 65. Aが無限の資本をもつときすなわち m が無限のとき，与えられた回数においてBを破滅させる確率を求めよ。

解　AがBに勝つための賭の数を n とし，n+d をゲームの回数とする。a+b をまず n+d 乗する。d が奇数のとき，その展開式における最初の $\dfrac{d+1}{2}$ 項をとる。次にそれにつづく $\dfrac{d+1}{2}$ 項における係数を最初の $\dfrac{d+1}{2}$ 項の係数を逆にならべたものととりかえる。d が偶数のときは最初に $\dfrac{d}{2}+1$ 項をとり次にそれにつづく $\dfrac{d}{2}$ 項における係数を最初のものを逆にならべたものととりかえる。ただし1つだけは用いない。そしてこれらの項の和を分子とし，分母を

$(a+b)^{n+b}$ とすれば求める確率が得られる。

例えば $n=3,\ n+d=10$ のとき，$a+b$ を10乗すると

$$a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+210a^6b^4$$
$$+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}$$

となる。$d=7$ は奇数なる故最初の $\frac{d+1}{2}=4$ 項をとり，次の4項の係数をとりかえたものを作って，上のように分数を作ると

$$(a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+120a^6b^4+45a^5b^5+10a^4b^6+a^3b^7)/(a+b)^{10}$$

となるが，これが求める確率である。もしAとBが等しい技倆ならば，この分数は $\frac{352}{1024}$ すなわち $\frac{11}{32}$ となる。

上式の正しい理由は組合せにおける次の問題から導かれる。

r 個の文字 a と s 個の文字 b と一列にならべたとき，左から数えて a の個数がつねに b の個数より n だけ多いならべ方は，r+s 個のなかから r−n 個をとる組合せに等しい。

例えば上の例における $120a^6b^4$ は $r=6,\ s=4,\ n=3$ から ${}_{10}C_3=120$ とその係数が求められる。

この方法はモンモール（第4部）によるものであるが，彼のやり方はあまり満足すべきものではなかった。ド・モァヴルの解法はこれを明確にしたものである。

ド・モァヴルはまた第2の解法を得ている。しかしこれには証明がなくただ公式だけを与えている。それ故，ここではラプラスによる公式から導いておこう。問題63.64.における公式においてmを無限大にすれば，Aが $n+2x$ 回にまさしく勝つ確率は

$$\frac{a^n t^n}{\left\{\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right\}^n}$$

の展開における t^{n+2x} の係数である。

問題 66. 与えられた回数にAはq個の賭に勝ち，Bがq個の賭に勝つ確率を求めよ。

問題 67. 与えられた回数にAはq個の賭に勝ち，Bがその間にq個の賭に

勝たない確率を求めよ。

このあと循環級数（Recurring Series）について述べているが，確率の計算においては級数の和を求めることがしばしばあるのでこれは重要なことである。次の問題71はその応用である。

問題 71．MとNが1回の勝負において勝つ割合はa対bである。そして一方が4つの賭を得るか又は失なうまで勝負を争う。これと同時に，RとSが1回の勝負において勝つ割合がc対dで，一方が5つの賭を得るか又は失なうまで勝負を争う。このときMとNとの勝負がRとSとの勝負より早く終わる確率を求めよ。

問題 73．AとBが1回の勝負において勝つ割合はa対bとす。2人がn回ゲームを行なって，Aがn回勝ったら$\frac{bn}{a+b}$円を見物人Sにわたし，n−1回勝ったら$\left(\frac{bn}{a+b}-1\right)$円をわたす，……と約束したらSの期待値はいくらか。

解　これに関してはド・モァヴルは結果だけを述べて証明をしていない。Aがn回勝った確率は$\left(\frac{a}{a+b}\right)^n$なので，その期待値は$\left(\frac{a}{a+b}\right)^n\frac{bn}{a+b}$となる。また（n−1）回勝つ確率は$\frac{na^{n-1}b}{(a+b)^n}$なので，その期待値は$\frac{na^{n-1}b}{(a+b)^n}$$\left(\frac{bn}{a+b}-1\right)$となる。

以下これをつづけてその和を求めるのに

$n=c(a+b)$ とおくと，分子は

$$a^nbc+na^{n-1}b(bc-1)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2(bc-2)+\cdots\cdots$$

となり，括弧はそのなかが正なる限りつづく。この和は

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-bc+1)}{(bc-1)!}a^{n-bc+1}b^{bc-1}bc$$

となるがこれはド・モァヴルの結果と一致する。

さてAとBとの技倆の比がa対bなるとき，ベルヌーイの定理によれば試合回数を大きくするとAとBの勝つ回数はa対bに近づくことが高程度の確からしさで成立する。このことに関してド・モァヴルは問題73を解いた後に研究し

ているがベルヌーイの定理の逆の利用を問題にしている。彼は引きつづき「級数に展開した二項級数 $(a+b)^n$ の項の和を近似的に求める方法」を論じているが，これは「正規曲線」(Normal Cuwe) の公式例えば確率誤差などを始めて述べたものである。実はこれに関する部分文は既に小さな論文 Approximatio ad Summam Terminorum Binomii $\overline{a+b}^n$（二項級数の項の和の近似）として1733年に少数の友人に配布している。この英訳は今日 D. E. Smithの A source book in mathematics (1929) 566頁において見ることができる。

問題 74. n回の試行のうちに，要求された事象を中断することなくp回実現させる確率を求めよ。

中断することなくp回つづいたものをp個の連 (run) という。

解　この問題に関してド・モァヴルは結果だけを述べて証明をしておらない。

1回の試行において事象が実現する確率をa，実現しない確率をbとする。いま u_n を以てn回の試行にp個の連が起る確率を表わせば，

$$u_{n+1}=u_n+(1-u_{n-p})ba^q$$

となる。これより母函数を用いて解くのが近代の方法である。

以上で74個の問題を終わり，このあと年金算について述べている。

かくしてド・モァヴルの大きな業績は遊戯の持続，循環級数の理論，スターリングの定理の援助によりベルヌーイの定理の価値を拡大したこと，などであることが理解されたのであろう。また既に述べたように種々の重要な結果に対して彼がその証明を隠さなかったならば，彼に対する我々の恩義はさらに増大したであろう。しかし確率論に対する貢献が彼以上であった数学者は他におらない，唯1人の例外ラプラスを除いて。

(1962. 4. 20.)