線型計画と不確実性

古瀬大六

§ 00. Stochastic LP Problems : —

典型的な LP 問題

$$\min c'x$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

において，A, b, c が何等かの母集団からのサンプルとして与えられる場合，この x をどうして決めたらよいだろうか。これが，いわゆる，stochastic linear programming problems に外ならない。LP の実用化の妨げとなっている最大の難点の一つが，定数 A, b, c の不確定性にあることを考えるとき，stochastic LP のもつ実践的価値は極めて大きい，といわなければならない。

確定的 LP のときと異なり，この stochastic LP の最適解 x^0 には，その立場立場によって，多種多様なものが存在しうる。そのうちで，今までに最もよく研究されているのは，次の三つの互いに異なった立場からする最適解についてである。

$$\begin{cases} \text{wait and see} \\ \text{here and now} \begin{cases} \text{one-stage} \\ \text{two-stage} \end{cases} \end{cases}$$

A, b, c の確定値を観測した上で，確定的 LP を解いて x^0 を求めようとするのが wait and see situation である。これは，通常の deterministic LP そのものに外ならない。A, b, c がいくらになるかはっきりしないうちに，予め x^0 を決めておかなければならないのがむしろ現実的な要求である。この要求に応えようとするものが here and now situation である。

事前に x^0 を決める場合でも，後で A, b, c が確定したときに，改めてその infeasibility を何等かの方法で補正することができる場合 (two-stage problem) と，それができない場合 (one-stage problem) とに分けて考えなければならない。

以下，これら種々の場合について，その最適解の求め方を考えてみよう。これらは，大部分，Dantzig, Madansky その他の諸学者の研究結果を再編集したものである。

§ 10. Wait and See Situations : —

A, b, c の値の確定を待って，おもむろにその最適解を求めるのであるから，deterministic LP を解けばよい。最適解の算定，という点では通常の LP と何等異なるところはない。然し，このような決定が，種々の A, b, c について何度かくりかえし行なわれるならば，これらの多数の確定的 LP の最適解がどのような分布をもつだろうか，という疑問が湧いてくることは，当然といってよい。

この wait and see situation における多数の確定的 LP の最適解の分布を予測するという問題を最初にとりあげたのは，Iowa State Collage の M. M. Babber, "Statistical Approach in Planning Production Programs for Independent Activities," *Doctoral Thesis*, 1953 及び，G. Tintner, "Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics," *Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming*, Washington, D. C., Jan. 27—29, 1955, Vol. 1, pp. 197—228 である。

その基本的な方針は， $Ax \geq b$ の基底解 $B^{(k)}z^{(k)}=b$ の各々について，それが feasible であるような (A, b, c) の変域 S_k，それが最適解であるような (A, b, c) の変域 T_k を求め，その共通領域 $U_k=S_k \cap T_k$ を確定する，というやり方である。これらの共通領域 $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_K$ がきまりさえすれば，与えられた確率分布函数 $P(A, b, c)$ から， 最適解 x^0 の分布， 目的函数

$c'x^0$ の分布を計算することは，単純な数値計算の問題にすぎない。

しかし，これら U_k を確定する手続きは，それほど簡単ではない。(a_{ij}, b, c_j) が互いに独立な正規分布をもっているならば，Tintner の方法で，比較的簡単に，最適解 x^0 の平均と分散との近似値を求めることができる。この独立性・正規分布の条件が満されないとすると，これを discrete な分布で近似させた上で，強引な目の子算を行なうより外に方法はない。更に大きな困難は，分布が独立であろうとなかろうと，これらの計算を全部の基底解の数 K (10×20 の LP であれば，大体 $K=300,000$) 回くりかえさなければならないことである。IBM 7090 を以ってしても，これは恐ろしい計算量である。Tintner 自身の計算例が，2×4 という玩具的な大きさの LP についてであるのは，単に例を示すのだから小型で十分，という理由からではなく，これ以上の大きさになったなら実用的な計算は殆ど不可能となるからであるにちがいない。

この種の Tintner 流の stochastic LP についてのもう一つの疑問は，このような型の問題が現実に存在するかどうか，という点である。彼は，有限な土地と資本とを使って，トウモロコシと亜麻とを栽培する問題を例としてあげている。農家が自分の農場の生産係数 A, 土地・資本の供給量 b, 農産物の価格 c を確定的に知ってから，その最適生産計画を決定する，というのが wait and see sitnation の基本的立場である。これは，農業経営の現実から全く遊離した，馬鹿げた要請である。気温・降雨量が予めはっきり分かっているなどとは，誰一人考えてもみないであろう。

予め知ることのできない不確定な要因の下で，それら要因の確定に先立って，事前にその生産量を確定しておかなければならず，それを後になってから修正することが困難な事情のあるのが農業経営の実情である。このような現実的状況の下において何等かの合理的決定を行なおうとするならば，われわれは，現実を大きく離れた wait and see sitnation を放棄して，次節にのべる here and now sitnation による取扱いを考えなければならない。

§ 20. Here and Now Situations:—

Here and now situations は，その計画の事後修正が可能であるかどうかによって，one-stage here and now と two-stage here and now とに分かれること，上述の通りである。その各々はまた，各種の解法をもっており，次のような一覧表にまとめることができる。そのあるものは計算が楽であるという利点をもち，また他のものは，より有利な目的函数の値を保証するという長所をもっている。

21 one stage, here and now

$$\min c'x$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

211 直接的解法

discrete な分布の場合

連続分布の場合

212 expected-value solution

feasibility のチェック

213 chance-constrained LP

22 two-stage, here and now

$$\min c'x + f'y$$
$$Ax + By = b$$
$$x,\ y \geq 0$$

221 A, b, c が random

222 b のみが random

223 Madansky の不等式

224 surrogate solntion

§ 221. One-stage, Here and Now, 直接解法：—

$$\min E(c'x)$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0 \qquad \text{for any possible } (A, b)$$

この最適解 x^0 が，(A, b) がどんな値をとったとしても，決して infeasible になる心配がない（$Ax^0 \geq b$ for any possible A, b）ように予め配慮しておかなければならない。言いかえれば，解 x^0 の permanent feasibility を確保することが，この解法の最も重要な狙いである。

A, b, c の確率分布が discrete な有限個のヴェクトルだけからなっているならば，その最適解 x^0 を求めることは，それほど困難なことではない。すなわち，A, b, c の可能な組み合わせを $\{A^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)}\}, \cdots\cdots, \{A^{(R)}, b^{(R)}, c^{(R)}\}$，その確率を $p_1, \cdots\cdots, p_r, \cdots\cdots, p_r$ とすれば，上記の問題は，下記のような単純な確定的 LP 問題の形式をとる（〔17〕p. 7）。

$$\min \sum_{r=1}^{R} p_r c^{(r)} x$$
$$\begin{cases} A^{(1)}x - z^{(1)} & = b^{(1)} \\ A^{(2)}x \quad - z^{(2)} & = b^{(2)} \\ \vdots \qquad \qquad \ddots & \vdots \\ A^{(R)}x \qquad\qquad - z^{(R)} & = b^{(R)} \end{cases}$$
$$x,\ z \geq 0$$

このままでは条件式の数が非常に多くなって計算時間を徒らに増加させるから，その双対問題

$$\max\ b^{(1)\prime}u^{(1)} + \cdots\cdots + b^{(R)\prime}u^{(R)}$$
$$A^{(1)\prime}u^{(1)} + \cdots\cdots + A^{(R)\prime}u^{(R)} \leq \sum_{r=1}^{R} p_r c^{(r)}$$
$$u \geq 0$$

を解くことの方が，短時間ですむ。

A が確定的な非負行列（$a_{ij} \geq 0$）であり，かつ，$b^{(1)}, \cdots\cdots, b^{(R)}$ の i 要素

$b_i^{(1)}\cdots\cdots, b_i^{(R)}$ の最小値 b^*_i からなるヴェクトル b^* が possible である（$b^{(1)}, \cdots\cdots, b^{(R)}$ のうちのどれかに一致する）ならば，問題は更に単純化されて，

$$min \sum_{r=1}^{R} p_r c^{(r)} x$$

$$Ax \geq b^*$$

$$x \geq 0$$

となるから，簡単な確定的LP問題を唯一度解きさえすれば permanently feasible な最適解 x^0 が求められる。b^* が possible であるという条件は，一見非常に厳しいようにみえるが，b_i が互いに独立であれば b^* は必らず possible である。（[17], p. 7）。

A, b の分布が連続的に与えられている場合は，その permanently feasible region を厳格に算出することは困難である。しかし，その困難を切り抜けるには，連続的分布を discrete な分布で近似すればよい。それでもなお尨大な計算量に悩むのであれば，次節の expected-value solution を利用することを考慮すべきである。その解が permanently feasible である必然性は全く存在しないけれども，現実においてそうなる可能性は少なくないであろう。

§ 212. One-stage, Here and Now, 期待値解：—

Random なパラメーター A, b, c を，その期待値 EA, Eb, Ec で置き換えることによって，複雑な stochastic LP 問題を，単純な確定的 LP 問題に書き換えたい，という誘惑は，すべての人が絶えず感じているところであろう。

$$min \ (Ec)'x$$

$$(EA)x \geq Eb$$

$$x \geq 0$$

そのような試みに対する最大の障害は，この期待値解 x^0 が permanently feasible ではないこと，である。

純論理的には，期待値解 x^0 が必らずしも permanently feasible でないことは確かであるけれども，実践的立場からすれば，それだけの理由で期待値解の利用をあきらめる必要はない。期待値解 x^0 は僅かの計算量で求められるのだから，一たんこれを計算した上で，その feasibility をチェックする簡単な方法があれば，われわれの実践的要求は満足されるであろう。

それには，計算ずみの期待値解 x^0 と，各係数 a_{ij}, b_i のとり得る最大値 $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_i$ と，その最小値 $\underline{a}_{ij}$, $\underline{b}_i$ とを定数とし，a_{ij}, b_i を変数とする LP 問題

$$min \quad (a_{i1}x_1^0+\cdots\cdots+a_{in}x_n^0-b_i)$$

$$\begin{array}{l}\underline{a}_{i1}\leq a_{i1}\leq \bar{a}_{i1}\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\qquad\underline{a}_{in}\leq a_{in}\leq \bar{a}_{in}\\ \qquad\qquad\qquad\underline{b}_i\leq b_i\leq \bar{b}_i\end{array}$$

を作って解けばよい。すべての i についてこれを解いてみた結果，その目的函数の最適値が非負となるならば，

$$a_{i1}x_1^0+\cdots\cdots+a_{in}x_n^0-b_i\geq 0$$

$$(i=1,\cdots\cdots,\ m)$$

$$\therefore\ Ax^0\geq b\ \text{(for all possible } A,\ b)$$

となり，期待値解 x^0 が permanently feasible であるかどうかを簡単にチェックできる（[17] p. 5 and 6)。このテストをパスし，かつ，(EA), (Eb) が possible であるならば，期待値解 x^0 は最適解を与える。連続分布をもつ A, b に対しては，これが唯一の実用的解法であり，discsete な分布の場合であっても，少量の計算で同じ結果を得ることができる。それ故，失敗の危険はあっても，一度試みてみることが望ましい。

(EA), (Eb) が possible でなくても，permanently feasible であることが確められさえすれば，その解は十分使えること，勿論である。但し，その最適性は失なわれる。然し，その実用的価値は非常に高いであろう。

§ 213. Chance-constrained LP : —

$Pr\{Ax \geq b\}=1$ という条件は，現実の問題として，あまりにも厳格な要求であり，この条件を満足する $x \geq 0$ が存在しないことも少なくない。実践的には，ある1より小さい確率Pを指定して，x^0 の feasibility の確率がこの予め定められた値Pを下まわらないという条件をつけた上で，$c'x$ の期待値を最小にするような x^0 を求めたい，という場合が少なくないであろう。すなわち

$$\begin{aligned} &\min\ (Ec)'x \\ &Pr\{Ax \geq b\} \geq P \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

を解くことを考えればよい（[17], p. 1)。

Discrete な分布に対しては，§211 の形式に，

$$\sum_{r=1}^{R} P_r\, \delta_r \geq P$$

$$\delta_r = \begin{cases} 1 \cdots\cdots A^{(r)}x^0 \geq b^{(r)} \\ 0 \cdots\cdots A^{(r)}x^0 \ngeq b^{(r)} \end{cases}$$

という条件を付け加えた上で，全体を mixed Integer Program として解けばよい (R. Gomory : "An Algorithm for the Mixed Integer Problem," *The Rand Corporation RM-2597*, July 7, 1960)。

一変数・多重期間の在庫問題において，在庫切れの確率をP以下におさえる条件の下に，その利潤を最大にする問題を論じた A. Charnes and W. W. Cooper の論文〔4〕があるが，直接 LP 問題の形をとっていないので，詳論を避けたい。

連続分布の場合には，次節の two-stage here and now situation における最適解の $f \to \infty$ に対する極限として，その解を求めることができるであろう。

§ 220. Two-stage, Here and Now Situations : —

以上で取り扱ってきた解法は，x を一旦決めたならば，たとえそれが infeasible になったとしても，何等の救済策の施しようもないのだという前提の上に立っていた。だが，infeasible になったとしても（在庫切れが生じたとしても），それを何等かの方法で救済する（仲間の生産者から急いで仕入れる）ことは，必らずしも不可能ではない。然し，それには，かなり高いコストを支払わなければならないであろうことも，われわれの日常経験するところである。このような補償的行為の可能性が許されるならば，問題は，

$$\begin{aligned} &\min\ E(c'x+f'y) \\ &\quad Ax+By\geq b \\ &\quad x,\ y\geq 0 \end{aligned}$$

と書き改められる。この By とスラック変数 $-z$ とを併せたものを，新たに By と定義すれば，それは，

$$\begin{aligned} &\min\ E(c'x+f'y) \\ &\quad Ax+By=b \\ &\quad x,\ y\geq 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} A,\ b,\ c\ \text{は stochastic} \\ f,\ B\ \text{は deterministic} \\ f\ \text{は penalty cost} \end{array}\right)$$

となる。このうち，x は first-stage において決めなければならない変数であって，その際には A, b, c の値がいくらになるかは分かっていない。y は，A, b, c が確定した後に決定される変数であり，penalty cost f を支払うことによって失なわれた feasibility を取り戻すために使われる。ここでは，first stage の x がどのように決められようとも，また A, b の実現値がどうなろうとも，この条件式を満足する $y\geq 0$ は必ず存在する（complete system である）ものと仮定する。B が

$$By=y^{+}-y^{-}$$

の形をとるならば，この system は勿論 complete である。

§ 221. Two-stage, Here and Now, 直接解法（A, b, c が random）：—

A, b, c の分布が有限個の discrete な点からなり，$\{A^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)}\}, \cdots\cdots,$ $\{A^{(K)}, b^{(K)}, c^{(K)}\}$ だけの組み合わせが可能であるとする。この場合は，

$$\min\ \left(\sum_1^K p_k c_k\right)' x + p_1 f' y^{(1)} + \cdots\cdots + p_K f' y^{(K)}$$

$$\begin{cases} A^{(1)}x + By^{(1)} & = b^{(1)} \\ \quad \vdots \qquad\qquad \ddots & \ \vdots \\ A^{(K)}x \qquad\qquad + By^{(K)} & = b^{(K)} \end{cases}$$

$$x,\ y \geq 0$$

となるから，その双対問題

$$\max\ b^{(1)\prime}u^{(1)} + b^{(2)\prime}u^{(2)} + \cdots\cdots + b^{(K)\prime}u^{(K)}$$

$$\begin{cases} A^{(1)\prime}u^{(1)} + A^{(2)\prime}u^{(2)} + \cdots\cdots + A^{(K)\prime}u^{(K)} \leq \sum_1^K p_k c_k \\ B'u^{(1)} \qquad\qquad \leq p_1 f \\ \qquad B'u^{(2)} \qquad \leq p_2 f \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad B'u^{(K)} \leq p_K f \end{cases}$$

$$u \geq 0$$

を作って，これを Dantzig の decomposition principle〔7〕によって解けばよい。

連続分布の場合ならば，まず，second stage から考えると，x, A, b を所与として，y の最適値は，

$$\min\ f'y$$
$$By = b - Ax$$
$$y \geq 0$$

で表わされる確定的 LP の解 $y^0(b, A, x)$ によって与えられる。この y^0 の，

すべての可能な b, A に対する期待値を求めれば，

$$E(f'y^0)=f'\int y(A,\ b,\ x)\ dP\ (A,\ b)$$

となる。

この期待値 $E(f'y^0)$ は，x の凸函数である（[2] p.182；[5], p.200）。この段階における目的函数の値 $c'x+f^{0\prime}y^0$ を $C(A,\ b,\ x)$ と記せば，その期待値 EC は，

$$\begin{aligned}EC\ (A,\ b,\ x)&=E\{c'x+f'y^0(A,\ b,\ x)\}\\&=(Ec)'x+E\{f'y^0(A,\ b,\ x)\}\end{aligned}$$

となり，この EC もまた x の凸函数となる。

そこで再び first stage に戻って，x を出来るだけ有利に決めることを考える。それには，下記の確定的計画問題

$$\min_{x\geq 0} EC\ (A,\ b, x)$$

を解いて，最適解 x^0 を求めればよい。

これは典型的な convex program であるから，その local minimum は必らず同時に global minimum に一致する。これが $x\geq 0$ において連続的に微分可能であり，かつ，その最適解 x^0 がその非負変域の内点である $(x^0>0)$ ならば，周知の解析的手法により，

$$\frac{\partial EC\ (A,\ b,\ x)}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,\cdots\cdots,\ n)$$

を解いて，x^0 を求めることができる。

x^0 が corner minimum であるならば，gradient method, cutting-plane method [14] によって，次の必要十分条件を満足する点 x^0 を確定すればよい。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial EC\ (A,\ b,\ x^0)}{\partial x_i}\ x_i^0=0 & (i=1,\cdots\cdots,\ n)\\[2ex]\dfrac{\partial EC\ (\mathrm{A},\ b,\ x^0)}{\partial x_i}\geq 0 & (i=1,\cdots\cdots,\ n)\end{cases}$$

§ 222. Two-stage, Here and Now, 直接解法（bのみrandom）：—

前節の $EC\ (A, b, x)$ の具体的な形を確定することは，理論的には可能であっても，実際問題としては非常に困難なことが多いであろう。然し，A が一定で，b だけが random な場合には，この困難は大巾に軽減される。

以下，cutting-plane method を利用する場合を考えてみよう。まず，x の最適解の推定値として，任意の許容解 $x^{(0)}$ を選び，この $x^{(0)}$ を所与と考えた second stage LP 問題

$$\min_{y\geq 0} f'y \qquad By=b-Ax^{(0)}$$

を考えてみる。この右辺は random なヴェクトル b を含んでいるから，まともに解くよりも，その双対問題

$$\max_{\pi}\quad (b-Ax^{(0)})'\pi \qquad B'\pi\leq f$$

を解く方が楽である。その最適解を

$$\bar{\pi}(b,\ x^{(0)})$$

とする。$\bar{\pi}$ は，パラメーター空間 b の上で step function になる。双対定理により，

$$\min_{\substack{y\geq 0\\ By=b-Ax^{(0)}}} f'y=(b-Ax^{(0)})\bar{\pi}(b,\ x^{(0)})$$

$$\therefore\ c'x+\underset{b}{E}\min_{\substack{y\geq 0\\ By=b-Ax^{(0)}}} f'y=c'x+E^{b}(b-Ax^{(0)})\bar{\pi}(b,\ x^{(0)})$$

そこで，first stage に戻って，次の確定的 LP 問題を解いて，得られた最適解を $x^{(1)}$ とする。

$$\min z$$

$$c'x+\underset{b}{E}(b-Ax)'\bar{\pi}(b,\ x^{(0)})$$

$$=c'x-E\pi(b,\ x^{(0)\prime})Ax+E\pi(b,\ x^{(0)})'b\leq z$$
$$x\geq 0$$

この新しい $x^{(1)}$ について，同様な second stage の双対問題を解いてその最適解

$$\pi(b,\ x^{(1)})$$

を求め，次の primal LP 問題を解く。

$$\begin{aligned}&min\ z\\&c'x+\underset{b}{E}(b-Ax)'\pi(b,\ x^{(0)})\leq z\\&c'x+\underset{b}{E}(b-Ax)'\pi(b,\ x^{(1)})\leq z\\&x\geq 0\end{aligned}$$

この最適解 $x^{(2)}$ について同様の手続きをつくりかえすならば，

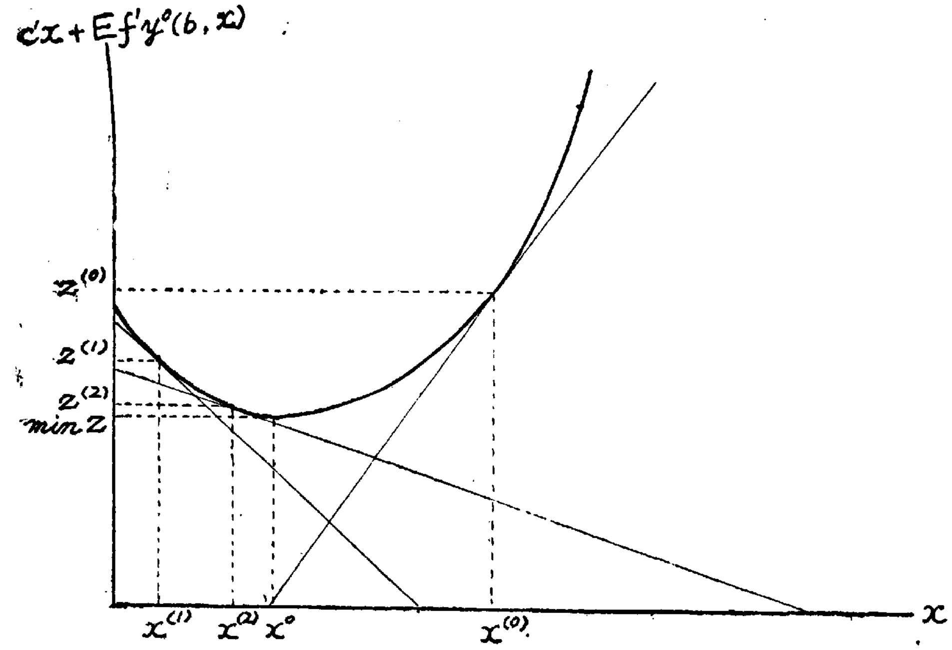
$$\begin{aligned}&lim\ c'x^{(k)}+E(b-Ax^{(k)})\pi(b,\ x^{(k)})\\&\quad=c'x^0+f'y^0\end{aligned}$$

となることが，Kelley によって証明されている〔14〕。$x^{(k)}$ の極限値もまた，多くの場合 x^0 に一致するけれども，必然的に一致するわけではない(〔9〕, p. 47)。

この x についての線型式

$$c'x+E\pi(b,\ x^{(k)})(b-Ax)=z$$

は，$z=c'x+\underset{b}{E}\pi(b,\ x)(b-Ax)$ 曲面の $x^{(k)}$ 点における supporting plane であり，上記の繰返し計算の過程は，次第に z を減少させるような順序で，supporting plane の数を追加していく過程に外ならない。その極限が，最適解 x^0 における supporting plane を生み出すであろうことは，直観的にも明らかであろう。



b の次元が多いときは，条件式

$$c'x+E\bar{\pi}(b,x^{(k)})b-E\bar{\pi}(b,\ x^{(k)})\ Ax\leq z$$

の係数

$$E\bar{\pi}(b,\ x^{(k)})'b,\ E\bar{\pi}\ (b,\ x^{(k)})$$

を正確に計算することは，Tintner の場合にも見られたように，容易なことではない。この計算量を節約する方法として，b の可能な値のうち，適当な有限個の点について $\bar{\pi}(b, x^{(k)})$ 及び $\bar{\pi}(b, x^{(k)})'b$ を計算し，その期待値をとることによって，上の係数を近似的に算出することを考えてみるべきであろう。その b のサンプルの個数と，解の収来速度との関係については，実験的計算を行なってみれば，興味ある結論が得られるかもしれない（[9], p. 22)。

§ 223. Madansky の不等式：—

A. Madansky は〔15〕において，b のみが stochastic である two-stage LP ($\min\ c'x+\underset{b}{E}f'y,\ Ax+By=b,\ x,\ y\geq 0$ の種々な解法による解の間に，ある不等式関係が成り立つことを証明した。

その，second stage の最適化が行なわれた後の目的函数を $C\ (b,\ x)$ と略

記する。

$$C\,(b,\ x) \equiv \min_{\substack{y \geq 0 \\ By = b - Ax}} (c'x + f'y)$$

この LP の解き方について今までのべてきた種々の方法は 4 種であった。

(1)　one-stage, expected-value solution……stochastic vector b の代わりに，その期待値 Eb を使った確定的 LP を解く。すなわち，

$$\begin{aligned} &\min\ c'x + f'y \\ &\quad Ax + By = Eb \\ &\quad x,\ y \geq 0 \end{aligned}$$

とおけば，その最適解は

$$\min_{x}\ C\,(Eb,\ x)$$

の最適解に一致する。$By = y^{+} - y^{-}$, $f \geq 0$ のときは，$C(Eb,\ x)$ は，

$$\begin{aligned} &\min\ c'x \\ &\quad Ax \geq Eb \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

に一致する。

これは，唯一回，小型の確定的 LP を解きさえすればよいのだから，計算量は最小ですむ。しかし，その最適解を実施に移したとき，infeasible になる危険が多い。

(2)　one-stage, wait and see solution……全部のパラメーターが確定した後に x, y の最適値を決める。すなわち，

$$\begin{aligned} &\min\ c'x + f'y \\ &\quad Ax + By = b \\ &\quad x,\ y \geq 0 \end{aligned}$$

(b は実測値)

を解くことになる。従ってその目的函数の期待値は

$$\underset{b}{E}\ \underset{x\geq 0}{min}\ C(b, x)$$

で表わされる。

この場合は，計算量が (1) と同じく僅少ですむばかりでなく，infeasible になる懼れは全くない。ただ，現実がこのような wait and see を許さない場合が多いのが，難点である。

(3)　two-stage, here and now situation…… b の確率分布だけが分かっているならば，まず x を先に決め，b が確定した後にその infeasibility を y によって補正する。その最適解は，次の問題の最適解として表わされること，既述の通りである。

$$\underset{x\geq 0}{min}\ \underset{b}{E}\ C(b, x)$$

その解は，permanently feasible ではあるが，計算量が多く，殊に連続的分布の場合には，正確な解を求めることがむつかしい。

(4)　two-stage, expected-value solution (Eb を利用する法)……(3) のもつ，計算量が尨大になるという欠陥を除くために，(1) の場合と同じ計算法で $\underset{x\geq 0}{min}\ (Eb, x)$ を解いて得られた最適解 $\bar{x}(Eb)$ を使用する。これであれば，計算は僅かの量ですむ。但し，この $\bar{x}(Eb)$ は，(1) にものべたように，infeasible になる可能性をもつから，そのような場合は (3) と同じく，second stage においてそれを補正する操作を許す。こうすれば，このような政策を何回もくりかえすことによって得られる目的函数の期待値は

$$\underset{b}{E}C\{b, \bar{x}(Eb)\}$$

で表わされる。

これら4種の解の間には，Madansky による次の不等式の成立が証明されている〔15〕。

$$\underset{(1)}{\min_{x\geq 0} C(Eb, x)} \leqq \underset{(2)}{E \min_{x\geq 0} C(b, x)} \leqq \underset{(3)}{\min_{x\geq 0} EC(b,x)} \leqq \underset{(4)}{EC\{b, \bar{x}(Eb)\}}$$

(1)	(2)	(3)	(4)
one-stage	one-stage	two-stage	two-stage
here and now	wait anl see	here and now	here and now
expected-value			expected-value
計算一回	その都度一回計算	計算量大	計算一回

或る種の条件の下では，これらの間に厳格な等式関係が成り立つ。

〔(1) と (2) とが一致する条件〕

$$\min_{x\geq 0} C(Eb, x) = E \min_{x\geq 0} C(b, x)$$

が成り立つための必要十分条件は，$\min_{x\geq 0} C(b, x)$ が b の線型函数であることである (Savage, L. J.: "The Foundations of Statistics," 1954, p. 265)。

但し，これは，2つの目的函数の値が一致するというだけであって，one-stage wait and see situation のその時その時の最適政策 $\bar{x}(b)$ と one-stage, expected valne solution の最適解 $\bar{x}(Eb)$ とが一致することを主張するものでは毛頭ない。従って，この (1) と (2) の一致のもたらす実用的意味は稀薄である。

〔(2) と (3) とが一致するための十分条件：I〕

(2) の wait and see situation の最適解 $\bar{x}(b)$ が，b 値に依存しないならば，

$$\begin{aligned} E \min_{x} C(b, x) &= EC(b, \bar{x}(b)) \\ &= EC(b, \bar{x}) \\ &= \min_{x\geq 0} EC(b, x) \end{aligned}$$

が成り立つ。然し，現実問題として，$\bar{x}(b)$ が b に依存しないようなケースがはたして存在するだろうか。

〔(2) と (3) とが一致するための十分条件：II〕

$C(b, x)$ が b の線型函数であるならば，

$$\min_{x \geq 0} EC(b, x) = \min_{x \geq 0} C(Eb, x)$$

すなわち，(1) = (3) が成り立つ。これと，Madansky の不等式とを併せて考えれば，

$$\overset{(1)}{\min_{x\geq 0} C(Eb, x)} = \overset{(2)}{E \min_{x\geq 0} C(b, x)} = \overset{(3)}{\min_{x\geq 0} EC(b, x)}$$

の等式が得られる。

この結果は，一見，(3) の two-stage, here and now situation の最適解を求める複雑な計算を，(1) の期待値解を求める簡単な計算によって代用しうるかのような印象を与える。然し (1) の解を実施して，その結果の期待値が $\min_{x\geq 0} C(Eb, x)$ となるためには，その最適解 $x(Eb)$ が，b の実現値の如何に拘わらず permanently feasible でなければならない。この厳格な条件が満たされないならば，(1) と (2) との一致は実践的意味をもたない。

われわれが最も強く希望するものは，(3) と (4) との一致であるが，この一致の十分条件については，未だ何等の結論も出されていない。

§ 224. Surrogate Solutions : —

前節の Madansky の不等式の狙いは，計算の面倒な (3) の two-stage, here and now solution の代りに，Eb を使って簡単な計算で同じ効果を得たい，ということである。既述の如く，(1) の $\min_{x\geq 0} C(Eb, x)$ の最適解が permanently feasible であるならば，(1) と (3) との等しいことを保証する条件を求めるとは，実践的に有意義である。

上に述べた，$C(bx)$ が b の線型函数である，という十分条件は，(1) の最適政策を一旦決めておけば，それを b の如何にかかわらず盲目的にくりかえして実行することによって，(3) の two-stage, here and now の場合と同じ効果を期待することができることを保証している。(1) の解が permanently feasible であることは，second stage の補償が不必要なことを意味する。それ故，(1) と (3) とが一致することは当然であろう。

同様の結果は $C(b,x)=C_1(b,x)+C_2(b)$ で，$C_1(b,x)$ が b の線型函数，$C_2(b)$ が x を含まない b だけの函数である場合にも成り立つ（[15],p.200）。Reiter はこれを更に一般化して，

$$C(b,x)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x)B_i(b)$$
$$A_i(x)>0,\ B_i(b)>0$$

の形であれば，

$$\underset{b}{E}\ \min_{x\geq 0}\sum_{i=1}^{n}A_i(x)B_i(b)=\min_{x\geq 0}\sum_{i=1}^{n}A_i(x)\underset{b}{E}B_i(b)$$
$$\therefore\ \underset{(2)}{E\min_{x\geq 0}C(b,x)}=\underset{(1)}{\min_{x\geq 0}C(Eb,x)}$$

が成り立つことを証明している（Reiter, S. : "Surrogates for Uncertain Decision Problems : Minimal Information for Decision Making," *Econometrica*, 1957, pp. 339—345）。

このように，random なパラメーターの代わりに，何等かの確定的なスカラー定数を使って計算を簡便化しようとする多くの試みが行なわれており，この定数を一般に surrogate とよんでいる。期待値はこのような surrogate の一つである。surrogate の使用は，計算量の節約を目的とするものではあるが，得られる目的函数の期待値が，正攻法の場合と正確に一致する必要はない。その不一致による損失と，計算量の節約による利益とのバランスをとることができさえすればよい。Simon, H. A, "Dynamic Programming under Uncertainty with a Quadratic Criterion Function," *Econometrica*, Vol. 24 (1956), pp. 74—81 ; Theil, H., "A Note on Certainty Equivalence in Dynamic Planning," *Econometrica*, Vol. 25 (1957), pp. 346—349; [3]，などを参照されたい。

(August 5, 1962)

〔1〕 Babbar, M. M., "Distributions of Solutions of a Set of Linear Equations (with an Application to Linear Programming)," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 50 (1955), pp. 854—869.

〔2〕 Beale, E.M.L., "On Minimizing a Convex Function subject to Linear Inequalities," *Jonrnal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol. 17 (1955), pp. 173—184.

〔3〕 Charnes, A., W. W. Cooper and G. H. Symonds, "Cost Horizons and Certainty Equivalents : An Approach to Stochastic Programming of Heating Oil," *Management Science*, Vol. 4, No. 3, April 1958, pp. 235—263.

〔4〕 Charnes, A. and W. W. Cooper, "Chance-Constrained Programming," *Management Science*, Vol. 6, No. 1, Oct. 1959, pp. 73—79.

〔5〕 Dantzig, G. B., "Linear Programming under Uncertainty," *Management Science*, Vol. 1 (1955), pp. 157—206.

〔6〕 Dantzig, G.B., "General Convex Objective Forms," *The Rand Corporation Paper P—1664*, April 9, 1959.

〔7〕 Dantzig, G. B. and P. Wolfe, "Decomposition Principle for Linear Programs," *Operations Research*, Vol. 8 (1960), pp. 101—111.

〔8〕 Dantzig, G.B. and A. Madansky, "On the Solntion of Two-Stage Linear Programs under Uncertainty," *The Rand Corporation Paper P—2039*, July 28, 1960.

〔9〕 Dantzig, G. B. and A. Madansky, "On the Solution of Two-Stage Linear Programs under Uncertainty," *The Rand Corporation RM—2751*, Aug. 10, 1961.

〔10〕 Elmaghraby, S. E., "An Approach to Linear Programming under Uncertainty," *Operations Research*, Vlo. 7 (1959), pp. 208—216.

〔11〕 Elmaghraby, S. E., "Allocation under Uncertainty when Demand has Continuons D. F.," *Management Science*, Vol. 6 (1960), pp. 270—294.

〔12〕 Ferguson, A. R. and G. B. Dantzig, "The Allocation of Aircraft to Routes—An Example of Linear Programming under Uncertain Demand," *Managemcnt Science*, Vol. 3 (1956), pp. 45—73.

〔13〕 Freund, R. J., "The Introduction of Risk into a Programming Model," *Econometrica*, Vol. 24 (1956), pp. 253—263.

〔14〕 Kelley, J. E. Jr., "The Cutting-Plane Method for Solving Convex Programs," *Jonrnal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 8 (1960), pp. 703—712.

〔15〕 Madansky, A.,, "Inequalities for Stochastic Linear Programming Problems," *The Rand Corporation RM-2287*, Nov. 13, 1958, pub. in Management Science, Jan. 1960, pp. 197—204.

〔16〕 Madansky, A., "Bounds on the Expectation of a Convex Function of a Multivariate Random Variable," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 30 (1959), pp. 743—746.

〔17〕 Madansky, A., "Methods of Solution of Linear Programs under Uncertainty," *The Rand Corporation RM—2752*, April 6, 1961.

〔18〕 Radner, R., "The Linear Team : An Exanple of Linear Programming under Uncertainty," *Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming*, National Bureau of Standards, U. S. Dept. of Commerce, Jan. 27—29, 1955, Vol. 1, pp. 381—396.

〔19〕 Talacko, J. V., "On Stochastic Linear Inequalities," *Trabajos de Estadistica*, Vol. 10 (1959), pp. 89—112.

〔20〕 Tintner, G., "Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics," *Procednigs of the Second Symposium on Linear Programming*, National Bureau of Standards, U. S. Dept. of Commerce, Jan. 27—29, 1955, Vol. 1, pp. 197—227.

〔21〕 Vajda, S., "Inequalities in Stochastic Linear Programming," *Bulletin of the International Statistical Institute*, Vol. 36 (1958), pp. 357—363.

〔22〕 Wagner, H. M., "On the Distribution of Solutions in Linear Programming Problems," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 53 (1958), pp. 161—163.

〔23〕 Wolfe, P., "Accelerating the Cutting Plane Method for Nonlinear Programming," *The Rand Corporation P—2010*, June 20, 1960.