Specification Errors と 推定値の特性（I）

地　主　重　美

1. 問題の所在

実際の計量経済学的な分析に当たって推定されるモデルはふつう真のモデルと異なっている。たとえば真のモデルに含まれている説明変数でありながら，推定される推定モデルから省かれている場合や，真のモデルに含まれている説明変数と，推計されるモデルに含まれている説明変数とが全く異なっているなどはそのよい例である。ある個人の，ある財に対する需要量が実際にはその財の価格と，その個人の可処分所得によって決定されるという場合に，もし推定式から可処分所得がおちていたとすれば，推定値は偏りをもつことになるだろう。また国民消費が国民所得に依存するというのに，これをたとえば総生産量に依存すると仮定して推定を行なったのでは不偏推定値をうることができない。このように誤った Specification による推定値の誤差を Specification Error という。ここでは Specification Error の生ずる特に興味あるケースについて考察してみる。第1は真の変数が脱落している場合であり，第2は系列相関のある場合における推定値の Specification Error

である。第3はたとえば個々の家計の消費方程式を経済全体の消費方程式として統合する場合に生ずるような Specification Error であり，統合によって経済行動に関する情報が減少するという設問に対する反論を用意する。第4は予備情報がパラメーターの推定にいかなる役割を果たすかが究明されるだろう。

2.　変数の脱落と Specification Error

いま真の方程式が次のようなものであるとしよう。

$$y=\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+e \qquad (1)$$

ここで e は平均値が零，分散がコンスタントである攪乱項，x_1, x_2 は確定変数で e から独立に分布しており，かつ平均値からの偏差を表わしているものとする。ところが(1)の推定式は次のようなものであると仮定しよう。

$$y=bx_1+u \qquad (2)$$

(2)式には(1)式に含まれている変数 x_2 が含まれていないために，第1に x_2 のパラメーター β_2 を推定することができず，第2に b も(1)式の β_1 の推定値とみなすことはできない。これは次のようにして証明される。

$$b=\frac{\Sigma x_1 y}{\Sigma x_1^2}=\frac{\Sigma x_1(\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+e)}{\Sigma x_1^2}$$

$$=\beta_1\frac{\Sigma x_1^2}{\Sigma x_1^2}+\beta_2\frac{\Sigma x_1 x_2}{\Sigma_1^2}+\frac{\Sigma x_1 e}{\Sigma x_1^2}$$

したがって

$$E(b)=\beta_1+\beta_2\frac{\Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2} \qquad (3)$$

いま，x_2 と x_1 との関係を示す次のような補助方程式を考える。

$$x_2=b_{21}x_1+v_{21} \qquad (4)$$

ここで v_{21} は攪乱項であり，$E(x_1 v_{21})=0$ であると仮定する。b_{21} は真の方程式(1)には含まれているが推定式(2)には含まれない変数 x_2 の，両者に含まれている変数 x_1 に対する回帰係数であるから，

$$b_{21}=\frac{\Sigma x_1x_2}{\Sigma x_1{}^2} \tag{5}$$

これを(3)式に代入すると，

$$E(b)=\beta_1+\beta_2 b_{21} \tag{6}$$

したがって(2)式で推定された x_1 の係数 b は真の方程式における係数 β_1 に，真の方程式における x_2 のパラメーター β_2 と補助方程式の回帰係数 b_{21} との積をプラスしたものにひとしい。それ故，b は β_1 の不偏推定値ではない。両者の差，すなわち

$$E(b)-\beta_1=\beta_2 b_{21} \tag{7}$$

を $E(b)$ のSpecification Error という。もし(2)式に含まれてない変数 x_2 と含まれている変数 x_1 との間に全く相関関係がないとすれば，したがって b_{21} が零にひとしいとすれば，Specification Error はもちろん零である。しかし，両者が正の相関をしているときには b は β_1 を過大推定し，逆に負の相関をしているときには過小推定する。では残差項の分散はどうだろうか。計算された残差は明らかに，

$$u=y-bx_1=\beta_1x_1+\beta_2x_2+e-bx_1$$

これに(6)式を代入すると，

$$\begin{aligned} u&=\beta_1x_1+\beta_2x_2+e-(\beta_1+\beta_2b_{21})x_1\\ &=e+\beta_2(x_2-b_{21}x_1)\\ &=e+\beta_2 v_{21} \end{aligned} \tag{8}$$

ここで

$$v_{21}=x_2-b_{21}x_1$$

であり，補助方程式(4)の残差である。(8)式から分散を計算すると次のような結果がえられる。

$$\sigma_u^2=\sigma_e^2+\beta_2^2\sigma_{v_{21}} \tag{9}$$

ところが，(4)式から

$$\sigma_{v_{21}}^2=\sigma_1^2(1-r_{12}^2) \tag{10}$$

となることは明らかである。ここで σ_1^2 は x_1 の分散，r_{12} は x_1 と x_2 との相関係数である。かくて，

$$\sigma_u^2=\sigma_e^2+\beta_2^2\sigma_1^2(1-r_{12}^2) \tag{11}$$

それ故

$$\sigma_u^2>\sigma_e^2 \tag{12}$$

これは，誤った Specification をした推定式の残差項の分散が，真の式の攪乱項の分散よりも大きいことを意味する。Specificationに誤りがあると残差分散を大きくし，その結果，重相関係数は真の式から求められる重相関係数に対して相対的に小さくなるだろう。ここから，Specificafion の選択に当たって重相関係数の大いさが1つの基準になるであろう。もし x_1 と x_2 とが完全に相関し，したがって $r_{21}^2=1$ のときにはx_1 と x_2 とは全く同一変数とみてさし支えないから

$$\sigma_u^2=\sigma_e^2$$

となり，x_2 の脱落によって残差分散の大いさを変えることはない。

いま次のようなコップ・ダグラス型の生産函数[1]を例にとって上述の Specification Error の説明をしてみよう[4]。

$$O=kx_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots\cdots x_k^{a_k}e^u \tag{13}$$

ここで O は生産量，k は定数，x_1，x_2,……x_k は生産要素，$a_i(i=1\cdots\cdots k)$ は生産の弾力性をあらわすパラメーター，e^u は攪乱項であり $E(x_ie)\neq 0$ (for $i=1,\cdots\cdots k$) と仮定する。いま推定式を

$$O=kx_1^{b_1}{}_2^{b_2}\cdots\cdots x_{k-1}^{b_{k-1}}u^{u'} \tag{14}$$

であると仮定する。ここで x_k が脱落していることが明らかである。この結果 $E(x_kx_i)\neq 0$ (for $i=1,\cdots\cdots,k_{-1}$) であるかぎり，推定されるパラメーター $b_1,\cdots\cdots b_{k-1}$ はもはや $\beta_1,\cdots\cdots\beta_{k-1}$ の不偏推定値とはならない。ここでは冪指数の和として表わされる規模に対する収穫の推定値だけを問題にするとすれば，(14)から

$$\hat{l} = \sum_{i=1}^{k-1} b_i \tag{15}$$

その真の値は

$$l = \sum_{i=1}^{k} a_i \tag{16}$$

(4)式に対応する補助方程式は，

$$x_k = x_1^{P_1} x_2^{P_2} \cdots\cdots x_{k-1}^{P_{k-1}} e^v \tag{17}$$

したがって(6)と同じように

$$E \sum_{i=1}^{k-1} b_i = \sum_{i=1}^{k-1} \left(a_i + P_{ik} a_k \right) \tag{18}$$

がえられる。係数の Specification Error は

$$\begin{aligned} E(\hat{l} - l) &= E\left\{ \sum_{i=1}^{k-1} b_i - \sum_{i=1}^{k} a_i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (a_i + P_{ik} a_k) - \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k \sum_{i=1}^{k-1} P_{ik} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} a_i = a_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} P_{ik} - 1 \right) \end{aligned} \tag{19}$$

それ故 Specification bias の大いさ，したがって規模に対する収穫が真の値に対して過大評価であるか過小評価であるかは補助方程式における係数の和 $\sum_{i=1}^{k-1} P_{ik}$ によってきまる。もしこの和が 1 より小であればバイアスは負，すなわち過小評価を意味し，またもしこの和が 1 よりも大であればこのバイアスは正，したがって過大評価を意味している。かくて

$$\sum_{i=1}^{k-1} P_{ik} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1 \quad \text{ならばバイアス} \begin{matrix} <0 \\ =0 \\ >0 \end{matrix} \tag{20}$$

となる。生産函数におけるパラメーターの推定において一番よく現われる Specification Error は，企業者用役，または管理用役という生産要素が推定式から脱落していることによるものである。[(8)(6)] もし，ある農夫が，耕地をすぐとなりの農夫の 2 倍にふやしたとしよう。彼がとなりの農夫の 2 倍だけの企業者能力をもっているという例はきわめて少なく，2 倍だけの経営的才幹を

働かせるというのも稀であって，一般には2倍以下であり，もしこの仮説が正しいとすれば，補助方程式の係数の和は1より小さく，その結果，規模に対する収穫を過小評価することになるだろう。

第2の例は，ある生産要素について，その質的差異を考慮せずに，これを単一生産要素として評価する場合にも Specification Error が現われる。いま真の生産函数が次のようなものであるとしよう。

$$O = kc^{a_1}(qL)^{a_2}e^{u} \tag{21}$$

ここで C は資本，L は労働力，q は標準労働力に対し当該当働力の質的格差を示す指標，e^{u} は攪乱項で $E(Ce)=0$ $E(Le)=0$ $E(Lq)=0$ と仮定する。推定される生産函数は，次のようなものと仮定する。

$$O = kC^{b_1}L^{b_2}e^{u'} \tag{22}$$

推定される仮説式では，労働力の質的格差が無視され，格差を示す指標 q が脱落している。ここで推定式に含まれる変数と，真の方程式には含まれるが推定式には含まれない変数との関係を示す補助方程式は次の通りである。

$$q_1 = C_i^{p_1} L_i^{p_2} e_i^{v} \tag{23}$$

したがって，

$$q_i^{a_2} = C_i^{p_1 a_2} L_i^{p_2 a_2} e_i^{v a_2} \tag{24}$$

これから

$$\begin{aligned} E(b_1) &= a_1 + p_1 a_2 \\ E(k_2) &= a_2 + p_2 a_2 = a_2(1+p_2) \end{aligned} \tag{25}$$

かくて Specification Error は，

$$\begin{aligned} E(\hat{1}-1) &= E\left\{(b_1+b_2)-(a_1+a_2+a_2)\right\} \\ &= a_1 + p_1 a_2 + a_2 + p_2 a_2 - a_1 - a_2 - a_2 \\ &= a_2(p_1 + p_2 - 1) \end{aligned} \tag{26}$$

良質の労働力は一般により多くの資本量およびより少ない労働量と結びついているから

$P_1>0 \quad , \quad P_2<0$

となり，この結果，資本による生産の弾力性を過大評価し，労働による生産の弾力性を過小評価することになる。もし

$P_1+P_2<1$

ならば，労働力の質的差異を無視することによって，規模に対する収穫の推定値は真の推定値を過小評価することになり，逆の場合は逆である。

次上の説明から既に明らかなように，補助方程式の係数の和は生産の規模を表わし，規模に対する収穫不変のときにはこの和が 1，規模に対する収穫逓減のときには 1 より小，規模に関して収穫逓増のときには 1 より大である。

2 つの例について説明したような Specification Error は生産函数論でしばしば直面する問題であるので，簡単なダイヤグラムで説明してみよう。便宜上，変数はすべて対数で表わされるものとし，さらに生産要素はただ 1 個であるとする。

$$O=k+bx_1+u \tag{27}$$

企業者用役 x_2 が考慮された真の生産函数は，

$$O=h+a_1x_1+a_2x_2+e \tag{28}$$

下の図で直線 f_1 は企業者用役 x'_2 に対する函数を示し，直線 f_2 は企業者用役 x''_2 に対応する函数を示している。しかるに推定のため観測される回帰線は AB によって示されるだろう。

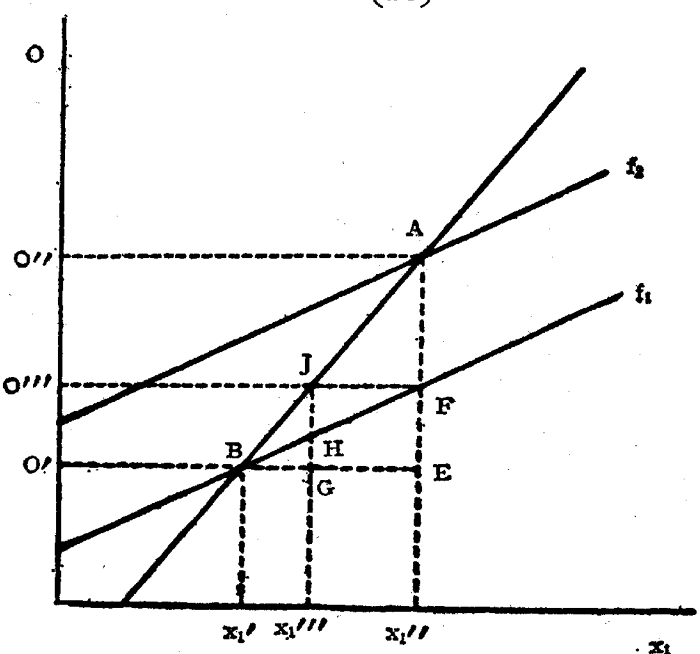

Fig. 1

明らかに

$$b=\frac{O''-O'}{x_1''-x_1'}=\frac{AE}{BA}$$

また

$$a_1=\frac{O'''-O'}{x''_1-x'_1}=\frac{EF}{BE}$$

補助方程式は

$$x_2=x_1p+v$$

であるから，

$$b=a_1+pa_2$$

したがって

$$(\hat{\imath}-1)=b-(a_1+a_2)=(a_1+pa_2)-(a_1+a_2)$$
$$=a_2(p-1)$$

$$a_2=\frac{\varDelta O}{\varDelta x_2}$$

であるが x_2 は図に明示されていないためにこれを x_1 の単位で表現せざるをえない。x_1 が x'_1 から x''_1 に上昇すると生産物 O も O′ から O″ に上昇する。しかし生産物の増加のうち，もっぱら x_1 の用役に帰せられるものは O′O‴ であり，余りの O‴O″ は x_2 の用役によって生まれたものと考えてよい。いま，x_1 を x'_1 から x'''_1 まで増加することによって OO‴(≡JG) の生産量の増加をみるが；このうち HG だけは x_1 の増加によるものであり，JJ は x_2 の増加に帰せられる。したがって

$$b=\frac{GJ}{BG}=\frac{GH}{BG}+\frac{JH}{BG}$$

ところが x_2 の増加がなかった場合，JG したがって EF だけ生産量を増加するに必要な x_1 の増分は BE であることを考慮すると，x_2 に帰せられる JH だけ生産量を増加させた x_2 の大いさを x_1 の単位で表現すると明らかに GE である。

かくて

$$a_1=\frac{GH}{BG}\quad,\qquad a'_2=\frac{JH}{GE}$$

ここで a'_2 は x_2 を x_1 の単位で表現した場合の回帰係数 a_2 である。そこ

で x_2 をもとの単位に直すために x_1 と x_2 のスケールの比を m とおけば，

$$a_2 = a'_1/\mathrm{m} = {}^{\mathrm{JH}}/_{(\mathrm{GE})\mathrm{m}}$$

これから

$$(\hat{\imath}-1) = \frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{BG}} - \left(\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HG}} + \frac{\mathrm{JH}}{(\mathrm{GE})\mathrm{m}}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{BG}} + \frac{\mathrm{JH}}{\mathrm{BG}} - \frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{BG}} - \frac{\mathrm{JH}}{(\mathrm{GE})\mathrm{m}}$$

$$= \frac{\mathrm{JH}}{\mathrm{BG}} - \frac{\mathrm{JH}}{(\mathrm{GE})\mathrm{m}}$$

したがって

$$\mathrm{BG} \overset{>}{\underset{<}{=}} (\mathrm{GE})\mathrm{m} \quad \text{ならば} \quad (\hat{\imath}-1) \overset{<}{\underset{>}{=}} 0$$

すなわち

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}} \overset{>}{\underset{<}{=}} \mathrm{m} \quad \text{ならば} \quad (\hat{\imath}-1) \overset{<}{\underset{>}{=}} 0$$

もし x_1 のスケールに対する x_2 のスケールの比が，GE に対する BG の比よりも小さいならばパラメーターの推定値は過小推定になり，逆は逆である。

いままでは推定値から脱落している変数が 1 個だけである場合についてのべてきたが，これが 1 個以上のときにも原理は全く同じである。いま真の方程式を

$$\mathrm{O} = \mathrm{k}x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots\cdots x_H^{a_H}\, x_{H+1}^{a_{H+1}} \cdots\cdots x_k^{a_k} e^{u} \qquad (29)$$

その推定式を

$$\mathrm{O} = \mathrm{h}x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots\cdots x_H^{b_H} e^{u'} \qquad (30)$$

と仮定する。推定式では真の方程式に含まれている K−H 個の変数 (i=H+1,……,K) が脱落している。補助方程式は

$$x_i = x_1^{P_{1i}} x_1^{P_{2i}} \cdots\cdots x_H^{P_{Hi}} e^{v} \quad (31)$$

$$(i = H+1 \cdots\cdots\cdots\cdots K)$$

のようにかかれるから，パラメーターの推定値は，

$$E(b_i) = a_i + \sum_{k=H+1}^{K} p_{ik} a_k \quad (32)$$

$$(i = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots H)$$

これからは Specification Error は

$$E(\hat{i}-1) = \sum_{k=H+1}^{K} a_k \left(\sum_{i=1}^{H} p_{ik} - 1 \right) \quad (33)$$

以上の結果をマトリックスで表示してみよう。真の方程式は

$$Y = X\beta + e \quad (34)$$

ここで y は従属変数で (n×1) 次の縦ベクトル，X は説明変数で (n×k) 次の行列，β はパラメーターで (k×1) 次の縦ベクトル，e は攪乱項で (n×1) 次の縦ベクトルである。この推定方程式は

$$Y = \overline{X}b + u \quad (35)$$

であると仮定する。$\overline{X}$ は (n×(k−m)) 次の説明変数の行列，b は ((k−m)×1) 次のパラメーターのベルトル，u は (n×1) 次の残差項のベクトルである。推定式ではそれぞれの方程式から m 個の変数が脱落しているから $\overline{X}$ は X の最後の m 列をおとした行列に外ならない。ここで X が確定変数行列であるとすれば，$\overline{X}$ もまたそうである。したがって

$$E(b) = E[(\overline{X}'\overline{X})^{-1}\overline{X}'Y] = E[(\overline{X}'\overline{X})^{-1}\overline{X}'X\beta + (\overline{X}'\overline{X})^{-1}\overline{X}e]$$

$$= (\overline{X}'\overline{X})^{-1}\overline{X}'X\beta = P\beta \quad (36)$$

ここで

$$P = (\overline{X}'\overline{X})^{-1}\overline{X}'X = (I \ P_k) \begin{pmatrix} 10 \cdots 0 p_{1k-m+1} \cdots P_{1k} \\ 01 \cdots 0 P_{2k-m+1} \quad P_{2k} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 \cdots 1 P_{kk-m+1} \cdots P_{kk} \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \overline{\beta} \\ \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

$\overline{\beta}$は推定式に含まれるパラメーターの真の値で，（k−m）個，β_k は推定式に含まれないパラメーターの真の値で m 個ある。

したがって（36）式は

$$E(b)=P\beta=\overline{\beta}+P_k\beta_k \tag{38}$$

Specification Error は

$$E(b)-\overline{\beta}=P_k\beta_k \tag{39}$$

である。

3.　系列相関と変数の脱落

真の方程式は

$$y_t=\beta x_t+\gamma y_{t-1}+e_t \tag{40}$$

また攪乱項 e は次のように系列相関しているとしよう。

$$e_t=\rho e_{t-1}+w_t \tag{41}$$

（41）式を（40）に代入すれば

$$y_t=\beta x_t+\gamma y_{t-1}+\rho e_{t-1}+w_t \tag{42}$$

いま e_{t-1} が推定式から脱落していると仮定する。このときパラメーターの推定値にいかなる影響を与えるであろうか。推定式は，

$$y_t=bx_t+cy_{t-1}+u_t \tag{43}$$

いま x は確定変数で e_{t-1} から独立であるとすれば，

$$E(c)=(\gamma+\rho d\,|\,x_t)=\gamma+\rho d \tag{44}$$

$$d=\frac{\Sigma e_{t-1}y_{t-1}}{\Sigma y_{t-1}^2}$$

（40）式から

$$\begin{aligned} y_{t-1}&=\beta x_{t-1}+\gamma y_{t-2}+e_{t-1}\\ &=\beta x_{t-1}+\gamma\beta x_{t-2}+\gamma^2 y_{t-3}+\gamma e_{t-2}+e_{t-1}\\ &=\beta\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i x_{t-i-1}+\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i e_{t-i-1} \end{aligned} \tag{45}$$

また（41）式から

$$E(e_{t-1}e_{t-k})=\rho^k\sigma^2 \tag{46}$$

また

$$\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i E e_t e_{t-i}=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i\rho^i\sigma^2=\frac{\sigma^2}{1-\gamma\rho} \tag{47}$$

それ故，(45) 式を考慮すれば，

$$d=\frac{\Sigma y_{t-1}e_{t-1}}{\Sigma y_{t-1}^2}=\frac{\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i\rho^i\sigma^2}{\sigma_y^2}\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2(1-\gamma\rho)} \tag{49}$$

(49) を (44) に代入すれば，

$$E(c)=\gamma+\rho\frac{1}{1-\gamma\rho}\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \tag{50}$$

したがって Specification Error は

$$E(c)-\gamma=\rho\frac{1}{1-\gamma\rho}\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \tag{51}$$

簡単な数字を代入してえられたものを表にまとめると次の通りである。

γ	ρ	σ^2/σ_y^2	バイアス
0.2	0.8	0.2	0.19
0.5	0.2	0.2	0.04
0.5	0.2	0.5	0.09

この表から明らかなように，Specification Error は系列相関係数 ρ の大いさに強く依存し，ρ が大きければ大きいほど Error は大きい。

4. 統合と Specification Error[5]

いまある産業に属する N 個の個別企業の真の生産函数，すなわちミクロの真の生産函数が次のようなものであるとする。

$$y_i=\beta_{i2}x_{1i}+\beta_{2i}x_2+e_i \tag{52}$$

$$(i=1,\cdots\cdots N)$$

この推定式は

$$y_i = b_{i2}x_{1i} + b_{2i}x_2 + u_i \qquad (52)'$$

また N 個の個別企業の生産函数を統合してえられる産業の真の生産函数，すなわちマクロの真の生産函数は次の通りである。

$$Y = \Sigma\beta_{i2}x_{1i} + \Sigma\beta_{2i}x_2 + \Sigma e_i \qquad (53)$$

ここで

$$\Sigma x_{1i} = x_2$$

と仮定する。したがって（53）の推定式は

$$Y = \Sigma b_{i2}x_{1i} + \Sigma b_{21}x_2 + \Sigma u_i \qquad (53)'$$

いま（52)′ 式が次のように規定されたとしよう。

$$y_i = b_i x_i + w_i \qquad (54)$$

また（53)′ が次のように規定されたとする。

$$Y = b_2 x_2 + u \qquad (55)$$

（54）式は推定された真の方程式（52)′ に含まれている変数 x_2 を含んでいない。（54）および（52)′ から

$$w_i = y_i - b_i x_i = b_{i2}x_{1i} + b_{2i}x_2 + u_i - b_i x_i$$
$$= u_i + b_{21}x_2 + x_i(b_{i2} - b_i) \qquad (56)$$

仮定されたミクロ式に含まれる変数と推定された真のミクロ式には含まれるが仮定されたミクロ式には含まれない変数との関係を表わす補助方程式は次の通りであるとする。

$$x_2 = p_{2i}x_i + v_{2i} \qquad (57)$$

x_i と u_i がたがいに独立であると仮定すれば，

$$b_i = b_{i2} + p_{2i}b_{2i} \qquad (58)$$

これを（56）式に代入すれば，

$$w_i = u_i + b_{2i}(x_2 - p_{2i}x_i) = u_i + b_{2i}v_{2i} \qquad (59)$$

したがって

$$\sum_i w_i = \sum_i u + \sum_i b_{2i}v_{2i} \qquad (60)$$

いま w と v がたがいに独立であると仮定しよう。これから分散を求めると

次の結果をうる。

$$S^2_{\Sigma w,}=S^2_{\Sigma u_i}+\sum_{ij}b_{2i}b_{2j}S_{v_{2i}v_{2j}}$$

$$=S^2_{\Sigma u_i}+\sum_i b^2_{2i}S_{v_{2i}}+\sum_{i\neq j}b_{2i}b_{2j}S_{v_{2i}v_{2j}} \qquad (61)$$

左辺は specify されたミクロの方程式における残差項の分散であり，右辺の第1項は推定された真のミクロ方程式の残差項の分散に外ならない。したがって，右辺第2項第3項は (54)′ が (52)′ を正しく speciby していないことから生ずる誤差，すなわち Specification Error である。簡単な計算によって次の結果がえられる。

$$S_{v_{2i}v_{2j}}=S_{(x_2-p_{2i}x_i)(x_2-p_{2j}x_j)}$$

$$=S^2_{x_2}-\left(\frac{S_{x_2x_j}}{S^2_{x_j}}\right)S_{x_2x_j}-\left(\frac{S_{x_2x_i}}{S^2_{x_i}}\right)S_{x_2x_i}$$

$$+\left(\frac{S_{x_2x_i}}{S^2_{x_i}}\right)\left(\frac{S_{x_2x_j}}{S^2_{x_j}}\right)S_{x_ix_j}$$

$$=S^2_{x_2}\left\{1-r^2_{x_2x_i}-r^2_{x_2x_j}+r_{x_2x_i}r_{x_2x_j}r_{x_ix_j}\right\} \qquad (62)$$

ここで

$$p_{2i}=\frac{S_{x_ix_2}}{S^2_{x_i}}\quad,\quad r^2_{x_2x_j}=\frac{(S_{x_2x_j})^2}{S^2_{x_j}S^2_{x_2}}$$

$$S^2_{v_{21}}=S^2_{x_2}(1-r^2_{x_2x_i})\quad,\quad S^2_{v_{i2}}=S^2_{x_i}(1-r^2_{x_2x_i})$$

を (61) に代入すれば，

$$S^2_{\Sigma w_i}=S^2_{\Sigma u_i}+\sum_i b^2_{2i}S^2_{x_2}(1-r^2_{x_2x_i})$$

$$+\sum_{i\neq j}=b_{i2}b_{j2}S^2_{x_2}\left\{1-r^2_{x_2x_i}-r^2_{x_2x_j}+r_{x_2x_j}r_{x_2x_i}r_{x_ix_j}\right\} \qquad (63)$$

また (53)′ および (55) から

$$u=Y-b_2x_2=\Sigma b_{i2}x_i+x_2\Sigma b_{2i}+\Sigma u_i-b_2x_2$$

(55) に含まれている変数と，(53)′ には含まれているが (55) には含まれていない変数との間の関係を示す補助方程式は

$$\Sigma x_i = p_{\Sigma x_{i\cdot 2}} x_2 + v \qquad (64)$$

である。いま x は u から独立であると仮定すれば，(53)′，(55) および (64) から

$$b_2 = \Sigma b_{2i} + \Sigma p_{i2} b_{i2} \qquad (65)$$

したがって

$$u = \Sigma u_i + \Sigma b_{i2}\{x_i - p_{i2} x_2\} \qquad (66)$$

ここで u と v はたがいに独立であると仮定すれば，

$$S_u^2 = S_{\Sigma u_i}^2 + \sum_i b_{i2}^2 S_{v_{i2}}^2 + \sum_{i \neq j} b_{i2} b_{j2} S_{v_{i2} v_{j2}}$$

$$= S_{\Sigma u_i}^2 + \sum_i b_{i2}^2 (1 - r_{x_2 x_i}^2) S_{x_i}^2 + \sum_{i \neq j} b_{i2} b_{j2} (r_{x_i x_j} - r_{x_2 x_i} r_{x_2 x_j}) S_{x_i} S_{x_j} \qquad (97)$$

ここで左辺は仮定されたマクロ方程式の残差項の分散を示し，右辺の第 1 項は推定された真のマクロ方程式の残差項の分散であるから，右辺の第 2 項および第 3 項はいわば統合による誤差を表わしている。これを統合誤差 (Aggregation Errors) となづけよう。(67) を前と同じ手続きで書きかえると次のようになる。

$$S_u^2 = S_{\Sigma u_i}^2 + \sum_i b_{i2}^2 S_i^2 (1 - r_{x_2 x_i}^2)$$

$$+ \Sigma b_{ii} b_{j2} S_{x_i} S_{x_j} \{r_{x_i x_j} - r_{x_2 x_i} r_{x_2 x_j}\} \qquad (68)$$

いま b を比較可能な共通単位で表わすためにベーター係数[(2)]に直してみる。周知のように

$$\overline{\beta}_{2i}^2 = b_{2i}^2 (S_{x_2}^2 / S_{yi}^2) \qquad (69)$$

であるから，(63)，(68) はそれぞれ次のようになる。

$$S_{\Sigma w}^2 = S_{\Sigma u_i}^2 + \sum_i S_{y_i}^2 (1 - r_{x_2 x_i}^2) \overline{\beta}_{2i}$$

$$+ \sum_{i \neq j} \overline{\beta}_{i2} \overline{\beta}_{j2} S_{y_i} S_{y_j}$$

$$(1 - r_{x_2 x_i}^2 - r_{x_2 x_j}^2 + r_{x_2 x_j} r_{x_2 x_i} r_{x_i x_j}) \qquad (70)$$

$$S_u^2 = S_{\Sigma u_i}^2 + \Sigma S_{y_i}^2 (1 - r_{x_2 x_i}^2) \beta_{i2}^2$$

$$+\Sigma S_{y_i}S_{y_j}(r_{x_ix_j}-r_{x_2x_j}r_{x_2x_i})\beta_{i2}\beta_{j2} \quad (71)$$

(70) (71) はきわめて複雑であるため，これについて一般的な結論をひきだすことはきわめて困難であるから，ここではいくつかの単純化の仮定を設けることにする。

第1にもし個々の変数 x_i の間に完全な相関関係があり，したがって $r_{x_ix_j}$ はあらゆる i, j に関して1にひとしく，それ故 $r^2_{x_2x_i}$ もまた1にひとしいとすれば，(70) および (71) の第2項および第3項は零となり，Specification Error および Aggregation Error は消滅する。ここから個々の変数 x_i の間の相関関係が強ければ強いほど2つの誤差は小さくなるということができる。

第2にいま2つの誤差のそれぞれの共分散項，すなわち (70), (71) の右辺第3項に注目する。

この項の正負はそれぞれ

$$(1-r^2_{x_2x_i}-r^2_{x_2x_j}+r_{x_2x_j}r_{x_2x_i}r_{x_ix_j})$$

および

$$(r_{x_ix_j}-r_{x_2x_j}r_{x_2x_i})$$

の正負によって判別される。いま相関関数の数値はすべてさして大きな値ではなく，かつ r_{ij} がすべての個別企業にとってひとしいとし，同時に $r_{ij}>0$ と仮定すれば

$$r^2_{2i}>r_{ij}$$

である。このとき，

$$r^2_{2i}=\frac{(S_{x_2x_i})^2}{(S^2_{x_2}S^2_{x_i})} \quad (72)$$

から

$$S_{x_2x_i}=\Sigma x_2x_i=\Sigma S_{x_ix_j}=S^2_{x_i}+\sum_{i\neq j}S_{x_ix_j}=S^2_{x_i}+(k-1)S_{x_ix_j}$$
$$=S^2_{x_i}\{1+(k-1)r_{x_ix_j}\}$$

$$x_2=\Sigma x_{1i}$$

$$S^2_{x_2}=kS^2_{x_i}\{1+(k-1)r_{x_ix_j}\}$$

$$S^2_{x_ix_j}=S^2_{xi}+\sum_i\sum_j S_{x_i}S_{x_j}r_{x_ix_j}$$

を代入すると，

$$r^1_{2i}=\frac{S^4_{xi}\{1+(k-1)r_{x_ix_j}\}^2}{kS^4_{x_i}\{1+(k-1)r_{x_ix_j}\}}=\frac{1}{k}+\frac{(k-1)}{k}r_{x_ix_j} \quad (73)$$

r_{ij} はすべての i,j に対してひとしいと仮定したから，

$$(1-r^2_{x_2x_i}-r^2_{x_2x_j}+r_{x_2x_j}r_{x_2x_i}r_{x_ix_j})$$

$$=1-r^2_{x_2x_i}(2-r_{x_ix_j})==\frac{k-\{1+(k-1)r_{x_ix_j}\}(2-r_{x_ix_j})}{k} \quad (74)$$

もし， k=2 のときには (74) は

$$\frac{2-(1+r_{x_ix_j})(2-r_{x_ix_j})}{2}=0$$

それ故 k>2 ならば Specification Error の共分散項はさきの条件のもとで正，k<2 ならば負である。これは統合される企業の数が多ければ多いほど Specification Error も大きくなる傾向があることを意味している。

次に Aggregation Error について考えてみる。与えられた条件のもとで

$$(r_{x_ix_j}-r_{x_2x_i}r_{x_2x_j})=\frac{r_{x_ix_j}-1}{k}$$

これは k の大いさいかんにかかわらず常に負である。かくて， r_{ij} がすべての企業にとってひとしければ Aggregation Error の共分散項は常に負になるから，これはこの誤差を低める傾向がある。

第3に (70) (71) の第2項の分散項をみるとベーター係数を除いて両者は相ひとしい。もし $\overline{\beta}_{2i}>\overline{\beta}_{i2}$ ならば (70) の右辺第2項の分散項は (71) の右辺第2項の分散項より大きい。これはマクロの独立変数 x_2 がミクロの

独立変数 x_i よりも従属変数の変動にヨリ強い影響を与えるならば，したがってまた，ミクロの推定式から脱落している変数が，含まれている変数よりも y_i の変動により大きい影響をもつならば，Specification Error は Aggregation Error よりも相対的に大きくなる傾向があることを示している。

（未完）

参考文献

(1) Bronfenbrenner, M., "Production Function: Cobb-Douglas, Interfirm, Intrafirm," *Econometrica*, 1944, pp. 37—38.

(2) Ferber, R., *Statistical Techniques in Market Research*, 1949, pp. 363—66.

(3) Hock, I., "Estimation of Production Function Parameters and Testing for Fffiiciency," *Econometrica*, 1955, p. 326.

(4) Griliches, Z., "Specification Bias in Estimates of Production Function," *Journal of Farm Economics*, Feb. 1957, pp. 8—20.

(5) Griliches, Z. & Grunfeld, Y., "Is Aggregation Necessarily Bad?" *The Review of Economics and Statistics*, Feb. 1960, pp. 1—13.

(6) Mundlak, Y., "Empirical Production Function free of Management Bias," *Journal of Farm Economics* Feb. 1961, pp. 44—56.

(7) Theil, H., *Linear Aggregation of Economic Relations*, 1954, p. 122ff.

(8) Theil, H., *Economic Forecasts and Policy*, 1958, 6.2 and Appendix 6B.