ベイジアンの決定理論と統計的推論について*

西川欽也

周知のように，現代統計理論の主流をなす Neyman-Pearson 理論およびその延長と考えられる Wald などの統計的決定関数 (statistical decision function) の理論は，その基礎をなす確率解釈において，きわめて厳密な頻度説をとる。すなわち，推論や決定——この理論では一般に推論も決定の一種と考えられる——に要求されるもろもろの望ましい性質は，同一の方式での推論なり決定なりを，同一対象について同一条件で独立に多数回反覆することを通して，平均的に達成されるものと考えられているのである。このような想定は，同一母集団から標本が反覆抽出されて，同一種類の判定が繰返されていく抜取検査のような場合には，全く妥当なものであるが，一つの知識の獲得が常に，対象についてのより進んだ知識に到達するための新たな基礎となる科学的推論 (scientific inference) や，実行が許される決定はただ一回限りであり，その決定の実行によって決定者 (decision maker) がおかれている条件が変化してしまうビジネス・デシジョンの多くの場合などにおいては，明かに不適切であり，例えば Neyman-Pearson 理論における「不偏性 unbiasedness」など決定や推論の良さの基準となる多くの諸性質は，その現実的な意味を欠くことになる。それ故，このような領域での決定や推測の理論は，こうした頻度説とは大なり小なり異なった確率解釈に立った，したがって Neyman-Pearson 理論とは本質的に異質な観点からする理論展開を要求されるのである。統計的推論を科学的推論の一部分と考える R. A.

* 本稿は北海道経済学会第28回研究報告会（11月7日於北海道大学農学部）での報告を加筆・修正したものである。

Fisher の理論，およひ最近次第にその支持者を増しているベイジアン理論は，こうした要求の上に立つものである。ここではベイジアン理論の基礎的部分での最近の主要な理論的進歩を概観し，その意義と問題点を考えてみたい。

§ 1. ベイジアンの基本原則

ひとくちにベイジアンとかネオ・ベイジアンと呼ばれる人たちも，その確率についての考え方，ことに統計的推論に際しての事前確率の与え方，などの点で，必ずしも一様でない。また Fisher によれば，Bayes 自身の事前確率についての考え方は，それが客観的に定められる場合に，今日 Bayes の定理として知られる逆確率の公式に結合されるということであって，この点からすれば主観確率や無知を表わす確率分布を事前確率として導入する現代のベイジアンは，むしろラプラシアン (Laplacian) とか，より端的には，現代のベイジアン・アプローチの骨組を与えた Savage の名によって，サベイジアン (Savagian) とでも呼ぶのが適切であるかも知れない。

論点を整理するためここでは，ともかく Savage をもって典型的な代表者とする現代のベイジアンを特徴づけるものとして，次の三つの基本原則を挙げることにしよう。個々のベイジアンは，以下の原則のうち，ことに確率解釈や最適決定規則の意味づけ (normative か experimental かといったこと) などの点で多少の差異をもっているが，大筋においてこれらの原則を採用する点では共通していると言ってよかろう。

(1) 主観確率——確率は命題の信頼度 (degree of belief) を示すものと考え，このような確率は決定者なり，推論を行おうとするものが個々の命題に対して主観的に抱いている信頼の程度を explicit にひき出すことによって定められるとし，いわゆる主観確率 (subjective probability) あるいは個人的確率 (personal probability) が，不確実性の指標として，決定や推論の基礎に導入される。

(2) 期待効用仮説——このような確率解釈の上に立って，不確実性下の合

理的行動における最適決定規則（optimal decision rule）は，期待効用の最大化（maximization of expected utility）であるとする。この場合，効用を Neumann-Morgenstern の意味で考えることは言うまでもない。

(3) 尤度原理——統計的推論（statistical inference）は，実験データから得られる情報を，ベイズの定理によって，未知母数についての事前分布に結合し，これを事後分布に変換することであると考える。この場合，実験データの情報は「尤度（likelihood）」の形でとらえられ，実験データの情報はすべてこれで代表されると考え，尤度が等しければ，同一の事前分布からは常に共通の結論すなわち共通の事後分布が導かれるという意味で，尤度原理（likelihood principle）が採用されることになる。

§ 2. ベイジアン理論の根本問題

ベイジアンはこれらの原則を，不確実性下の合理的行動を規定する一連の公理から演繹的に導出する。ベイジアンの功績の一つは，統計的決定や推論のすべてを，不確実性下の合理的行動によってはっきりと基礎づける理論構成をうちたてたことである。だがその際本質的な役割を果す主観確率や効用は，評価（evalution）を必要とする概念であり，しかも頻度確率のように簡単な実験によって客観的で，安定した値を定めうるというようなものでなく，評価手続の如何によって大きく変りうる不安定な概念である。したがってこれらを明確に概念規定し，またその評価がそれに対応して一義的になされるようなしっかりした評価手続を定めておくことが必要である。

ベイジアンの公理体系は，これら主観確率と効用の概念規定ならびにその評価手続を定める部分と決定の基礎をなす選好（preference）の首尾一貫性（coherence または consistency）を定める部分とを，一般にその主要構成要素として含んでいる。この公理体系が不確実性下の合理的行動とベイジアンがまさに考えるところのもののもっとも基本的な部分を示しているわけだから，その内容がこのようなものとしてじゅうぶん説得的であるか，また現

実に検証しうるものとなっているかによって，その理論全体の説得力と現実への適用可能性は定まる。ベイジアン理論のいちばんの土台をなすこうした公理体系の確立は，何と言ってもベイジアンの第一の根本問題である。

しかし，ベイジアン理論についてもっとも controversial な問題は，その統計的推論について起る。一つは，未知母数についての事前分布をどのように定めるかという問題であり，いま一つは，尤度原理の妥当性である。これらは特に，決定理論と区別される意味での統計的推論を問題にするとき，すなわち与えられたデータからどれだけのことが言えるかというデータ分析の意味での統計的推論を考えるとき，大きな論争点となる。筆者はこの問題をここではベイジアン理論の第二の根本問題としてとりあげたい。但し，尤度原理はベイジアン固有のものではなく，この原理の妥当性はベイジアンよりもむしろ Fisher, Barnard などによって早くから論じられているところであるので，統計的推論に関するベイジアン理論の問題点としては，ここではもっぱら事前分布の定め方をとりあげ，またこれと関連して，Fisher の推測確率（fiducial probability）とベイジアンの事後分布との関係にふれたいと思う。（尤度原理の妥当性については，例えば Birnbaum 〔2〕を見よ。）

§3.　公理体系に関する最近の発展

主観確率の概念を公理化する試みは，Savage〔21〕によれば，1926年の Ramsey〔18〕にはじまり，その後，これとほとんど独立に遂行された de Finetti〔4〕, Koopman〔13〕を経て1950年の Good〔10〕, 1954年の Savage〔19〕に至ってはじめて，主観確率が統計学との関連においてとりあげられるに至ったと言われている。ことに不確実性下の合理的行動を公理化し，これから定量的な主観確率および効用を演繹的に導いたのは，Savage の功績である。ベイジアンの公理体系の骨組は，Savage〔19〕によって，一応完成されたと言ってよい。

しかし Savage の公理体系は，それが不確実性下の行動の合理的規範とし

てもつ含みを必ずしも具体的な，容易に理解できる形で示しているとは言い難く，また主観確率の存在は証明されているが，その実際の評価手続は具体的でない。ベイジアンにとって主観確率は，explicit に，かつまた具体的な数値として，実際に評価されうるものであることが，そのアプローチを現実に遂行していく場合，どうしても必要である。主観確率は，それがある命題に対して根源的には決定者の心に抱かれているものであるという限りにおいて主観的なのであって，それを評価する過程や評価の結果得られる確率分布は，具体的で，あいまいさのないものでなければならず，特定の決定者の「主観確率」としては，他のいかなるものにとっても共通な，一義的な評価結果をもたらすという意味で，客観的なものでなければならない。したがって公理体系は，この評価過程がなるべく具体的で，容易な，客観的なプロセスとして遂行される形で提示されていることが望ましい。つまり実体的な意味で主観確率が客観的に存在するということを示すのみならず，その評価過程をこのようなものとして explicit に含むような公理体系であることが望ましい。

ベイジアンの公理体系についての最近の進歩の一つは，こうした意味での "simplification" の方向を指しているように思われる。Anscombe-Aumann〔1〕，Pratt-Raiffa-Schlaifer〔17〕は，いずれもこの方向において共通している最近の業績である。すなわち，両者は共に頻度確率が定められる reference lottery との選好関係 (preference relation) を通して，主観確率を explicit に評価するという行き方をとることによって，この要請に答えるのである。

次にベイジアン理論が想定している不確実性下の合理的行動の規範がどういうものであるかを例示する便宜のため，ここでは Pratt-Raiffa-Schlaifer の公理体系を簡単に要約しておくことにしよう。

この公理体系のかなめとも言うべき reference lottery は canonical lottery と呼ばれるものである。すなわち，$X=\{x:0\leq x\leq 1\}$，$Y=\{y:0\leq y\leq 1\}$ との直積空間 $X\times Y$ の上の任意の二つの区間 I, J によって，$(x, y)\,\varepsilon I$，$(x, y)\,\varepsilon J$

いずれの場合にも等しい prize を与えるような二つの lottery l_I, l_J を定めるとき，決定者はIの面積がJの面積より大なる場合に限り，l_I を l_J に対して選好 (prefer) すると仮定する。この仮定が満足される $X \times Y$ 上で定められた lottery が canonical lottery である。言うまでもなく，prize が等しいときそれによってのみ選好が行われる任意の区間 I, J 等の面積は，I, J 等に対応する頻度確率と解釈でき，その場合，$X \times Y$ 上の各点に対しては一様な確率分布が対応することになる。Pratt-Raiffa-Schlaifer はそれ故この面積を canonical chance の名で呼んでいる。

さて，現実のある決定によってもたらされる可能性がある任意の結果 (consequence) c に対して，ある canonical chance π(c) をもって最も望ましい結果 c^* を，$1-\pi$(c) なる canonical chance で最も望ましくない結果 c_* を与える canonical lottery を対応させ，決定者が c とこの canonical lottery との選好において無差別 (indifferent) であるならば，c の効用を π(c) と評価する。このような無差別な選好関係を成り立たせる c^*, c_* の存在を仮定するのが，効用の評価を定める公理である。

同様に，任意の現実の事象 (real world event) E_0 に対して，E_0 が起れば c^*，起らなければ c_* をもたらす lottery と，ある canonical chance $P(E_0)$ をもつ $X \times Y$ 上の区間 Y_0 に入れば c^*，入らなければ c_* を与える canonical lottery とを考え，決定者が両者の選好において無差別であるならば，E_0 についての主観確率を $P(E_0)$ と評価する。すなわち，このような無差別な選好関係を成り立たせる c^*, c_* の存在をもって，主観確率の評価を定める公理とするのである。

この公理体系では，すべての結果は，一般に現実の事象をすべてその部分空間として含む事象空間 E と先に定義した $X \times Y$ との直積空間 $E \times X \times Y$ の上で定義される lottery として解釈され，したがって一切の選好関係は lottery の間の選好関係として扱われる。そして合理的行動の首尾一貫性を規定する公理としては，この選好関係について transitivity と substitutability

とを要求するのである。すなわち

(transitivity) $l_1 \leq l_2$ かつ $l_2 \leq l_3 \Rightarrow l_1 \leq l_3$

(substitutability) $l' = \{l'_j\}$, $l'' = \{l''_j\}$ とするとき，すべての j について $l'_j \sim l''_j$ のときに限り

$$l' \sim l''$$

である。但し $l_i \leq l_j$ は「l_i は l_j より選好されない」と読み，$l_i \sim l_j$は「l_i と l_j とは無差別である」と読む。なお，$l_i < l_j$ は，l_j が l_i に対してはっきりと選好されることを表わす記号として用いられる。

以上の公理より，P が確率の公理を満足すること，P および π が一義的であること，最適決定が期待効用 $\Pi = \sum_i P(E_i)\pi(C_i)$ を最大化するものであることが示される。但し，現実の事象 E_i が起れば，決定者には結果 c_i がもたらされるものとする。

さらに，E^f なる事象が起ったとき新しい lottery が prize として与えられ，起らないときは現状が維持される conditional lottery を考えると，そのすべての結果について，効用の評価は E^f の生起如何によって影響されないが，それぞれの結果が条件づけられている各事象の確率評価は，E^f を条件とする条件つき確率の形をとるべきことが示され，ここで E^f を入手可能な情報と解することによって，このような情報入手を想定した場合の最適決定規則が E^f を条件とする条件つき確率によって加重された条件つき期待効用を最大化することであることが示される。これがベイジアンの推論形式を含意することは言うまでもない。

そして最後に，この条件つき期待効用を最大化する決定が，E^f なる情報が単に入手可能な段階から，実際にこの情報が獲得された後の段階に移ったとき，この段階での単純な最大期待効用をもたらす決定と equivalent であることを要求して，この公理体系は完結するのである。

公理体系についての進歩のいま一つの方向は "extension" の方向と呼ぶことができよう。実際に決定者が抱いている主観確率は，必ずしも一義的な

数値として定めうるようなものとは限らない。主観確率を一義的な数値とするのは方法論的な便宜によるのであって，本来それはある幅をもったものとして現実の決定者の心に抱かれているかも知れないのである。今日，大方のベイジアンの公理体系についての考え方は，それを normative なものと解することにあるから，実験的に評価された現実の主観確率が，数値的にある幅をもっているということは，ベイジアンの理論にとって必ずしも致命的なことではないが，主観確率が一義的に定められないこの「ゆるい」条件の下で，なおかつベイジアン流の決定規則や統計的推論が正当化されるとすれば，それは Savage によって示された公理体系の拡張を意味することになる。この方向を行くものとして，C. A. B. Smith〔22〕は，主観確率や効用が上限と下限をもったある幅で評価される場合にも，ある一義的な確率加重による期待効用の最大化が可能であり，それが最適決定規則であることを示した。

§4. 事前分布の選択

一般に統計理論において三つの問題領域，すなわち決定理論，統計的推論，および実験計画が区別さるべきであるという考え方が今日，常識となりつつある。

Cox〔3〕は，統計的推論を，与えられた観察値から計量された不確実性 (measured uncertainty) をもってなされた統計的母集団についての叙述 (statement) と定義し，「データは母集団の特定の側面についてどういうことを言う資格をわれわれに与えるか」という問に答えるのが推論の問題であるとしている。所与のデータが，問題とする母集団の特定の側面について内包している情報を，いかにしてひき出し，それを母集団についてのいかなる叙述に結合するかというのが本来の統計的推論であり，Birnbaum〔2〕は，これを Neyman-Pearson 流の，本来決定理論とみなさるべき点推定や検定などを指す意味での統計的推論と区別するため，特に informative inference

と名づけている。Fisher（例えば〔5〕を見よ。）が一般に推定（estimation）を問題にするときには，実はこのような意味での統計的推論をとりあげているのである。

これに対して決定理論は，こうした推論によってひき出された統計的情報に基づいてとるべき行動（action）に関する理論であり，Cox〔3〕によれば，誤った決定に基づく損失（loss）の評価や事前の情報（prior information）は，この決定理論において必要になるのである。

実験計画は，データをどのうよな手続でつくり出すかという問題を扱うわけで，実験に際してわれわれがおかれている物理的・経済的諸制的に対する考慮が，その実験が提供するであろうところの情報の質と量に関する考慮とともに必要になるし，当然，事前の情報を有効に利用することも考慮されねばならない。

さて，このように決定理論や実験計画の理論と区別される意味での統計的推論という角度からベイジアン理論を眺めてみると，それは，データの情報を尤度という形でとらえ（尤度原理），母集団に関する叙述は，尤度とある事前分布との積に比例する形で得らる事後分布（逆確率の公式＝ベイズの定理）の形でなされると言うに尽きる。

ところで統計的推論が，Cox の言うようにデータのみから何が言えるかを示すことを目的とするものだとすれば，このような統計的推論における事後分布は，事前分布に依存しない形で得られなければならない。そこでこのような事後分布をもたらすような事前分布は，どのように定めるべきかという問題が，ベイジアンの統計的推論を，まさに Cox の意味での，本来の統計的推論たらしめるためには，不可避的に起ってくる。そしてこの問題が解決されていなくては，ベイジアンの理論は，Fisher が強調する「科学的推論」における有効性を主張することができないであろう。

Savage〔20〕は，事前分布は文字通り personal なもので，人ごとに異っていてよいとし，推論の客観性は「precise measurement principle」によっ

て保証されると考えている。

いまベイズの定理

$$g(\theta \mid x) \propto f(x \mid \theta) \cdot h(\theta)$$

において

$$f(x \mid \theta) = \phi(x - \theta)$$

とすれば，事前分布の密度関数 $h(\theta)$ が $\theta = x_o$（但し x_o は実際の観察値で所与とする）の近傍で，$\phi(x_o - \theta)$ に較べてなだらか（smooth）であれば

$$g(\theta \mid x_o) \fallingdotseq k \cdot \phi(x_o - \theta) \cdot \alpha(x_o) \propto \phi(x_o - \theta)$$

となり，事後分布は近似的に事前分布に依存しないものとみなしてよく，しかもそれは尤度に比例する密度関数の形をとるというのが precise measurement principle である。しかも $\phi(x - \theta)$ において x と θ は対称的な関係にあるから，符号を逆転すれば θ の事後分布は実は x の分布法則と全く同一の形で与えられるわけである。したがって precise measurement principle は，母数 θ がこのような位置のパラメーターであるとき，結果的には Fisher の推測分布（fiducial distribution）と同一のものとなる。但し，推測分布は観察値の分布のみから厳密な形で導かれるものとして主張されるのに対し，precise measurement principle は，事前分布が実際に得られた観察値の近傍で一様分布に近いという仮定の下で，近似的に成り立つ関係を示すにとどまる。推測分布についてはまた後でふれるので，ここでは precise measurement principle の妥当性を簡単に吟味しておこう。

現実の観察値 x_o の近傍で事前密度（prior density）$h(\theta)$ が $\phi(x_o - \theta)$ に対して相対的に一様分布に近い形をしていることが，この principle のキー・ポイントをなす前提条件である。この条件は，大標本の場合には実際上常に満足されていると考えてよい。そして $h(\theta)$ が x_o の近傍で $\phi(x_o - \theta)$ に対し，かなり鋭い形をしていてこの条件が満されない場合というのは，われわれの θ についての事前的な確信が，実際の観察結果と大幅に喰違っていることを意味しているのだから，この principle の前提条件が充されるところ

まで sample size を拡大するなどの手段を講じなければならない場合であると考えられるのである。このような考え方はきわめて実際的なものであるが，理論的にはむしろ決定理論的なものと言うべきであろう。そしてより重要なことだが，この principle は，x_0 が大きくばらつくであろう小標本の場合には，ほとんど常に使えないことになる。また $f(x\mid\theta)$ を $\phi(x-\theta)$ なる形に限定しているのは，$f(x\mid\theta)$ をそのままの形で変数と母数の読みかえのみによって母数 θ の分布と解釈することができるために設けられた仮定であるが，この仮定はこの principle が適用される推論問題を，位置のパラメーターに関するもののみに限定するわけだから，きわめて強い仮定である。もちろんこの仮定は緩和できるが，どこまで緩和できるかについては，Fisher の推測分布を確率分布として解釈する場合について起る複雑な問題と本質的には同一の問題を生ずることになろう。

こうした Savage の考え方に対して，Jeffreys〔12〕，Lindley〔16〕，Hartigan〔11〕らは，先に述べたような意味での本来の推論問題におけるベイズの定理の適用にあたっては，事前分布として，何らかの客観的根拠に基いて θ についてのわれわれの無知（ignorance）を表わす確率分布を用いることが必要であると考えている。

常識的で，かつまた古典的なやり方は，無理由の理由（principle of insufficient reason）に基づいて，θ の存在可能範囲の全体にわたって一様な確率分布をもって，無知を表わす事前分布とすることである。

このようなアプローチは θ の存在可能範囲が無限区間の場合，normalize されない確率分布の導入を必要とする。このこと自体は一般にそれ程致命的な困難とは考えられていないが，$0\leq\theta<\infty$ のとき，任意の実数 α に対して $P(\theta\leq\alpha)$ はこのような normalize されない確率分布においても常に有限（finite）であるのに対し，$P(\theta>\alpha)$ は常に無限大となるから，二つの命題の選択にあたって，確率のより大きな命題を採択するという常識的なルールはこの場合，無条件には使えない。何故ならば，$\theta\leq\alpha$ という命題は，∞ 以

外のいかなる α をとっても，このルールの下では $\theta>\alpha$ という命題に対して常に棄却されることになるからである。Jeffreys は，この事実は θ についてわれわれが全く無知であるということと inconsistent であるとしている。

Jeffreys はまた，このような一様分布を無知を表わす事前分布とすることの不都合な例として，次のようなことも指摘している。

$0\leq\theta<\infty$ のとき，θ についてわれわれが全く無知であるということは，θ の任意の乗巾についても全く無知であることを意味している。したがって，θ の事前分布も θ^n の事前分布も，無理由の理由の立場からは同じ一様分布をしていなければならない。しかるに，θ についての一様分布が

$$B(\theta_1<\theta<\theta_1+d\theta)\propto d\theta$$

と示されるのに対し，θ^n の一様分布は

$$P(\theta_1{}^n<\theta^n<(\theta_1+d\theta)^n)\propto d\theta^n\propto\theta_1{}^{n-1}d\theta$$

となり，後者は θ_1 の値いかんによって変り，前者と一致しない。

こうした不一致を排除するため Jeffreys は，θ の一意変換に関しある種の不変性が充されるような事前分布を採用することを提唱する。

彼は二つの分布関数 F, F' について

$$J=\int log\frac{dF'}{dF}\cdot d(F'-F)$$

がすべての non-singular な変換に対して不変であることに着目し，F が母数 $\theta_i(i=1,\cdots,m)$ をもち，F' が母数 $\theta_i+d\theta_i, (i=1,\cdots,m)$ をもつものとし，それぞれの密度関数を f, f' で表わし，f が $\theta_i, (i=1,\cdots,m)$ について微分可能であるとすれば，充分に小さい $\Delta\theta_i, (i=1,\cdots,m)$ について

$$J=\sum_i\sum_j f_{ij}\Delta\theta_i\Delta\theta_j$$

但し

$$f_{ij}=\lim_{\delta_x\to 0}\sum_{(\delta_x)}\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\frac{\partial f}{\partial\theta_j}\cdot\delta_x$$

となることから，事前分布の密度関数として $\|f_{ij}\|^{\frac{1}{2}}$ をとることを提唱して

いる。いま $\theta_i, (i=1,\cdots,m)$ を $\theta'_i, (i=1,\cdots,m)$ に変換するとき，J の不変性から θ'_i についても

$$J=\sum_k\sum_l f'_{kl}\Delta\theta'_k\Delta\theta'_l$$

が導かれ，ここに

$$f'_{kl}=\sum_i\sum_j f_{ij}\cdot\frac{\partial\theta_i}{\partial\theta'_k}\cdot\frac{\partial\theta_j}{\partial\theta'_l}$$

で

$$\|f'_{kl}\|=\|f_{ij}\|\cdot\left\|\frac{\partial\theta_i}{\partial\theta'_k}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial\theta_j}{\partial\theta'_l}\right\|$$

と表わせ，一方，多重積分の変換公式より

$$d\theta_1 d\theta_2\cdots d\theta_m=\left\|\frac{\partial\theta_i}{\partial\theta'_k}\right\|\cdot d\theta'_1\cdot d\theta'_2\cdot\cdots\cdot d\theta'_m$$

$$=\left(\frac{\|f'_{kl}\|}{\|f_{ij}\|}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot d\theta'_1\cdot d\theta'_2\cdot\cdots\cdot d\theta'_m$$

で

$$\|f_{ij}\|^{\frac{1}{2}}d\theta_1\cdots d\theta_m=\|f'_{kl}\|^{\frac{1}{2}}d\theta'_1\cdot\cdots\cdot d\theta'_m$$

が成り立つからである。

Jeffreys はこの方法で

$$f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},\quad -\infty<\mu<\infty,\ 0<\sigma<\infty$$

の場合

(1)　σ が既知ならば，μ に対する事前分布としては一様分布をとるべきこと

(2)　μ が既知ならば，σ に対する事前分布は，その確率素分が $d\sigma/\sigma$ に比例するようにとるべきこと，つまり $\log\sigma$ に関して一様分布を採用すべきこと

(3)　μ, σ が共に未知の場合には，事前分布の確率素分は $d\mu d\sigma/\sigma^2$ に比例するものをとるべきこと

を導いている。

Lindley は，母数が一つのとき，Jeffreys のこの方法が，Fisher の情報量 $I(\theta)$ の平方根 $\{I(\theta)\}^{\frac{1}{2}}$ に比例するように事前分布を定めることであることを示した。

恐らく Jeffreys にはじまると思われるこうした不変性を基準にして事前分布を選択する問題について，系統的な分析を最近行ったのが Hartigan である。以下やや長くなるが，最近の統計理論において不変性概念はますます重要性を加えつつあることも考慮して，その所説を要約しておくことにしよう。

彼は Jeffreys にしたがって，事前分布および事後分布には normalize されない確率分布を想定し，ベイズの定理

$$g(\theta \mid x) \propto f(x \mid \theta) \cdot h(\theta)$$

において，θ についての無知を表わすような事前密度 $h(\theta)$ が定められるとすれば，それはわれわれの事前的知識 (prior knowledge) が X についてのある特定の一組の観察値に等しいと仮定して，ベイズの公式を使ってこの事前的知識を表わす密度関数を求めることであると考えることから出発する。そして $f(x \mid \theta)$ の族 (family) F に対応して定められる事前密度が，θ の一意変換に対して不変となるように定めようとするのである。

まず g はそれぞれの分布族 F に $g_F(\theta \mid x)$ を対応させる任意の関数であると考え，また h はそれぞれの F に $h_F(\theta)$ を対応させるとともに $g_F(\theta \mid x) = f(x \mid \theta) h_F(\theta)$ なる関係によって g を定める関数であると考える。また $f(x \mid \theta)$ は R^n のある開部分集合 S の要素 x および R^k のある開部分集合 Ω の要素 θ について定められ，それはすべての $x \epsilon S$, $\theta \epsilon \Omega$ に対して，θ に関する連続な導関数をもつものとする。ここで $h(\theta)$, $g(\theta \mid x)$ をそれぞれ特定の分布族に対応して定められる θ の事前密度および事後密度とする統計的推論を考えた場合，充されることが望ましい不変性概念として次のようなものを挙げることができる。

I. S-labelling invariance : ——

$f \epsilon F$, $f^* \epsilon F^*$ について

$$f^*(zx \mid \theta) \cdot (dzx/dx) = f(x \mid \theta)$$

がすべての $x \epsilon S$, $\theta \epsilon \Omega$ について成り立つとき，それぞれの変換 z に対して

$$g_F^*(\theta \mid zx) \infty g_F(\theta \mid x)$$

ならば，g は S-labelling invariant である。ここに z は $x \to zx$ で S を S^* に 1 対 1 対応させる微分可能な変換で，S^* は R^K の開部分集合とする。これは変換された確率変数 $X^* = TX$ の観察値 Tx が，観察値 $X = x$ が θ に対してもつのと同様の関連をもつことを保証するものである。

Ⅱ. Ω-labelling invariance : ——

$f \epsilon F$, $f^* \epsilon F^*$ について

$$f^*(x \mid T\theta) = f(x \mid \theta)$$

がすべての $x \epsilon S$, $\theta \epsilon \Omega$ について成り立つとき

$$g_F^*(T\theta \mid x) \cdot (dT\theta/d\theta) \infty g_F(\theta \mid x)$$

ならば，g は Ω-labelling invariant である。ここで T は Ω を Ω^* に 1 対 1 対応させる微分可能な変換で，Ω^* は R^K の開部分集合とする。これは $\theta \to T\theta$ なる変換によって同一のものと認められる二つの分布族 F, F^* に対応する事後分布もまた，このような変換によって同一のものと認められるということを保証するものである。

Ⅲ. Ω-restriction invariance : ——

F は $\theta \epsilon \Omega$ における $f(x \mid \theta)$ の族，F^* は $\theta \epsilon \Omega^*$ における $f(x \mid \theta)$ の族（但し，Ω^* は Ω の開部分集合）であるとするとき，それぞれの F, F^* に対して

$$g_F^*(\theta \mid x) \infty g_F(\theta \mid x), \ \theta \epsilon \Omega^*$$

が成り立つならば，g は Ω-restriction invariant である。これは Ω^* の中で θ を x によって区別することは，Ω^* 以外の θ の値によって影響されるものではないということを意味する。

Ⅳ. Sufficiency : ——

$X \epsilon S$ から，$S \to S^*$ の 1 対 1 変換 T によって得られる TX が θ の充分統計量となっているとき

$$g_F^*(\theta \mid Tx) \propto g_F(\theta \mid x)$$

ならば，g は sufficiency invariant である。意味するところは明かであろう。

Ⅴ. Direct product invariance : ——

X, Y はそれぞれ密度関数 $f_1(x \mid \theta)$, $f_2(y \mid \phi)$ をもつ独立な確率変数とする。そのとき $Z=(X, Y)$ は $f(x, y \mid \theta, \phi)=f_1(x \mid \theta) \cdot f_2(y \mid \phi)$ なる密度関数をもつが，F_1 を $f_1(x \mid \theta)$, $\theta \epsilon \Omega_1$ の族，F_2 を $f_2(y \mid \phi)$, $\phi \epsilon \Omega_2$ の族とし，$F=F_1 \times F_2$ を $f(x, y \mid \theta, \phi)$, $\theta \epsilon \Omega_1$, $\phi \epsilon \Omega_2$ の族とするとき

$$g_F(\theta, \phi \mid x, y) \propto g_{F_1}(\theta \mid x) \cdot g_{F_2}(\phi \mid y)$$

ならば，g は direct product invariant である。

Ⅵ. Repeated product invariance : ——

$$f^*(x_1, \cdots, x_m \mid \theta) = \prod_i f(x_i \mid \theta)$$

で，F は $f(x \mid \theta)$, $\theta \epsilon \Omega$ の族，F^* は $f^*(x, \cdots, \mid \theta)$, $\theta \epsilon \Omega$ の族とするとき

$$g_F^*(\theta \mid x_1, \cdots, x_m) \propto f(x_2, \cdots, x_m \mid \theta) \cdot g_F(\theta \mid x_1)$$

ならば，g は repetition invariant である。I〜V の invariance では $g_F(\theta \mid x) \propto f(x \mid \theta) \cdot h(\theta)$ という形を g がもつことを要求していないが，この repetition invariance は，ある h に対して g が必ずこの形で定められねばならないことを要求するものである。したがってこの invariance はベイジアンの統計的推論にとって本質的な要求である。

以上の不変性はいずれも事後分布に要求されるものであり，推論が観察値にもとづいて母数 θ の確率分布を示す形で行われるような統計的推論について一般に考えられる望ましい性質である。ベイジアンの統計的推論にとって本質的なことは，この事後分布が事前密度 h から定められるということであり，事後分布がこれらの不変性を満足するかどうかは事前分布の与え方いかんによって決まってくるのである。しかもわれわれはこの事前分布についても θ の一意変換に対する不変性を要求しているのである。つまりわれわれがここでまさに問題にしなければならないのは，以上の不変性を備えた事後分

布をベイズの定理にしたがってもたらし，かつそれ自身 θ の一意変換に対して不変であるような事前分布を求めることである。

まず最初に考えられるのが，relatively invariant prior density という概念である。すなわち

$$f(zx \mid z\theta)\ (dzx/dx)=f(x \mid \theta),\ x\epsilon S,\ \theta\epsilon\Omega$$

を満足する微分可能な一意変換 z に関して

$$h_F(z\theta)\ (dz\theta/d\theta)=ch_F(\theta),\ \theta\epsilon\Omega$$

が充されるとき，$h_F(\theta)$ を relatively invariant prior density という。このような $h_F(\theta)$ が存在するとき，これと対応して定められる $g_F(\theta \mid x)$ は，上記Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの各不変性を満足することが容易に言える。

ところで問題は，一般の分布族 F に対し，このような不変性を満足する変換が存在するとは限らず，またそれが存在したとしても，不変な事前分布が一義的に定まることは滅多にないということである。

そこで彼は次に，事前分布がそれに対応して定められる分布族 F にさらに強い制限を加えるとともに，不変性が充される Ω の上の範囲をせばめることによって，不変な事前密度を一義的に定めようとする。

まず $f(x \mid \theta)$（$\theta\epsilon\Omega$ で，Ω は R' の開部分集合とする）は

$$(\partial^r/\partial\theta^r)\log f(x \mid \theta),\ r\leq 2$$

がすべての $x\epsilon S,\ \theta\epsilon\Omega$ に対して存在し，また有限の二次の積率をもつものとし，結論的には $(\partial/\partial\theta)\ log\ h(\Omega)$ が $(\partial/\partial\theta)\ log\ f(x \mid \theta)$ と，$(\partial^2/\partial\theta^2)\ log\ f(x \mid \theta)$ にのみ依存することを意味し，ある θ_o の近傍で

$$f(Tx \mid T\theta)\ (dTx/dx)=f(x \mid \theta)$$

$$h(T\theta)\ (dT\theta/d\theta)=ch(\theta)$$

が充されるような事前密度，すなわち locally invariant prior density が導入される。

ところが，このような制限された不変性を満足する事前密度すらも，これを見出すことが一般には期待できないので，彼はさらに，$n\to\infty$ につれて

$(\partial/\partial\theta)\log f(x \mid \theta)$ ならびに $(\partial^2/\partial\theta^2)\log f(x \mid \theta)$ の漸近分布が，$0(n^{-\frac{1}{2}})$ でこれらの一次および二次の積率で定まることを利用して

$$(\partial/\partial\theta)\log h(\theta) = -E(f_1 f_2)/E(f_2)$$

を満足する一義的な $h(\theta)$ を導き，これを asymptotically locally invariant prior density (A L I prior density) と呼んでいる。但し，

$$f_1 = [(\partial/\partial\theta)\log f(x \mid \theta)]_{\theta=\theta_0}$$

$$f_2 = [(\partial^2/\partial\theta^2)\log f(x \mid \theta)]_{\theta=\theta_0}$$

で，$E(f_1)=0$ とする。

次いでこれを Ω が R^k の開部分集合の場合に拡張し，$\theta=\theta_0$ で $(\partial/\partial\theta_j)\log f(x \mid \theta)$, $i=1,\cdots,k$ $(\partial/\partial\theta_i)$ $(\partial/\partial\theta_j)\log f(x \mid \theta)$, $i=1,\cdots,k\,;\,j=1,\cdots,k$ が有限の一次および二次の積率をもち

$$E[(\partial/\partial\theta_i)\log f(x \mid \theta)]=0,\ i=1,\cdots,k$$

$$E[(\partial/\partial\theta_i)\log f(x \mid \theta)\cdot(\partial/\partial\theta_j)\log f(x \mid \theta)]$$
$$+E[(\partial^2/\partial\theta_i\partial\theta_j)\log f(x \mid \theta)]=0,$$
$$i=1,\cdots,k\,;\,j=1,\cdots,k$$

を満足するとき

$$\frac{\partial}{\partial\theta_p}\log h(\theta) = -\sum_i\sum_j E\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_p}\log f\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_j}\log f\right)\cdot g_{ij}$$

によって，$\theta=\theta_0$ における A L I prior density を定義している。但し，g_{ij} は i, j 要素に

$$E[(\partial/\partial\theta_i)\ (\partial/\partial\theta_j)\log f(x \mid \theta)]$$

をもつ行列の逆行列の i, j 要素である。

A L I prior density は，既述の Jeffreys の invariant prior density と似ており，Jeffreys の density は

$$f(zx \mid z\theta)\ (dzx/dx) = f(x \mid \theta),\ x\epsilon S,\ \theta\epsilon\Omega$$

なる微分可能な $S\to S$, $\Omega\to\Omega$ の 1 対 1 変換 z に対して

$$h(z\theta)\ (dz\theta/d\theta) = h(\theta)$$

を充すのに対し，A L I prior density は

$$h(z\theta)\ (dz\theta/d\theta)=ch(\theta)$$

を充すものである。また，Jeffreys の事前密度を $J(\theta)$, A L I prior density を $H(\theta)$ とするとき

$$J(\theta)^{\alpha}\cdot H(\theta)^{\beta},\ \text{但し}\ \alpha+\beta=1$$

は，先のⅠ～Ⅵの不変性をすべて満足する事後分布をもたらす事前分布となることも指摘されている。

しかし，以上において $h(\theta)$ が $f(x\mid\theta)$ の族に対応して定められていることの結果として，次のようなベイジアンの統計理論にとって，かなり致命的と思われる矛盾をもたらす。

すなわち，同一母数 θ に関する推論において，まず x が観察され，次いで y が観察されたという場合，ベイジアンの統計的推論は

$$g(\theta\mid x,y)\propto f(y\mid\theta)\cdot g(\theta\mid x)$$

という形でなされるのがたてまえであり，このように新しい情報が取得されるにしたがって，それ以前の段階で得られていた事後分布を新たな事前分布とすることによって，推論を逐次修正していく手続を与えるというのが，ベイジアン・アプローチのすぐれた利点の一つでもあるが，このような形の推論は，事前分布に上記の不変事前分布を用いる場合，x, y がそれぞれ同一の分布にしたがっていないと，consistent な結果をもたらさないのである。

例えば，先ず n 回の独立な試行で，各試行において確率 θ で生起する事象を，r 回観察したとしよう。次いで，この事象をさらに r' 回観察するまで試行を繰り返し，その結果 n' 回の試行が追加されることになったとしよう。結果から見れば $n+n'$ 回の独立試行が行われ，$r+r'$ 回の事象を観察したのであって，この観察結果がわれわれに与える情報は，順序を逆転して，まず r' 回の事象を観察するまで n' 回の試行を繰り返し，次いで n 回の試行を行って，r 回の事象を観察したという場合と，得られた観察結果を所与とする限り，全く同一である。尤度はいずれの場合にも $c\cdot\theta^{r+r'}\cdot(1-\theta)^{n+n'-(r+r')}$

であって同一で，これがベイジアンの統計的推論の基本原則でもあるところの尤度原理である。

しかるに $f(r \mid n, \theta)$ に対する ALI prior density は $1/\theta \cdot (1-\theta)$ となり，$g(\theta \mid r,n) \propto \theta^{r-1} \cdot (1-\theta)^{n-r-1}$ で，$g(\theta \mid n,r,n',r') \propto f(n' \mid r',\theta) \cdot g(\theta \mid r,n)$ からは $g(\theta \mid n,r,n',r') \propto \theta^{r+r'-1} \cdot (1-\theta)^{n+n'-r-r'-1}$ を得るのに対し，$f(n' \mid r',\theta)$ の ALI prior density は $1/(1-\theta)$ であることから，$g(\theta \mid r',n') \propto \theta^{r'} \cdot (1-\theta)^{n-r-1}$ で，$g(\theta \mid n,r,n',r') \propto f(r \mid n,\theta) \cdot g(\theta \mid r',n')$ からは $g(\theta \mid n,r,n',r') \propto \theta^{r+r'} \cdot (1-\theta)^{n+n'-r-r'-1}$ が得られ，観察結果，すなわち尤度は同一であるのに，事後分布は観察手続によって異ってくるのである。同じ問題は Jeffreys の prior density を使う場合にも起る。これは尤度原理に合致せず，したがってベイジアンのルールと inconsistent である。

§5.　ベイジアンの事後確率と推測確率

Fisher の推測確率密度 (fiducial probability density) は，θ の充分統計量 x の分布関数 $F(x \mid \theta)$ が θ の減少関数であるとき

$$\varphi(\theta \mid x) = -\frac{\partial}{\partial\theta}F(x \mid \theta)$$

または一般に

$$\phi(\theta \mid x) = \left| \frac{\partial}{\partial\theta}F(x \mid \theta) \right|$$

で与えられるが，これが果して確率分布としての要件を一般に満足するものであるか，またそれが一義的に定められるものであるかについては，多くの議論を呼び起した。1961年，Fraser は著名な二つの論文〔7〕,〔8〕で，推測分布 (fiducial distribution) を一義的な確率分布として解釈することが許される一つの条件を明かにした。

彼は充分統計量 x の標本空間 S の上の変換群に対して不変であるところの一定の分布をもち，かつ母数 θ を g に施される変換の一種として扱って，$x=\theta g$ すなわち $g=\theta^{-1}x$ と表わせる変量 g (枢要統計量 pivotal quantity

という）が存在する場合に，推測分布は一義的な確率分布として解釈でき，g の確率素分は左不変 Haar 測度 $d\mu(g)$ に関して $p(g)d\mu(g)$ で与えられ，そのとき x の確率素分は $p(\theta^{-1}x)d\mu(x)$，また θ の確率素分は右不変 Haar 測度 $d\nu(\theta)$ によって，左不変 Haar 測度との関係から，$p(\theta^{-1}x)\Delta(\theta)d\nu(\theta)$ となることを示した。但し，$\Delta(\theta)$ は modular function で，$d\mu(x)=\Delta(\theta)d\nu(\theta)$ となる。

ところで Savage の precise measurement principle から得られる事後分布が，Fisher の推測分布と一致することは既に指摘したが，ベイジアンの事後分布と推測分布との間の厳密な関係についての立ち入った検討は，Lindley〔15〕，Sprott〔23〕，〔24〕，Fraser〔9〕等によって行われてきている。

Lindley は事前密度を $p(\theta)$ とし，$\rho(x)=\int f(x\mid\theta)\cdot p(\theta)d\theta$ と表わし，$F(x\mid\theta)$ が θ の減少関数であるときの推測分布と事後分布との一致を示す

$$-\frac{\partial}{\partial\theta}F(x\mid\theta)=\frac{\partial}{\partial x}F(x\mid\theta)p(\theta)/\rho(x)$$

から，$u=R(x)=\int\rho(x)dx,\ \tau=p(\theta)=\int p(\theta)d\theta$ とするとき，F が任意の関数 G によって

$$F=G(u-\tau)=G(R(x)-P(\theta))$$

と表わされねばならないことを証明した。

Lindley はさらに F がこの条件を充していないとき，x の他に，第二の標本から充分統計量 y を得た場合，一方の統計量から得られる推測密度をベイズの定理における事前密度として事後分布を求めると，一般には結合の順序を入れかえたときに不一致が生ずることを示した。Lindley はこれを推測分布の欠陥とみなしたが，この点については，このような形で推測分布を結合するのは誤りで，x からの推測分布と y からの推測分布とを，データのプーリングの立場で直接結合すべきであるという Fisher〔6〕の反論があり，また Sprott は，真の事後分布は

(1) 標本の情報を全部ふくむこと

(2) 尤度を不変に保つすべての変換の下で不変であること

の二つの条件を充さねばならないとして，Lindley のやり方で推測確率をベイジアン・アプローチに結合することは，この条件(2)を犯すことになり，適切でないと批判した。

Fraser は先に示した形で推測確率をとらえたとき，それは事前分布に一様分布をとったときのベイジアンの事後分布の形をとることを文献〔8〕で示しており，またこのとき推測分布は x, y 二つの充分統計量が別々の標本から与えられたとき，ベイジアンの推論形式で，すなわち Lindley のやり方で結合できることを示している。文献〔9〕では，Lindley, Sprott によって論じられた推測確率がこのような推論形式において consistent な事後確率を導く条件に関連して，このような推論が正当化される領域が推測確率にある種の修正を加えることによって拡張されることを示した。

Fisher, Sprott の反論にもかかわらず，推測確率がベイジアン流に結合できないということは，x と y との間に，通常の確率概念であれば許される筈の conditional structure を想定することを許さないということになるから，推測確率を通常の確率概念として解釈する上では，やはり一つの難点として留まるであろう。だが反面，推測分布を事前分布とするベイジアン流の結合が不一致に導かれる上述の場合には，ベイジアン流の結合は，観察値に一様でない weight of evidence を与えることになるという Sprott の指摘もあり，こうした結合方式そのものが内包する意味についても，特に統計的推論の本質という観点からするさらに立ち入った吟味が加えられる必要があろう。

いずれにしても，推測分布とベイジアンの統計的推論との関係については，まだまだ不分明な点を多く残しているように思われる。

§6. ベイジアン理論の貢献

最後に，ベイジアン理論が決定理論および統計的推論という異なる二つの問題領域にそれぞれもたらした貢献が，どういう意味をもつものであるかを簡単に考察して結びとしたい。

決定理論としてのベイジアン理論は，まず期待効用最大化の原理＝期待効用仮説を，不確実性下の合理的行動の基準として容易に受容できるような一連の公理から導かれる主観確率を媒介にして，厳密に意味づけることに成功したが，これによって例えば，自然をもっとも意地悪でまた狡猾なゲームの敵手とする想定の上に立った Mini-max 原理よりは，より実際的でまたより自然な基礎の上に立った決定理論への道が踏み固められることになった。もちろん Neyman-Pearson 型の決定や，Mini-max 決定は，それぞれもっとも適した適用領域を現実にもっているわけであるが，主観確率に基礎づけられた期待効用最大化の行動様式は経済や経営の領域では前二者よりははるかに現実的な妥当性をもつと思われ，ベイジアンの決定理論が経済学や経営学の領域でもつ意義は今後ますます高められたものと予想される。

また新しいデータが得られる以前に到達されていた事後分布を，新しい事前分布としてベイズの定理を反覆適用することによって，情報の蓄積にともなって決定を逐次修正していく手続きが形式化され，一種の決定過程論というべきものが構成される点も，ベイジアンの決定理論の貢献の一つとして挙げることができよう。またこれとともに，新しいデータを加えることによって得られる事後分布とそれ以前の事前分布とを比較することによって，われわれの知識がどれだけ改善されたかを評価することができ，同様にして最大化された期待効用をデータの利用以前と以後とで比較することもできるから，いわゆる情報の価値を評価することができるということもこの理論の利点である。もちろんこのように形式化された決定過程は，著しい単純化をともなっており，現実の決定過程の限られた一つの側面——同一母数空間上の決定過程——のみを形式化したものであるから，現実の決定過程において無

条件的にその理論の有効性を保証するものではないが，少くともそれは，より現実的な理論を構成するための一つの手がかりにはなると思われる。

統計的推論におけるベイジアンの貢献は，こうした決定理論におけるそれに較べると，はるかに controversial である。この分野でのベイジアンの貢献は

(1) 尤度原理を支持する新しい根拠を与えたこと
(2) 無知を表現する確率分布の性質が情報理論および変換理論の角度から解明されつつあること
(3) 推測確率の意味づけがベイジアンの推論形式との関係を通じて明かにされつつあること

に要約できるように思われる。

しかし，尤度原理をベイジアンが支持する根拠は，実はそれがベイジアンの推論形式の直接の帰結であることにあるのだから，この推論形式の妥当性が確立されないと無意味である。ところで推論形式の妥当性は当然，事前分布の与え方の問題につながるわけであるから，ベイジアンの貢献として本質的に問題になるのはむしろ(2)の点である。確かに，既に見てきたように Jeffreys, Lindley, Hartigan らによって，無知を表現する確率分布の問題はかなり解明が進んできているわけだが，この問題は今日まだ完全に解決されたわけではない。というよりはむしろ，完全な意味での無知を表現する一義的な確率分布は見出し得ないという結論に向いつつあるかにも見えるのである。ただ推測確率の理論がベイジアンの推論との関係を通して，その厳密な数学的構造が解明される方向に向っており，またある条件の下で両者が全く一致した結果に導かれるということは注目さるべきであろう。つまりベイジアンの理論は，推測確率の理論を検討するための方法論として役立っているわけである。

もっとも両者が無条件的には全く別個のものであることも留意されねばならないし，推測確率による推論とベイジアンの推論との優劣も軽々には判断

できない。ただ推測確率による推論が正当化される明白な根拠は，今日なお，母数の確率分布を，事前分布の知識なしに観察値の分布法則から客観的に導くことができるということ以外には見出せないように思われる。これに対してベイジアンの推論形式は，その公理体系が想定する不確実性下の合理的行動の規範を承認する限り，それが演繹的に導かれるということによって正当化される。つまり決定理論と統計的推論は，ベイジアンにおいては，不確実性下の合理的行動の理論という，より一般的な意味での決定理論の体系の中に統一されているのである。このことは理論構成の上からは，たいへん attractive である。しかし，ベイジアンの公理はあくまでも「行動」の規範である。この規範が科学的な研究の場でもそのまま合理的な，あるいはむしろより適切には，合目的的な，規範として通用するものかどうか，したがってまたこの規範がそのまま科学的推論の正当性を保証するものであるかどうかは，また別個に検討されねばなるまい。推測確率による推論とベイジアンの推論との優劣も，こうした検討を経てはじめて，正当に論じうることになるのである。

参考文献

[1] Anscombe, F. J. and R. J. Aumann : "A definition of subjective probability", *Ann. Math. Stat.*, Vol. 34 (1963), pp.199～205.

[2] Birnbaum, A. : "On the foundations of statistical inference", *J. Amer. Stat. Assoc.*, Vol. 57 (1962), pp. 269～306.

[3] Cox, D.R. : "Some problems connected with statistical inference", *Ann. Math. Stat.*, Vol. 29 (1958), pp. 357～372.

[4] de Finetti, B. : "La prévision : ses lois logique, ses sources subjectives", *Ann. Inst. H. Poincaré*, Vol. 7 (1937) pp. 1～63, translated into English and reprinted in [14], pp. 95～158.

[5] Fisher, R. A. : *Statistical Methods and Scientific Inference*, 1956, Edinburgh, Oliver & Boyd.

[6] Fisher, R. A. : "On some extensions of Bayesian inference proposed by Mr. Lindley", *J. Roy. Stat. Soc.*, Ser. B, Vol. 22 (1960), pp. 299～301.

[7] Fraser, D. A. S. : "The fiducial method and invariance", *Biometrika*, Vol. 48 (1961), pp. 845～863.

〔8〕 Fraser, D. A. S. : "On fiducial inference", *Ann. Math. Stat.*, Vol. 32 (1961), pp. 661～676.

〔9〕 Fraser, D. A. S. : "On the consistency of the fiducial method", *J. Roy. Stat. Soc.*, Ser. B, Vol. 24 (1962), pp. 425～434.

〔10〕 Good, I.. J. : *Probability and the Weighing of Evidence*, 1950, London, Griffin.

〔11〕 Hartigan, J. : "Invariant prior distributions", *Ann, Math. Stat.*, Vol.35 (1964), pp. 836～845.

〔12〕 Jeffreys, H. : *Theory of Probability*, (2nd ed.) 1948, Oxford, Clarenton Press.

〔13〕 Koopman, B. O. : "The bases of probability", *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol.46 (1940), pp.763～774, reprinted in 〔14〕, pp. 161～172.

〔14〕 Kyburg, H. E. and H. E. Smokler, ed. : *Studies in Subjective Probability*, 1964, New York, Wiley.

〔15〕 Lindley, D. V. : "Fiducial distributions and Bayes′ theoerm", *J. Roy. Stat. Soc.*, Ser. B, Vol. 20 (1958), pp. 102～107.

〔16〕 Lindley, D. V. : "The use of prior probability distribution in statistical inference and decisions", *Proceedings of Fourth Barkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. 1, 1961, Barkeley, Univ. of California Press, pp. 453～468.

〔17〕 Pratt, J. W., Raiffa, H. and R. Schlaifer : "The foundations of decisions under uncertainty, an elementary exposition", *J. Amer. Stat. Assoc.*, Vol. 59 (1964), pp.353～375.

〔18〕 Ramsey, F. P. : *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, 1931, partly reprinted in 〔14〕, pp. 63～92.

〔19〕 Savage, L. J. : *The Foundations of Statistics*, 1954, New York, Wiley.

〔20〕 Savage, L. J. : "Subjective probability and statistical practice", *The Foundations of Statistical Inference*, 1962, London′ Methuen, pp. 9～35.

〔21〕 Savage, L. J. : "The foundations of statistics reconsidered", *Proceedings of the Fourth Barkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. 1, 1961, Barkeley, Univ. of California Press, pp. 575～586, reprinted in 〔14〕, pp.175～188.

〔22〕 Smith, C. A. B. : "Consistency in statistical inference and decision", *J.Roy. Stat. Soc.*, Ser. B, Vol. 33 (1961), pp. 1～37.

〔23〕 Sprott, D. A. : "Necessary restrictions for distributions a posteriori", *J. Roy. Stat. Soc.*, Ser. B, Vol. 22 (1960), pp. 312～318.

〔24〕 Sprott, D. A. ; "Similarities between likelihoods and associated distributions a posteriori", *J. Roy. Stat. Soc.*, Ser. B, Vol. 23 (1961), pp. 460～468.