境界上の超過需要函数の値について

—— Arrow-Block-Hurwicz の所説を中心として ——

穂　鷹　良　介*)

Arrow Block Hurwicz は [1] において，一般均衡モデルの動学的安定性を論ずる際に，準備として，超過需要函数の静学的な若干の性質を考察しているが，補助定理の証明に多少数学的な厳密性を欠く所があるように思われる。本論文では，その点を反例をあげることによって指摘し，且つ，別の仮定をつけ加えて同様の結論が得られる場合には，筆者による別証を与える。

1.　定義及び仮定

[1] の論文で使われている定義，記号法等で我々の目的のために必要なものだけをここで述べ直しておこう。

以下のモデルで考える財は $m+1$ 種で，それらは第 $0, 1, 2, \ldots, m$ 財と番号でよばれる。第 k 財の価格は P_k で示され，非負で且つすべての価格が 0 ではないものとする。つまり

(P^+)　$P_k \geqq 0$　$(k=0, 1, \ldots, m)$, $P \neq 0$

を仮定する。

このモデル全体の超過需要は $m+1$ 個の価格の函数として記述すれば十分である。簡単のために $P=(P_0, P_1, \ldots, P_m)$ とし，第 k 財の超過需要を

$$F_k(P)=F_k(P_0, P_1, \ldots, P_m)$$

で表わす。更に $F_k(P)$ を第 k 要素に持つ $m+1$ 次元の vector $F(P)$ を超過

*)　本論文の作成に際しては，北海道大学助教授山元周行氏から有益なる御助言をいただいた。

需要函数と定義する。

$F(P)$ に対しては，次に述べるいろいろな仮定が組合わされて後に用いられる。

(W) (ワルラス法則)

すべての価格 P に対して $P\cdot F(P)=0$.[1]

(H) (正同次性)

すべての価格 P，すべての実数 $\lambda>0$ に対して $F(\lambda P)=F(P)$.

(C) (連続性)

$P=0$ なる点をのぞくすべての価格 P で $F(P)$ は連続である。

(S_F) (gross substitutability, finite increment form)

すべての $k_0\in\{0, 1, \dots, m\}$ に対し

$P'_r=P''_r$ $(r\neq k_0)$, $P'_{k_0}<P''_{k_0}$ ならば $F_r(P')<F_r(P'')$.

(S_D) (gross substitutability, differential form)

函数 $F(P)$ は連続微分可能で（無限大の値をも許して）すべての価格 P 及び $r, s\in\{0, 1, \dots, m\}$ $r\neq s$ に対して $\dfrac{\partial F_r}{\partial P_s}>0$.

仮定をこれだけ述べた所で，それらの間の関係を少し考察しよう。まず (S_D) は明らかに (S_F) を意味する。以下の議論では (S_D) と (H) または (S_F) と (H) を $F(P)$ に対して仮定することが多いのであるが，このとき $F(P)$ の定義域 (R^{m+1} の non-negative orthant (非負領域) これを R^{m+1}_+ で示す) の境界で少し困ったことが起る。

例えば $P=(P_0, P_1, \dots, P_r, 0, \dots, 0)$ $P_k>0(k=0, \dots, r)$ $0\leqq r<m$, とすると，このような P に対しては (S_F) と (H) (さらにもっときつい仮定では (S_D) と (H)) の下で $F(P)$ に有限確定値が定義出来ないのである。

実際 (S_F) と (H) とにより

$$F_{r+1}(P_0, \dots, P_r, 0, \dots, 0)<F_{r+1}(2P_0, \dots, 2P_r, 0, \dots, 0)$$

---

(1) $P\cdot E(P)$ は vector P と $F(P)$ との内積である。すなわち $P\cdot E(P)=\sum_{k=0}^{m} P_k\cdot F_k(P)$.

$$=F_{r+1}(P_0,\ \dots,\ p_r,\ 0,\ \dots,\ 0)$$

となり矛盾するのである。このような事実をはっきりと認識しないために [1] の論理は非常に不明確になっているのである。[1] の Lemma 1 の証明方法は誤っているということを我々は **2.** 以下で示すのであるが，もし，ここで上の困難をさけるために，$F(P)$ はその境界上で $+\infty$ の値を取るというように仮定するならば [1] の Lemma 1 は始めから，証明すべきことではなくなる。従って我々は，このようなきつい条件が R_+^{m+1} の境界においても成立することを仮定せず，価格の定義域を始めから制限して，次のような仮定を使うことになるであろう。

($P^{+\circ}$)　価格 P の定義域は R_+^{m+1} の内点（それを $R_+^{m+1\,\circ}$ で示す）とする。

(E$^+$)　$F(\bar{P})=0$　$\bar{P}\in R_+^{m+1\,\circ}$ なる $\bar{P}$ が存在する。

これは，正なる均衡解の存在を仮定している。我々が以下述べるような条件下において実際このような $\bar{P}$ の存在することが [2], [3] 等で証明されている。

(S*)　($P^{+\circ}$) の仮定の下で，もし

$$F(P)\neq 0,\ F(\bar{P})=0,\ P_{K'}/\bar{P}_{K'}=\max_{k\in\{0,\,1,\dots,\,m\}}(P_k/\bar{P}_k)$$

かつ　$P_{K''}/\bar{P}_{K''}=\min_{k\in\{0,\,1,\dots,\,m\}}(P_k/\bar{P}_k)$,

ならば

$$F_{K'}(P)<0 \text{ でかつ } F_{K''}(P)>0$$

である。

2. Lemma 1 の検討

まず [1] の Lemma 1 から検討しよう。

Lemma 1 ([1] の p. 87)　もし $F(P)$ が(H), (S_D) をみたすならば次のことが成立つ。

もし $P\geqq 0,\ P\neq 0$ で，ある $r\in\{0,\ 1,\ \dots,\ m\}$ に対して $P_r=0$ ならば $F_r(P)=+\infty$ である。

Lemma 1 の系 ([1] の p. 88)　上と同じ条件で $\bar{P}$ が均衡解ならば $\bar{P}>0$

で且つ $F(\bar{P})=0$ である。

1. ですでに述べたように Lemma 1 の仮定には (S_D) と (H) とが入っているから，$P_r=0$ ならば $F_r(P)$ に有限確定な値を与えることはできないし，さりとて，$+\infty$ の値を始めから与えるのは nonsense というものである。従って我々は Lemma 1 に更に ($P^{+\circ}$) をつけ加えてみよう。しかるに，このように救ってみても，[1] でなされている証明をそのまま承認する訳には行かないのである。詳細は省くが，彼等の [1] における証明は87ページの下から3行目から88ページの Lemma の証明の終り迄の間に誤った論理を使っているのである。その原因は彼等が p. 83 で述べている仮定 (W) を Lemma の証明のどの個所でも使わない所にあるのである。このことは次の例をみればはっきりする。

例1.　$m=1$ とし，$F_0(P_0, P_1)=-F_1(P_0, P_1)=A(P_0, P_1)-\pi/4$，ここで $0<A(P_0, P_1)<\pi/2$ で $\tan A(P_0, P_1)=P_1/P_0$ とする。

この例では容易に分るように (S_D) と (H) とが定義域 $R_+^{m+1\,\circ}$ でみたされているが

$$\lim_{Pr\to 0+} F_r(P_0, P_1)=\pi/4$$

となっていて，Lemma 1 で述べているような性質は持っていない。繰り返していうがこれは仮定 (W) が入っていないためである。(W) を仮定して且つそれを有効に使うならば，次の命題が成立する。

「仮定 (W), (H), (S_F), ($P^{+\circ}$), (E^+) の下で $\lim_{Pr\to 0+} F_r(P)=+\infty$」

なお Lemma 1 の系に対応する性質は，ここでは均衡解の当然の性質として定義に含まれている。

［証明］ 一般性を失なうことなく $r=0$ として良い。勝手に固定された $P_1, \ldots, P_m$ に対して $\lambda>0$ を $\lambda P_i>\bar{P}_i$ $(i=1, \ldots, m)$ となるように選ぶことが出来る。

(S_F), (H), (E^+) により

$$F_0(\bar{P}_0, \lambda P_1, \ldots, \lambda P_m)>F_0(\bar{P}_0, \bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_m)=0$$

となる。P_0 が十分小ならば (W) と (S_F) により

$$\bar{P}_0 F_0(\bar{P}_0, \lambda P_1, \ldots, \lambda P_m) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda P_i F_i(\bar{P}_0, \lambda P_1, \ldots, \lambda P_m)$$
$$< -\sum_{i=1}^{m} \lambda P_i F_i(P_0, \lambda P_1, \ldots, \lambda P_m)$$
$$= P_0 F_0(P_0, \lambda P_1, \ldots, \lambda P_m)$$

となるから，(H) により結論を得る。

この証明は (S_D) より弱い仮定 (S_F) の下になされている。

3. Lemma 4 の検討

[1] には次の Lemma が述べられている。

Lemma 4 ([1] の p. 89)　もし $F(P)$ が (S^*) と (H) とをみたしているならば次のことが成立つ。

$\bar{P}', \bar{P}'' \in R_{+}^{m+1\,\circ}$, $F(\bar{P}')=F(\bar{P}'')=0$ ならばある $\lambda>0$ に対して

$$\bar{P}'' = \lambda \bar{P}'$$

となる。

[1] に述べられている上の Lemma の証明も我々は正しいものと認める訳にはいかない。彼等は (S^*) と (H) とだけを用いてこの Lemma を証明したというのであるが，それが不可能なことは次の例をみれば分る。

例2.　$m=1$ とする。$A(P_0, P_1)$ は例 1 の場合と同様に定義しておいて，$F(P)$ を次の如くに定義する。

$$F_0(P_0, P_1) = -F_1(P_0, P_1) = \begin{cases} A(P_0, P_1) - \pi/4 & \text{if } \pi/4 < A(P_0, P_1) < \pi/2 \\ 0 & \text{if } \pi/6 \leqq A(P_0, P_1) \leqq \pi/4 \\ A(P_0, P_1) - \pi/6 & \text{if } 0 < A(P_0, P_1) < \pi/6. \end{cases}$$

$F(P)$ が (H) をみたすことはほとんど明らかであろう。

$E(P)$ が (S^*) を満足していることは次のようにして分る。

今 $\bar{P}$ を $F(\bar{P})=0$ なる勝手な点とする。$F(P) \neq 0$ とすると (1) $\pi/2 > A(P_0, P_1) > \pi/4$ か，または (2) $\pi/6 > A(P_0, P_1) > 0$ かのいずれかである。

(1) の場合。$\lambda>0$ を適当にえらんで

$$\lambda P_1 = \bar{P}_1 \quad \lambda P_0 < \bar{P}_0$$

とすることが出来る。

従って

$$\lambda P_1/\bar{P}_1 = 1 > \lambda P_0/\bar{P}_0$$

よって

$$P_1/\bar{P}_1 > P_0/\bar{P}_0$$

となるから (S*) の定義で使った notation を用いるならば

$$K' = 1 \text{ かつ } K'' = 0$$

となる。

$$F_{K'}(P) = F_1(P) = -(A(P_0, P_1) - \pi/4) > 0,$$

$$F_{K''}(P) = F_0(P) = A(P_0, P_1) - \pi/4 > 0$$

となるから，(S*) は (1) の場合は充されている。

(2) の場合。 この場合も検討の仕方は (1) の場合とほとんど同様で，$\lambda > 0$ としては

$$\lambda P_1 / \bar{P}_1 < 1 = \lambda P_0 / \bar{P}_0$$

となるように取れることより明らかである。

Lemma 4 は均衡価格 vector が，正の定数倍した価格 vector を同一視すると一意的に定まるということをいっているのであるが，これと同じ結論は，(S*) の代りに (S_F) を仮定しておくと得られることが簡単に証明出来る (例えば [4] p. 650 Lemma 1 参照)。[1] では (S_F) の代りにそれより弱い条件 (S*) を使って上の Lemma 4 を証明したつもりらしいのであるが，それは今見た通り誤りである ([1] の注 8 p. 89 参照)。

4. Lemma 5 の検討

なお，同論文の Lemma 5 ([1] の pp. 90-93) の証明の中にも，単なる misprint とは思えない論理ミスがある。([1] の p. 93 下から9行目) この場合は Lemma の結論自体は正しいのであるが，彼等の証明で $P = (P_0, P_1)$ $P_0 < P_1$ なるケースを考えていくと，途中で誤った論証にぶつかるはずである。しかしこの場合には，彼等の証明方法の大筋をかえることなく救うこと

が出来た。

（1966年4月20日）

参　考　文　献

[1] K. J. Arrow, H. D. Block and Leonid Hurwicz: "On the Stability of the Competitive Equilibrium, II," *Econometrica*, 27 (1959), 82–109.

[2] H. Nikaidô: "Generalized Gross Substitutability and Extremization," *Advances in Game Theory* (Annals of Mathematics Studies, No. 52), Princeton.

[3] K. Kuga: "Weak Gross Substitutability and the Existence of Competitive Equilibrium," *Econometrica*, 33 (1965), 593–599.

[4] T. Negishi: "Stability of a Competitive Economy: A Survey Article," *Econometrica*, 30 (1962), 635–669.