Joint Production を含む Neo-Classical Growth

戸島　凞

〔1〕 序

この論文では，従来 smooth な production function をもつ two-sector model でうちたてられていた命題が，それより一般的な model においても同様に妥当することを示す。すなわち， two-sector model は異なった財の生産を行なう 2 つの sector を前提とするから， 2 財の joint production は，はじめから考察の範囲外におかれる。これに反して，以下に提示される model では，この制約をはずして，2 財が結合して生産される場合を含むことを排除していない。しかし，こうした一般化にかかわらず，model 自体は非常に単純化され，従って全体の見通しがよくなったことは注目に値するとおもわれる。

さらに， two-sector model では部門間の capital shiftability を explicit に仮定している場合が多いが， joint production を含む以下の model では，少なくても，この仮定を explicit におかないで分析を進めることができる。すなわち，ここで仮定されるのは aggregate model と同様に資本の homogeneity だけである。このことは，必ずしも， capital shiftability の仮定がこの model の解釈のうえでまったく不必要になることをいみしないが，これによって two-sector model のもつ crucial な制約のひとつを消極的な形ながら回避することにはなっているであろう。

「すべて偉大なものは単純である」というよくしられた aphorism がある

が，ここで「偉大なもの」という言葉を「一般的なもの」とよみかえてみると，この aphorism は一般性の必要条件が単純性にあることを示している。以下の分析がこの命題の cotnter-example にならないことが筆者の希望である。

論文の構成は次の通りである。［2］では議論の出発点として two-sector model の Production-Possibility Frontier を一般化した P-P Frontier を規定する。［3］では一般化された P-P Frontier によって miniature Walrasian model を定義する。［4］ではその model が short run の均衡点をもつことを示し，［5］ではその均衡点が stable であることを示す。［6］では model の long run growth process もまた stable であることを示す。［7］では一般化された P-P Frontier によって programming model を構成し，改めて optimal growth を分析する。この論文の力点のひとつはこの節の分析におかれている。

なお，論文全体を通じてもっとも重要なことは，この model を two-sector model に特殊化した時に，capital intensity hypothesis とよばれる仮定がおかれていることと，demonstration の簡単化のために［6］までは 'labor does not save and capital does not consume' という仮定がおかれていることである。これらの仮定はそれぞれゆるめることができるが，この論文ではそれにふれなかった。この model 自体をさらに一般化することと，それがどれほど economic reality を反映するものであるかの検討は他の機会にゆずることにする。なお，この論文の原稿を通読されて，適切な助言を賜った西川欽也教授に感謝する。また，藤井栄一教授にもお礼を申し上げる。ありうべき誤りは筆者のものであることはいうまでもない。

［2］ two-sector model の Production-Possibility Frontier の一般化

two-sector model として，Uzawa［4］が定式化したものを考えれば，

two-sector model の P-P Frontier は次の関係によって規定される。

(1′) $C=G_C(K_C, L_C)$,

(2′) $I=G_I(K_I, L_I)$,

(3′) $K=K_C+K_I$,

(4′) $L=L_C+L_I$,

(5′) $\dfrac{\partial G_C}{\partial L_C}\Big/\dfrac{\partial G_C}{\partial K_C}=\dfrac{\partial G_I}{\partial L_I}\Big/\dfrac{\partial G_I}{\partial K_I}$.

ここで記号の意味は次の通りである。

C	消費財数量
I	投資財数量
K	総資本量
L	総労働量
K_C	消費財部門の資本量
K_I	投資財部門の資本量
L_C	消費財部門の労働量
L_I	投資財部門の労働量
$G_C(\cdot,\cdot)$	消費財部門の生産関数
$G_I(\cdot,\cdot)$	投資財部門の生産関数

両部門の生産関数は twice continuously differentiable で正値一次同次であると仮定する。このとき，うえの (1′)〜(5′) はすべて per capita の関係にかきあらためることができる。

(1) $c=l_c g_c(k_c)$,

(2) $i=l_i g_i(k_i)$,

(3) $k=l_c k_c+l_i k_i$,

(4) $1=l_c+l_i$,

(5) $(g_c/g_c')-k_c=(g_i/g_i')-k_i$.

ただし，$c\equiv C/L$, $i\equiv I/L$, $l_c\equiv L_C/L$, $l_i\equiv L_I/L$, $k_c\equiv K_C/K_C$, $k_i\equiv K_I/L_I$, $g_c(\cdot)$

$\equiv G_C(\cdot,1)$, $g_I(\cdot)\equiv G_I(\cdot,1)$ である。さらに，次の仮定をおく。

$$(6)\quad \begin{aligned} &g_c'(k_c)>0,\ g_i'(k_i)>0,\\ &g_c''(k_c)<0,\ g_i''(k_i)<0. \end{aligned}$$

以上から， two-sector model の P-P Frontier のいくつかの性質を導出することができる。

$$(7')\quad \left.\frac{dc}{di}\right|_{k=\mathrm{const.}}=-\frac{g_c'}{g_i'}<0,$$

$$(8')\quad \left.\frac{dc}{dk}\right|_{i=\mathrm{const.}}=g_c'>0,$$

$$(9')\quad \left.\frac{di}{dk}\right|_{c=\mathrm{const.}}=g_i'>0,$$

$$(10')\quad \left.\frac{d^2c}{dk^2}\right|_{i=\mathrm{const.}}=\frac{(g_c')^3g_c''g_i^2g_i''}{l_c(g_c')^3g_i^2g_i''+l_i(g_i')^3g_c^2g_c''}<0,$$

$$(11')\quad \left.\frac{d^2c}{di^2}\right|_{k=\mathrm{const.}}=\frac{(g_c')^3g_c''g_i''(k_c-k_i)^2}{l_c(g_c')^3g_i^2g_i''+l_i(g_i')^3g_c^2g_c''}<0,$$

$$(12')\quad \left.\frac{d(-g_c'/g_i')}{dk}\right|_{i=\mathrm{const.}}=\frac{(g_c')^3g_c''g_ig_i''(k_c-k_i)}{l_c(g_c')^3g_i^2g_i''+l_i(g_i')^3g_c^2g_c''}$$

$$\lesseqgtr 0 \text{ if and only if } k_c\gtreqless k_i.$$

いま，two-sector model で通常設けられる tricky な仮定のひとつである

$$k_c>k_i$$

を採用するならば，(12′) の符号は definitely に負である。この論文では，これに対応する仮定がおかれることになることは，以下に見られる通りである。

生産関数に関するいくつかの仮定と (1)～(5) の関係はこのように (c, i, k) 空間における P-P Frontier の性質を unique に characterize している。そこで，これをもっと一般的に考えて，(c, i, k) 空間の**非負象限**での P-P Frontier

$$(13)\quad c=f(i,\ k)$$

から議論をはじめることにしよう。まず，

(A 1)　$f(\cdot,\cdot)$ は twice continuously differentiable である。

と仮定する。そして，この (13) であらわされる P-P Frontier は (7′)～(12′) と類似の関係をみたしているものとしよう。すなわち，

(7)　$f_i<0$,

(8)　$f_k>0$,

(A 2)　(10)　$f_{kk}<0$,

(11)　$f_{ii}<0$,

(12)　$f_{ik}<0$.

経済的にいえば，(13)，(A 1)，(A 2) が規定する P-P Frontier は (1)～(6) の規定する P-P Frontier とは違って，joint production を含むことを排除していない点が一般的であると考えることができる。このことは次の事実を指摘することによって明確になるであろう。

two-sector model の P-P Frontier では，(10′)，(11′)，(12′) から，

$$f_{kk}\cdot f_{ii}-f_{ki}^2=\frac{d^2c}{dk^2}\cdot\frac{d^2c}{di^2}-\left[\frac{d(-g_c'/g_i')}{dk}\right]^2=0$$

がなり立つ。これは Samuelson [1] の定理によれば non-jointness を示すものに他ならない。しかし，一般化された P-P Frontier に対しては必ずしもこの関係は要請されない。[1]～[6] では，

$$f_{kk}\cdot f_{ii}-f_{ki}^2$$

が定符号である必要はないし，[7] ではこれが非負であると仮定されるにすぎない。

以下では，このように一般化された枠組の中で，通常 two-sector model でうちたてられている命題がどこまでなり立つかをみて行くことにする。なお

(A 3)　$f(i, k)-f_i(i, k)\cdot i-f_k(i, k)\cdot k>0$ for $i\geqq 0$, $k\geqq 0$

とする。これは労働の限界生産力がつねに正であることを示す。

[3] miniature Walrasian model

簡単化のために [6] まで，**労働者は貯蓄せず，資本家は消費しない**，という仮定を設けることにする。この仮定は drastic であるが，以下の議論はこれによって neat に展開される。

いま，p を投資財価格に対する消費財価格の比とすれば，生産の均衡状態は次の3式によってあらわすことができる。

(13) $c=f(i, k)$,

(14) $p=-f_i(i, k)$,

(15) $p\cdot i=f_k(i, k)\cdot k$.

(15) は投資財，従ってまた，消費財に対する需要と供給がひとしいことを示している。(13)，(14)，(15) によって記述されている経済状態は，かって Solow [2] が用いた term を使えば，miniature Walrasian model である。ここで，同じような経済的内容をもつ two-sector model における Uzawa [4] などの定式化と比べてみれば，(13)，(14)，(15) の単純性は興味ぶかい。

[4] 短期的均衡

まず，(13)，(14)，(15) の system を，k が任意の所与の値 $k^*>0$ に固定されている場合について考えよう。さて，(7)，(11) により

(16) $f(i, k^*)=0$

は unique な解をもつ。その解を

$$i_{\max}$$

としよう。また，(7)，(14) から

(17) $\dfrac{dp}{di}=-f_{ii}>0$

である。いま

$$p_{\min}=\lim_{i\to 0} p,$$

$$p_{\max}=\lim_{i\to i_{\max}} p$$

とおけば，(17) から

(18)　$0\leqq p_{\min}<p_{\max}$

となる。ここで，$i\in[0,\ i_{\max}]$ となる i に対して

$$Q(i)=-f_i(i,\ k^*)\cdot i-f_k(i,\ k^*)\cdot k^*$$

という関数を定義すれば

(19)　$Q(0)=-f_k(0,\ k^*)\cdot k^*<0,$

(20)　$Q(i_{\max})=-f_i(i,\ k^*)\cdot i_{\max}-f_k(i_{\max},\ k^*)\cdot k^*>0$

がなり立つ。二番目の関係は (A 3)，(16) から従う。$Q(i)$ はあきらかに differentiable であるから

(21)　$\dfrac{dQ}{di}=-(f_{ii}\cdot i+f_i+f_{ki}\cdot k^*)>0$

をうる。(19)，(20)，(21) が示す関数 $Q(i)$ の形状は第 1 図のようになる。

従って，k が任意の所与の値 $k^*>0$ に固定されている時は，$0<i^*<i_{\max}$ をみたすある i^* が unique に存在して

(22)　$Q(i^*)=0$

となる。次に

(14′)　$p^*=-f_i(i^*,\ k^*)$

と定義すれば，(22) は

(15′)　$p^*\cdot i^*=f_k(i^*,\ k^*)\cdot k^*$

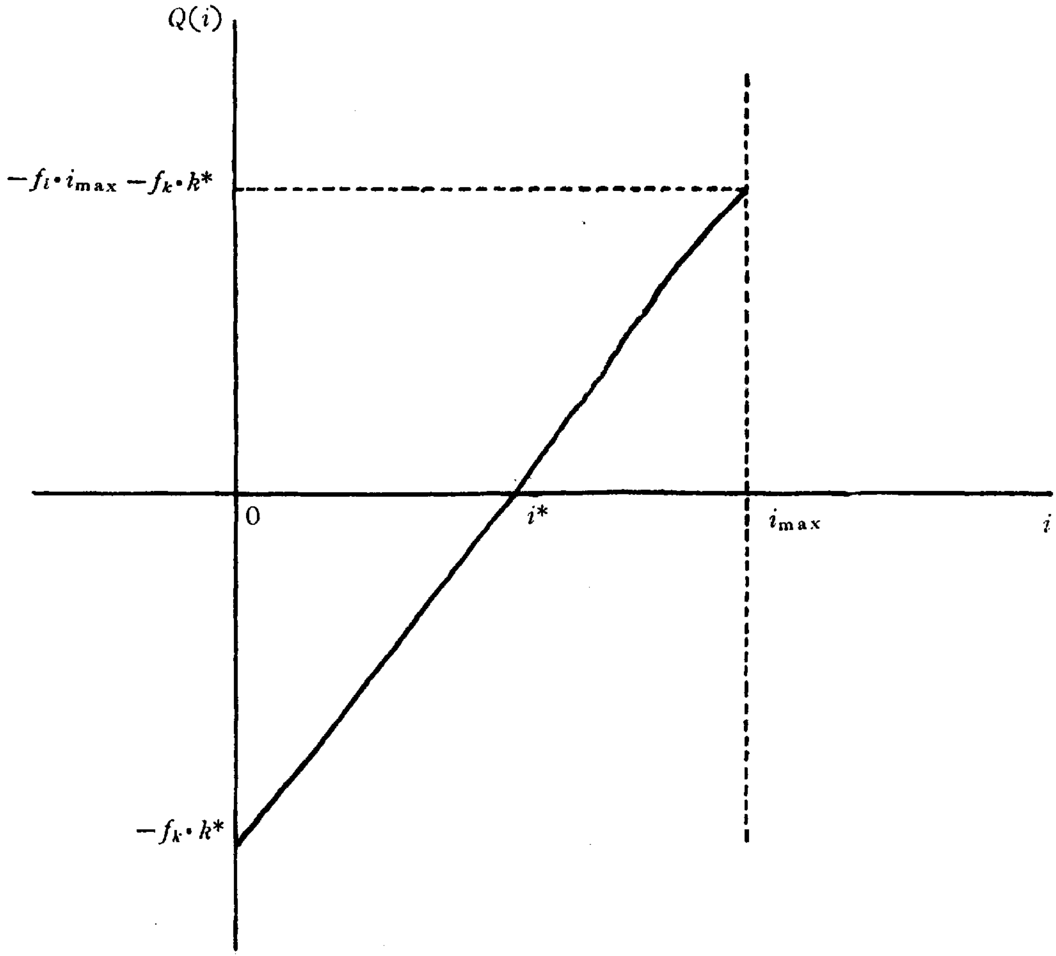
とかきかえることができる。さらに

(13′)　$c^*=f(i^*,\ k^*)$

と定義する。これらの (13′)，(14′)，(15′) は k が任意の所与の値 $k^*>0$ に固定されている時に，(13)，(14)，(15) をみたす unique な解 (c^*, i^*, p^*) が存在することを示している。ここで，$0<i^*<i_{\max}$ と (18) から

$$p_{\min}<p^*<p_{\max},$$

$$c^*>0$$



第 1 図

となることは容易にわかる。以上をまとめて，次の定理をうる。

存在定理 (miniature Walrasian model)：(A 1)，(7)，(8)，(11)，(12)，(A 3) がなり立っているものとする。その時，任意の所与の $k^*>0$ に対して (13)，(14)，(15) を満たす unique な解 (c^*, i^*, p^*) が存在して

$$c^*>0,$$

$$i^*>0,$$

$$p_{min}<p^*<p_{max}$$

となる。

[5] Walrasian Tatonnement

前節でその存在がたしかめられた，(13)，(14)，(15) によってあらわされ

る system の短期的均衡が stable であるか，どうかを検討しておこう。そのために，伝統的思考法に従って，つぎのような tatonnement を考える。

$$(23)\quad \dot{p}=\frac{f_k}{p}k^*-i.$$

これは投資財に対する超過需要が正なら p は上昇し，それが負なら p は下落することを示す。この場合

$$p_{\min}<p<p_{\max}$$

であるかぎり，われわれの dynamic system を構成する方程式は (13), (14), (23) の三本である。この system では，市場でさけばれる投資財の数量は (13) を i についてとくことによってえられる。すなわち

$$(14)\quad p=-f_i(i,\ k)$$

をみたすように i がきめられる。$f_i(\cdot,\cdot)$ の性質から，(14) は k を任意の所与の値 $k^*>0$ に固定した時に i について unique に解くことができる。それを

$$(24)\quad i=i(p)$$

とかくことにしよう。ここで

$$\frac{di}{dp}=-\frac{1}{f_{ii}}>0$$

である。次に

$$p\geqq p_{\max}$$

の時は，p は $(c,\ i)$ 平面の P-P Frontier において，点 $(0,\ i_{\max})$ の cone of outward normals に属していることになるので，(14) の implication を一般化して，これを，その点の cone of outward normals に p が属するような i の値がえらばれるという rule をあらわすものと考えよう。そうすると，この場合は i の値として $i_{\max}$ がえらばれることになる。同様に考えて

$$p\leqq p_{\min}$$

ならば

$$i=0$$

とならなければならない。

そこで，われわれの dynamic system は次のように縮約される。

(25-1)　$\dot{p}=\frac{f_k}{p}k^*-i(p)$　if $p_{\min}<p<p_{\max}$,

(25-2)　$\dot{p}=\frac{f_k}{p}k^*-i_{\max}$　if $p_{\max}\leqq p$,

(25-3)　$\dot{p}=\frac{f_k}{p}k^*$　if $p\leqq p_{\min}$.

さて，関数 $R(p)$ を

$$f_k[i(p),\ k^*]\cdot k^*-p\cdot i(p)$$

によって定義しよう。この時

(26)　$R(p)=f_k(0,\ k^*)\cdot k^*>0$　if $p\leqq p_{\min}$,

(27)　$R(p)=f_k(i_{\max},\ k^*)\cdot k^*+f_i(i_{\max},\ k^*)\cdot i_{\max}<0$　if $p_{\max}\leqq p$

である。二番目の関係は（A 3）と（16）から従う。さらに $R(p)$ はあきらかに differentiable であるから

(28)　$\frac{dR}{dp}=f_{ki}\frac{di}{dp}k^*-i-p\frac{di}{dp}<0$

となる。(26), (27), (28) が示す関数 $R(p)$ の形状は第 2 図のようになる。

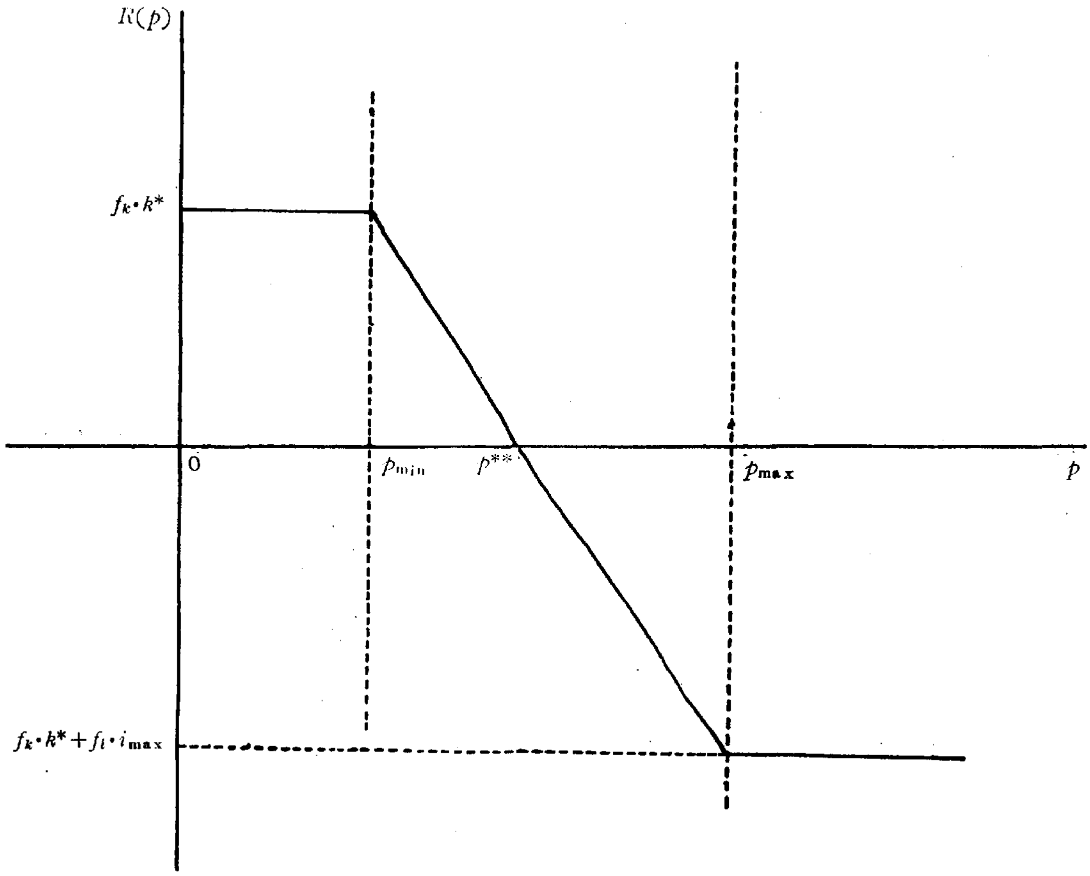
従って，$R(p^{**})=0$ かつ $p_{\min}<p^{**}<p_{\max}$ となるある p^{**} が unique に存在して，(25) を考えれば

$\dot{p}>0$　if $p<p^{**}$,

(29)　$\dot{p}=0$　if $p=p^{**}$,

$\dot{p}<0$　if $p>p^{**}$

となる。よくしられているように，(29) は p^{**} が globally stable であることを示している。さらに，p^{**}, $i^{**}=i(p^{**},\ k^*)$, $c^{**}=f(i^{**},\ k^*)$ が (13), (14), (15) をみたすことは容易にわかる。そこで，(13), (14), (15) の解の uniqueness によって，$p^{**}=p^*$, $i^{**}=i$, $c^{**}=c$ でなければいけない。以



第 2 図

上をまとめて次の定理をうる。

安定性定理（短期）:（A1），(7)，(8)，(11)，(12)，（A3）がなり立っているものとする。その時，k を任意の所与の値 $k^*>0$ に固定すれば，(14)，(15) を満足する $p^*>0$ が存在して，(23) によって示される tatonnement process は，初期条件がどんな値であろうと，p^* に漸近的に接近する。すなわち，p^* は globally stable である。

〔6〕 長期的均衡

これまでは k が任意の所与の値に固定されている場合について考えて来たが，この節ではこの仮定をゆるめることにしよう。いま，μ を資本減耗率，n を労働量の成長率とすれば，よくしられているように，k の変動は次の微分方程式によってあらわされる。

(30)　$\dfrac{\dot{k}}{k}=\dfrac{i}{k}-(\mu+n).$

ここで i は

(14)　$p=-f_i(i,k),$

(15)　$p\cdot i=f_k(i,k)\cdot k$

をみたすように決定される。すなわち，ここで考察される system はこれらの (30)，(14)，(15) と P-P Frontier を記述する (13) の4本の方程式によってあらわされる。[**4**] で示したように，(13)，(14)，(15) は任意の k に対して unique な i を決定する。それを，k を explicit に示して

$$i=i(k)$$

とあらわせば

(31)　$\dfrac{di}{dk}=\dfrac{-(f_{ik}\cdot i+f_k+f_{kk}\cdot k)}{f_i+f_{ii}\cdot i+f_{ki}\cdot k}$

がえられる。(14)，(15) から

(32)　$\dfrac{i(k)}{k}=-\dfrac{f_k[i(k),k]}{f_i[i(k),k]}$

が任意の k に対してなり立つ。そこで，(31)，(32) を考えれば

(33)　$\dfrac{d(i(k)/k)}{dk}=\dfrac{-f_i^2\cdot f_{kk}-f_k^2\cdot f_{ii}+2f_i\cdot f_k\cdot f_{ik}}{(f_i+f_{ii}\cdot i+f_{ik}\cdot k)f_i^2}<0$

がえられる。ゆえに

$$\nu_{\max}=\lim_{k\to 0}\frac{i(k)}{k},$$

$$\nu_{\min}=\lim_{k\to\infty}\frac{i(k)}{k}$$

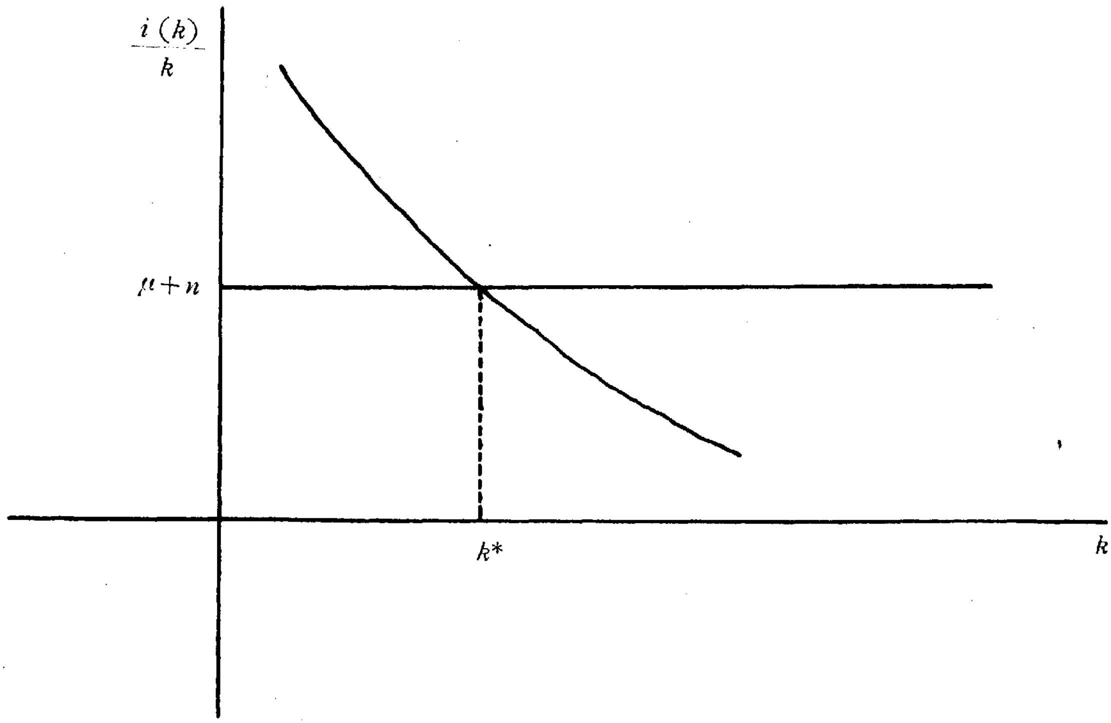
とおけば，(33) によって

$$\nu_{\min}<\nu_{\max}$$

でなければならない。ここで

$$\nu_{\min}<\mu+n<\nu_{\max}$$

であれば，第3図に示すように，(33) によって，ある $k^*>0$ が unique に



第 3 図

存在して

$$\frac{i(k^*)}{k^*}=\mu+n$$

となる。この k^* を balanced capital labor ratio とよぼう。(30) から

$$\text{(34)}\quad \begin{aligned} &\dot{k}>0 \quad \text{if } k<k^*, \\ &\dot{k}=0 \quad \text{if } k=k^*, \\ &\dot{k}<0 \quad \text{if } k>k^* \end{aligned}$$

となることは容易にわかる。(34) は k^* が globally stable であることを示している。以上をまとめれば次の定理をうる。

安定性定理 (長期)：(A1), (7), (8), (10), (11), (12) がなり立っているものとする。その時，もし balanced capital labor ratio $k^*>0$ が存在するならば，(30) であらわされる growth process は，初期条件がどんな値であろうと，k^* に漸近的に接近する。すなわち，k^* は globally stable である。

[7] optimal growth model

positive growth を分析する two-sector modal は Srinivasan [3], Uzawa [5] らによって，optimal growth を分析する model に組みかえられている。われわれも，これにならって，これまでの model を optimal growth を分析することができるように組みかえることにしよう。あらためて，次のような programming model を考える。

(35)　$\max \int_0^\infty c \cdot e^{-\rho t} dt,$

subject to

(13)　$c = f(i, k),$

(30)　$\dot{k} = i - (\mu + n)k.$

ここで，$\rho > 0$ は割引率で一定とする。これらの方程式については，それらが Srinivasan [3], Uzawa [5] らの model のわれわれの term による表現であることを指摘する以外に多くを語る必要はない。実際，経済的な意味においては，この model は joint production を許すという点を除けば，彼らのものと同じである。しかし，その一般性にかかわらず，model の表現自体が非常に簡単化している点を注意すべきである。ここで，次のような仮定をあらたに設けることにする。

(A 4)　$f(\cdot, \cdot)$ は concave である。

(A 5)　$\lim_{k \to 0} f_k(0, k) = +\infty,$

$\lim_{k \to +\infty} f_k(0, k) = 0.$

(A 6)　$f(i, k) = 0$ の i に関する解を

$i = i_{\max}(k)$

とする。そのとき

(i)　$i_{\max}(0) = 0,$

(ii)　$\lim_{k \to 0} \frac{d}{dk} i_{\max}(k) = +\infty,$

(iii) $\lim_{k\to+\infty}\frac{d}{dk}i_{\max}(k)=0$

がなり立つ。

仮定 (A 4) によって, Hessian matrix

$$H=\begin{bmatrix} f_{ii} & f_{ik} \\ f_{ik} & f_{kk} \end{bmatrix}$$

は negative semi-definite となる。従って

$$\det H=f_{ii}\cdot f_{kk}-f_{ik}^2\geqq 0$$

となる。仮定 (A 5), (A 6) は $f(\cdot,\cdot)$ に関するややきつい制限であるが, これらによって議論は見通しがよくなり単純化される。これらの仮定をおとして, 議論を一層 mathematical に sophisticate することもできるが, model の本質的特徴はこれらの仮定によって損われることはない。

存在定理 (optimal growth model): (A1), (A2), (A4), (A6) がなり立っているとする。その時, t のある continuous function $p(t)$ が存在して, (13), (30) を満たす $(i(t), k(t))$ に対して

(36) $\dot{p}(t)=(\lambda+\rho)p(t)-f_k[i(t), k(t)],\ (\lambda=\mu+n)$,

(37) $\lim_{t\to\infty} p(t)\cdot e^{-\rho t}=0$

を満足し, かつ

(38-1) $f_i[i(t), k(t)]+p(t)=0$ if $0<i(t)<i_{\max}(k(t))$,

(38-2) $f_i[i(t), k(t)]+p(t)\leqq 0$ if $i(t)=0$,

(38-3) $f_i[i(t), k(t)]+p(t)\geqq 0$ if $i(t)=i_{\max}(k(t))$

がなり立ち, さらに

(39) ある $t'\geqq 0$ に対して $i(t')\neq i_{\max}(k(t'))$ であるとき,

$i(t)=i_{\max}(k(t))$ となる $t>t'$ は存在しない。

ならば, $(i(t), k(t))$ は (35), (13), (30) の unique optimal solution である。

この定理は (A 1), (A 2), (A 4), (A 6) の下で, (36)~(39) をみたす

$p(t)$ の存在が (35), (13), (30) の optimal solution の十分条件であるということを述べているが，逆に (36)～(38) は optimal solution の必要条件でもある。実際，そのことは，例えば，Pontryagin's Maximum Principle を (35), (13), (30) に適用してみれば容易にわかる。

定理の証明：まず，(A 2) によって

(40)　$$\frac{d}{dk}i_{\max}(k)=-\frac{f_k}{f_i}>0,$$

(41)　$$\frac{d^2}{dk^2}i_{\max}(k)=-\left[\left(f_{ki}\cdot\left(-\frac{f_k}{f_i}\right)+f_{kk}\right)\cdot f_i+f_k\cdot\left(f_{ii}\cdot\left(\frac{f_k}{f_i}\right)-f_{ik}\right)\right]/f_i^2<0$$

がなり立つことを注意する。いま，補助微分方程式

(30′)　$$\dot{S}=i_{\max}(S)-\lambda S$$

を考えれば，(A 6), (40), (41) から

$$i_{\max}(S^*)-\lambda S^*=0$$

となるある $S^*>0$ が unique に存在して，(30′) の解 $S(t)$ は S^* で globally stable である。よって，集合

$$\bar{M}(S(0))=\{S(t)\,|\,0\leqq t<\infty\}$$

はどんな初期条件 $S(0)\geqq 0$ に対しても有界である。(30) と (30′) を比較して

$$k(0)=S(0),$$

$$0\leqq i(t)\leqq i_{\max}(k(t))$$

であることを考えれば

$$k(t)\leqq S(t)$$

をうる。実際，ある $t'>0$ が存在して，$k(t')>S(t')$ となったとすれば，ある開区間

$$T=(t_1,\ t_2)$$

が存在して

$$k(t_1)=S(t_1),\ \dot{k}(t_1)=\dot{S}(t_1),$$

$$k(t)>S(t),\ t\in T$$

とならなければならない。ここで，$\dot{k}(t_1)>\dot{S}(t_1)$ の可能性は

$$\dot{k}(t_1)=i(t_1)-\lambda k(t_1)\leqq i_{\max}(k(t_1))-\lambda k(t_1)=\dot{S}(t_1)$$

から否定される。いま，一般性を失なうことなく，$\dot{k}(t_1)=\dot{S}(t_1)\neq 0$ と仮定すれば ($\dot{k}(t_1)=\dot{S}(t_1)=0$ ならば，$k(t)=S(t)=S(t_1)$, $t\geqq t_1$ が解となる)，T の部分区間 $T'=(t_1, t_2')$ を適当にえらんで

$$\mathrm{sign}(\dot{k}(t))=\mathrm{sign}(\dot{S}(t)),\ t\in T',$$

$$S(\bar{t})=k(\bar{\bar{t}}),\ \bar{t}\neq\bar{\bar{t}},\ \bar{t},\ \bar{\bar{t}}\in T'$$

とすることができる。さて

$$A=\{(t, k)\mid k(t_1)\leqq k(t)\leqq k(\bar{\bar{t}})\},$$

$$B=\{(t, S)\mid S(t_1)\leqq S(t)\leqq S(\bar{t})\}$$

とおく。いま，A の任意の点 (t, k) に対して

$$S(\hat{t})=k(t)$$

となる B の点 $(\hat{t}, S)$ を対応させることにすれば，この対応は 1—1 の対応である。すなわち，A の任意の点に対応して B のある点が unique に定まり，その逆も成立する。ところで，この対応の構成から集合 A, B のすべての対応する 1 対の点 (t, k), $(\hat{t}, S)$ に対して

$$\dot{k}(t)\leqq\dot{S}(\hat{t})$$

である。$k(t_1)=S(t_1)$ を考えれば，これは

$$k(t)\leqq S(t),\ t\in[t_1,\ \hat{t}]\subset T$$

を意味するから矛盾である。

よって，集合

$$M(k(0))=\{k(t)\mid 0\leqq t<\infty\}$$

はどんな初期条件 $k(0)$ に対しても上に有界である。さて，$i(t)$, $k(t)$ を (13), (30) をみたす任意の解とする。さらに，$i^0(t)$, $k^0(t)$, $p^0(t)$ を (13), (30), (36), (37), (38), (39) をみたす解としよう。ここで，$k(0)=k^0(0)$ とする。そうすると，以下が従う。なお，以下では，特に必要がないかぎり $i(t)$ などから t をおとして，i などと表示する。

$$
\begin{aligned}
& f(i^0, k^0)-f(i, k) \\
& =f(i^0, k^0)-f(i, k)-f_i^0\cdot(i^0-i)-f_k^0\cdot(k^0-k)+f_i^0\cdot(i^0-i)+f_k^0\cdot(k^0-k) \\
& =A(t)+f_i^0\cdot(i^0-i)+\lambda p^0(k^0-k)+\rho p^0(k^0-k)-\dot{p}^0(k^0-k) \quad \text{((36) による)} \\
& =B(t)-p^0\cdot(i^0-i)+\lambda p^0(k^0-k)+(f_i^0+p^0)\cdot(i^0-i) \\
& =B(t)-p^0\cdot((i^0-\lambda k^0)-(i-\lambda k))+(f_i^0+p^0)\cdot(i^0-i) \\
& =B(t)-p^0\cdot(\dot{k}^0-\dot{k})+(f_i^0+p^0)\cdot(i^0-i). \qquad \text{((30) による)}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
& f_i^0=f_i(i^0, k^0),\ f_k^0=f_k(i^0, k^0), \\
& A(t)=f(i^0, k^0)-f(i, k)-f_i^0\cdot(i^0-i)-f_k^0\cdot(k^0-k), \\
& B(t)=A(t)+\rho p^0\cdot(k^0-k)-\dot{p}^0\cdot(k^0-k)
\end{aligned}
$$

である。そこで

$$
\begin{aligned}
& \{f(i^0, k^0)-f(i, k)\}\cdot e^{-\rho t} \\
& =A(t)\cdot e^{-\rho t}-\frac{d}{dt}\{p^0\cdot e^{-\rho t}(k^0-k)\}+(f_i^0+p^0)\cdot(i^0-i)\cdot e^{-\rho t}
\end{aligned}
$$

をうる。(A 4) によって

$$A(t)\cdot e^{-\rho t}\geqq 0$$

となるから

$$\int_0^\infty A(t)\cdot e^{-\rho t}dt\geqq 0$$

をうる。また，$M(k(0))$ が上に有界であることと $k^0(0)=k(0)$ を考慮すれば，(37) により

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^\infty\left[\frac{d}{dt}\{p^0\cdot e^{-\rho t}\cdot(k^0-k)\}\right]dt \\
& =[-p^0\cdot e^{-\rho t}\cdot(k^0-k]_0^\infty\geqq 0
\end{aligned}
$$

をうる。最後に，(38–1)，(38–2) がなり立っている時は，あきらかに

$$(f_i^0+p^0)\cdot(i^0-i)\cdot e^{-\rho t}\geqq 0$$

となる。(38–3) がなり立っている時は

$$\bar{t}=\sup\{t\,|\,i^0(t)=i_{\max}(k^0(t))\}$$

と定義すれば，(39) により

(42) $i^0(t)=i_{\max}(k^0(t)),\ t\in[0,\bar{t})$

とならなければならない。実際，もし，ある $t_1\in[0,\bar{t})$ が存在して

$$i(t_1)\neq i_{\max}(k(t_1))$$

となったとすると，$\bar{t}$ の定義から，$t_1<t'$ かつ $t'\in[0,\bar{t})$ となるある t' に対して

$$i_0(t')=i_{\max}(k^0(t'))$$

となるが，これは (39) に矛盾する。そこで，微分方程式

$$\dot{k}^0(t)=i_{\max}(k^0(t))-\lambda k^0(t),$$

$$\dot{k}(t)=i(t)-\lambda k(t)$$

と

$$k^0(0)=k(0),$$

$$0\leqq i(t)\leqq i_{\max}(k(t))$$

を考えあわせると，(42) がなり立てば，はじめの方で

$$k(t)\leqq S(t)$$

がなり立つことを示す時に使った論法と同じ論法をふたたび使えば

$$k(t)\leqq k^0(t),\ t\in[0,\bar{t})$$

がえられる。ゆえに，(13) により

(43) $i(t)\leqq i_{\max}(k^0(t))=i^0(t),\ t\in[0,\bar{t})$

がえられる。(43) により，(38-3) がなり立つ時も

$$(f_i^0+p^0)\cdot(i^0-i)\cdot e^{-\rho t}\geqq 0$$

をうる。よって

$$\int_0^\infty (f_i^0+p^0)\cdot(i^0-i)\cdot e^{-\rho t}dt\geqq 0$$

である。以上をまとめれば

$$\int_0^\infty \{f(i^0,k^0)-f(i,k)\}\cdot e^{-\rho t}dt\geqq 0$$

がえられる。ゆえに

$$\int_0^\infty f(i^0, k^0)\cdot e^{-\rho t}dt \geqq \int_0^\infty f(i, k)\cdot e^{-\rho t}dt$$

となる。これは，$(i^0(t),\ k^0(t))$ が (35), (13), (30) の optimal solution であることを示すものに他ならない。この optimal solution は unique である。実際，もし，ある $t' \epsilon [0, \infty)$ があって

$$i^0(t') \neq i(t'),\ k^0(t') \neq k(t)$$

であり，かつ

$$\int_0^\infty \{f(i^0, k^0) - f(i, k)\}\cdot e^{-\rho t}dt = 0$$

となるならば

$$f[i(t'), k(t')] = f[i^0(t), k^0(t')] + f_i[i^0(t'), k^0(t')]\cdot[i(t') - i^0(t')]$$
$$+ f_k[i^0(t'), k^0(t')]\cdot[k(t) - k^0(t')]$$

がなり立たなければならない。ところで，これがなり立つためには

$$i' \epsilon \{i \mid i = \theta i^0(t') + (1-\theta)i(t'),\ 0 \leqq \theta \leqq 1\},$$

$$k' \epsilon \{k \mid k = \theta k^0(t') + (1-\theta)k(t'),\ 0 \leqq \theta \leqq 1\}$$

となる任意の i', k' に対して，$f(i', k')$ は linear であるか，または，concave ではありえない。前者ならば，(A 2) の (10)～(12) に矛盾するし，後者ならば (A 4) に矛盾する。ゆえに，optimal solution は unique でなければならない。(**証明了**)

以上の存在定理によって，(35), (13), (30) の optimal solution をもとめることは

(30)　$\dot{k} = i - \lambda k,$

(36)　$\dot{p} = (\lambda + \rho)p - f_k(i, k),$

(37)　$\lim_{t \to \infty} p\cdot e^{-\rho t} = 0,$

(38–1)　$f_i(i, k) + p = 0 \quad \text{if } 0 < i < i_{\max}(k),$

(38–2)　$f_i(i, k) + p \leqq 0 \quad \text{if } i = 0,$

(38–3)　$f_i(i, k) + p \geqq 0 \quad \text{if } i = i_{\max}(k)$

をみたす $(i(t), k(t), p(t))$ の中で，(39) を満足する解をもとめることに帰

着する。

さて，まず，最初に

$$0<i(t)<i_{\max}(k(t))$$

がなり立っている場合について考えよう。この時は (38-1) により

(44-1) $f_i[i(t),k(t)]+p(t)=0,$

(44-2) $i(t)>0,\ c(t)>0$

となる。[5] の議論と同様に

(44′) $f_i(i,k)+p=0$

を，i についてといて，それを

$$i=i(p,k)$$

とあらわす。従って，(38-1) がなり立つ場合の k と p の動きは

(45) $\dot{k}=i(p,k)-\lambda k,$

(46) $\dot{p}=(\lambda+\rho)p-f_k[i(p,k),k]$

という微分方程式によってあらわされる。ここで

$$\frac{\partial i}{\partial p}=-\frac{1}{f_{ii}}>0,$$

$$\frac{\partial i}{\partial k}=-\frac{f_{ik}}{f_{ii}}<0$$

となっていることに注意しておこう。ところで

$$0<i(p,k)<i_{\max}(k)$$

であれば，(11) により

$$-f_i(0,k)<-f_i[i(p,k),k]<-f_i(i_{\max}(k),k)$$

がなり立ち，他方，(12) により

$$f_k(0,k)>f_k[i(p,k),k]>f_k(i_{\max}(k),k)$$

がなり立つ。よって，(7) を考慮すれば，これらの関係から

(47) $-f_k(0,k)/f_i(0,k)>-f_k[i(p,k),k]/f_i[i(p,k),k]$
$>-f_k(i_{\max}(k),k)/f_i(i_{\max}(k),k)$

をうる。(A 5), (12) により

$$\lim_{k\to 0}(-f_k(0,k)/f_i(0,k))=+\infty,$$

$$\lim_{k\to +\infty}(-f_k(0,k)/f_i(0,k))=0$$

となる。また，(A6) により

$$\lim_{k\to 0}(-f_k(i_{\max}(k),k)/f_i(i_{\max}(k),k))=\lim_{k\to 0}\frac{d}{dk}i_{\max}(k)=+\infty,$$

$$\lim_{k\to +\infty}(-f_k(i_{\max}(k),k)/f_i(i_{\max}(k),k))=\lim_{k\to +\infty}\frac{d}{dk}i_{\max}(k)=0$$

となる。従って，適当に i をえらべば，i, k, p が (44′) をみたす任意の k, p に対して，すなわち，$p\in(-f_i(0,k),\ -f_i[i_{\max}(k),k])$ となる p に対して

$$(48\text{-}1)\quad \lim_{k\to 0}(-f_k[i(p,k),k]/f_i[i(p,k),k])=+\infty,$$

$$(48\text{-}2)\quad \lim_{k\to\infty}(-f_k[i(p,k),k]/f_i[i(p,k),k])=0$$

とならなければならない。いま

$$Q_1(p,k)=i(p,k)-\lambda k,$$

$$Q_2(p,k)=(\lambda+\rho)p-f_k[i(p,k),k]$$

と定義しよう。このとき，方程式

$$(49)\quad Q_1(p,k)=Q_2(p,k)=0$$

は unique な正解値をもつ。実際，(49) をかきかえてみれば

$$(50)\quad \lambda+\rho=-\frac{f_k[i(p,k),k]}{f_i[i(p,k),k]},$$

$$(51)\quad i(p,k)=\lambda k$$

となる。適当に i, k をえらべば，i, k, p が (44′) をみたす p, k の中に，(48) により，(50) をみたすものが存在する。いま，その p, k の関係を $k=k^*(p)$ とかくことにすれば，簡単な計算によって，(A4) から

$$(52)\quad \frac{dk^*}{dp}=\frac{(\rho+\lambda)f_{ii}+f_{ki}}{f_{ii}\cdot f_{kk}-f_{ik}^2}\leqq 0$$

となることをたしかめることができる。(A6), (40), (41) から

$$\lambda+\rho=-\frac{f_k[i_{\max}(k_1^*),k_1^*]}{f_i[i_{\max}(k_1^*),k_1^*]}=\frac{d}{dk}i_{\max}(k_1^*)$$

となる unique な $k_1^*>0$ が存在し，(47) により

$$k_1^* < k^*(p) \quad \text{if } f_i(i, k^*(p)) + p = 0 \text{ and } i > 0,\ c > 0$$

となる。また，同じく，(A 6)，(40)，(41) から

$$i_{\max}(k_1^*) > \lambda k_1^*$$

がなり立つ。他方，(A 4) により

$$\lambda + \rho = -\frac{f_k(0, k_2^*)}{f_i(0, k_2^*)}$$

となる unique な $k_2^* > 0$ が存在し，(47) により

$$k^*(p) < k_2^* \quad \text{if } f_i(i, k^*(p)) + p = 0 \text{ and } i > 0,\ c > 0$$

となる。いま

$$E(p) = i(p, k^*(p)) - \lambda k^*(p)$$

という関数を考えて

$$p_1^* = -f_i(i_{\max}(k_1^*), k_1^*)$$

とおけば

$$\lim_{p \to p_1^*} k^*(p) = k_1^*,$$

$$\lim_{p \to p_1^*} i(p, k^*(p)) = i_{\max}(k_1^*)$$

となり，また

$$p_2^* = -f_i(0, k_2^*)$$

とおけば

$$\lim_{p \to p_2^*} k^*(p) = k_2^*,$$

$$\lim_{p \to p_2^*} i(p, k^*(p)) = 0$$

となるから

$$\lim_{p \to p_1^*} E(p) > 0,$$

$$\lim_{p \to p_2^*} E(p) < 0$$

である。(52) から $i(p, k^*(p))$ は p の単調増加関数となるゆえ，$E(p)$ も p の単調増加関数である。よって，ある $p^* \epsilon (p_2^*, p_1^*)$ が unique に存在して

$$E(p^*)=0$$

となる。すなわち，$k^*(p)$ を（51）に代入した p に関する方程式は解をもつ。$p^*>0$ はあきらかである。

$$k^*=k^*(p^*)$$

とおけば，(k^*, p^*) は（49）を満足する。さて

$$\frac{\partial Q_1}{\partial p}>0,\quad \frac{\partial Q_2}{\partial p}>0,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial k}>0,\quad \frac{\partial Q_2}{\partial k}\leqq 0$$

であるから，implicit function の存在定理によって

$$Q_1(p, k)=0$$

は

$$p=q_1(k),$$

$$\frac{dq_1}{dk}>0,$$

$$Q_1(q_1(k), k)=0$$

となる関数 $q_1(\cdot)$ を，また

$$Q_2(p, k)=0$$

は

$$p=q_2(k),$$

$$\frac{dq_2}{dk}\leqq 0,$$

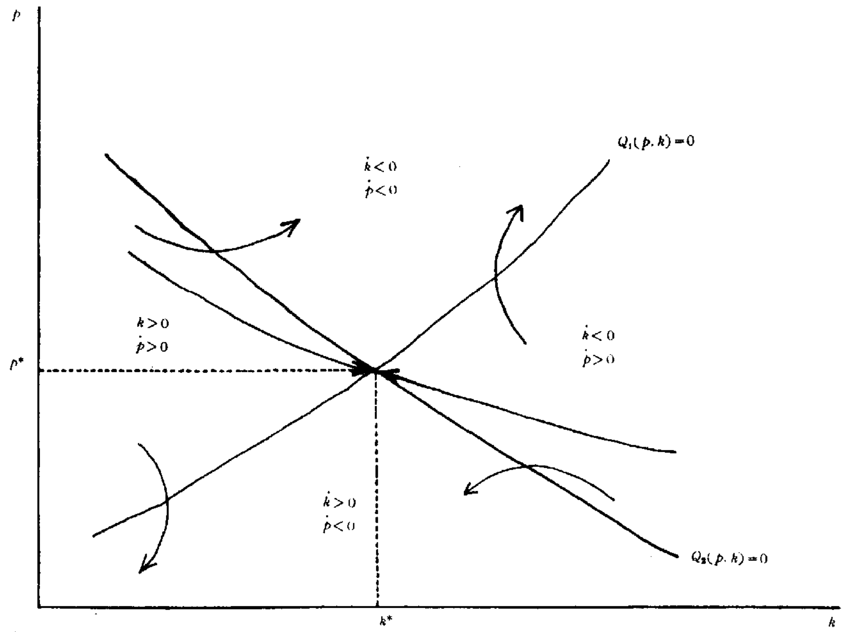
$$Q_2(q_2(k), k)=0$$

となる関数 $q_2(\cdot)$ を定義する。以上の議論をまとめれば，（45），（46）の微分方程式によってあらわされる $k(t)$, $p(t)$ の動きは，第4図の矢印の曲線のようになる。

いま，これらの解のうちで，（37）を満足するもの，すなわち

$$(k(t), p(t))\rightarrow(k^*, p^*) \text{ as } t\rightarrow\infty$$

となる $k(t)$ と $p(t)$ から t を消去したものを



第 4 図

$$p=h(k)$$

とあらわすことにしよう。あきらかに，$h(\cdot)$ は unique な関数で，かつ

$$\frac{dh}{dk}\leqq 0$$

である。ここで

(53)　$h(k)=-f_i(i_{\max}(k),k)$,

(54)　$h(k)=-f_i(0,k)$

はいずれも解をもつものとし，(53) の解を k_1^{**}，(54) の解を k_2^{**} とすれば，これらは unique で，かつ

$$0<k_1^{**}<k_2^{**}$$

となる。また

$$p_1^{**}=-f_i(i_{\max}(k_1^{**}),k_1^{**}),$$

$$p_2^{**}=-f_i(0,k_2^{**})$$

とおく。さて，与えられた初期条件 $k(0)>0$ が

$$k(0)<k_1^{**}$$

となっている時は

(55-1)　$i(t)=i_{\max}(k(t)),$

(55-2)　$\dot{k}(t)=i(t)-\lambda k(t),$

(55-3)　$t_1^{**}=\int_{k(0)}^{k_1^{**}}\frac{dk}{i_{\max}(k)-\lambda k},$

(55-4)　$p(t)=e^{-(\lambda+\rho)(t_1^{**}-t)}\left\{\int_t^{t_1^{**}}f_k[i_{\max}(k(s)),k(s)]\cdot e^{(\lambda+\rho)(t_1^{**}-s)}ds+p_1^{**}\right\}$

をみたす $k(t)$, $p(t)$ を考えれば，k_1^* の定義から，あきらかに $k_1^{**}<k_1^*$ であるから，(A6)，(40)，(41) を考えれば，$k(t)<k_1^{**}$ であるかぎり

$$\dot{k}(t)>0$$

である。また，$p(t)$ は (36) をみたし

$$p(t_1^{**})=p_1^{**}$$

となる。さらに，$k(t)>k_1^{**}$ であれば

$$-f_i[i_{\max}(k(t)),k(t)]<p_1^{**}$$

となるから，$i(t)=i_{\max}(k(t))$ のとき，$p(t)$ がみたさなければならない条件がなり立つ。すなわち

$$p(t)>-f_i[i_{\max}(k(t)),k(t)],\quad t\in[0,t_1^{**})$$

でなければならない。実際，もし，ある $\bar{t}\in[0,t^{**})$ に対して

$$p(\bar{t})\leqq-f_i[_{\max}(k(\bar{t})),k(\bar{t})]$$

であれば，$t=t_1^{**}$ で $p(t)=p_1^{**}$ となるためには，ある $t'\in[0,t_1^{**})$ があって

$$\dot{p}(t')>0,$$

$$p(t')\leqq-f_i[i_{\max}(k(t')),k(t')]$$

とならなければならないが，(A6) により

$$\lambda+\rho<-\frac{f_k[i_{\max}(k(t)),k(t)]}{f_i[i_{\max}(k(t)),k(t)]},\quad t\in[0,t_1^{**})$$

であるから

$$\begin{aligned}\dot{p}(t')&=(\lambda+\rho)p(t')-f_k[i_{\max}(k(t')),k(t')]\\&\leqq(\lambda+\rho)\{-f_i[i_{\max}(k(t')),k(t')]-f_k[i_{\max}(k(t')),k(t')]<0\end{aligned}$$

となって $\dot{p}(t')>0$ は不可能である。ゆえに，(55) をみたす $k(t)$, $p(t)$ は (30)，(36)，(38–3) の解である。

同様に考えることによって

$$k_2^{**}<k(0)$$

の時は

$$(56\text{–}1)\quad i(t)=0,$$

$$(56\text{–}2)\quad \dot{k}(t)=i(t)-\lambda k(t),$$

$$(56\text{–}3)\quad t_2^{**}=\frac{1}{\lambda}\log\frac{k(0)}{k_2^{**}},$$

$$(56\text{–}4)\quad p(t)=e^{-(\lambda+\rho)\cdot(t_2^{**}-t)}\left\{\int_t^{t_2^{**}}f_k(0,k(s))\cdot e^{(\lambda+\rho)(t_2^{**}-s)}ds+p_2^{**}\right\}$$

が (30)，(36)，(38–2) の解となることを容易に示すことができる。

そこで，以上をまとめて，(30)，(36)，(37)，(38) の解は以下のようになる。

$k(0)<k_1^{**}$ であれば，$0\leqq t<t_1^{**}$ なる t に対しては (55) を満足する ($p(t)$, $k(t)$)，$t_1^{**}\leqq t$ なる t に対しては

$$k(t_1^{**})=k_1^{**},$$

$$p(t_1^{**})=h(k(t_1^{**})),$$

$$p(t)=h(k(t))$$

となる ($p(t)$, $k(t)$) は (30)，(36)，(38) をみたす。この $p(t)$ が (37) をみたすことはあきらかである。

$k_2^{**}<k(0)$ であれば，$0\leqq t<t_2^{**}$ なる t に対しては (56) を満足する ($p(t)$, $k(t)$)，$t_2^{**}\leqq t$ なる t に対しては

$$k(t_2^{**})=k_2^{**},$$

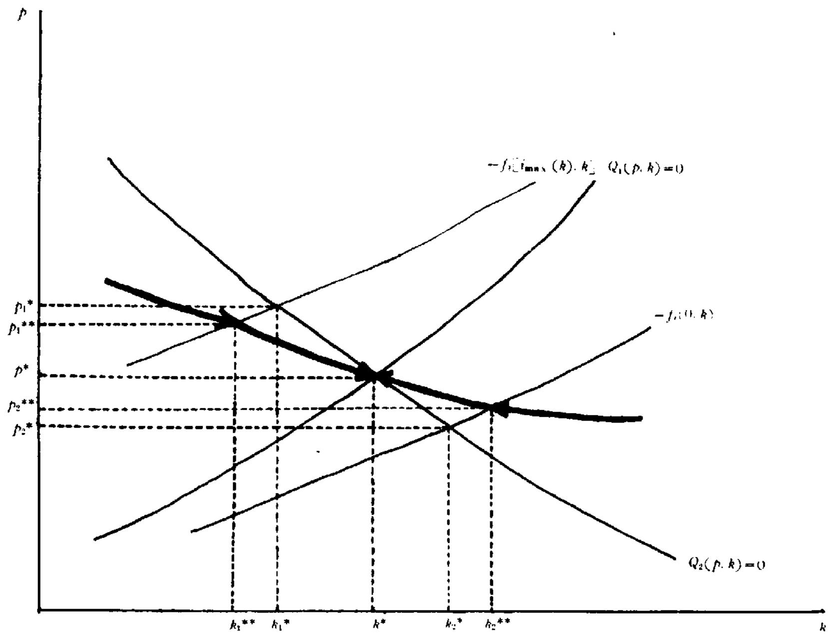
$$p(t_2^{**})=h(k(t_2^{**})),$$

$$p(t)=h(k(t))$$

となる ($p(t)$, $k(t)$) は (30)，(36)，(38) をみたす。この $p(t)$ が (37) をみたすことはあきらかである。

以上の解が (39) の条件をみたすことと，これが (30), (36), (37), (38), (39) をみたすただひとつの解であることは容易にわかる。すなわち，これは (13), (30) の拘束の下で (35) に最大値を与える。この解を図で示せば第 5 図の太い矢印の曲線のようになる。以上から次の定理をうる。

安定性定理 (optimal growth model)：(A1), (A2), (A4), (A5), (A6) がなり立っているとする。(Ⅰ) k_1^{**} が存在して，$k(0)<k_1^{**}$ であれば，optimal path では $k(t)$ が増加して k_1^{**} に達するまで投資財の生産のみが行なわれる。$k(t)$ が k_1^{**} に到達したあとは，optimal path では投資財と消費財の生産が行なわれ，$k(t)$ は漸近的に k^* に収束して行く。(Ⅱ) k_2^{**} が存在して，$k_2^{**}<k(0)$ であれば，optimal path では $k(t)$ が減少して k_2^{**} に達するまで消費財の生産のみが行なわれる。$k(t)$ が k_2^{**} に到達したあとは，optimal path では投資財と消費財の生産が行なわれ，$k(t)$ は漸近的に k^* に収束して行く。



第 5 図

References

[1] Samuelson, P. A., "The Fundamental Singularity Theorem for Non-Joint Production," *International Economic Review*, Vol. 7, No. 1 (Jan., 1966), pp. 34–41.

[2] Solow, R.M., "Note on Uzawa's Two-Sector Model of Economic Growth," *Review of Economic Studies*, Vol. XXIX(1), No. 78 (Oct., 1961), pp. 48–50.

[3] Srinivasan, T. N., "Optimal Savings in a Two-Sector Model of Growth," *Econometrica*, Vol. 32, No. 3 (July, 1964), pp. 358–373.

[4] Uzawa, H., "On a Two-Sector Model of Economic Growth," *Review of Economic Studies*, Vol. XXIX(1), No. 78 (Oct., 1961), pp. 40–47.

[5] Uzawa, H., "Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, Vol. XXXI(1), No. 85 (Jan., 1964), pp. 1–24.